КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Г. А. ЗИСМАН, О. М. ТОДЕС

II

Г. А. ЗИСМАН и О. М. ТОДЕС

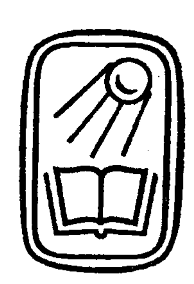
КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ II

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

530.1
364
УДК 530 (075,8)

2-3-1
29-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании сделан ряд небольших улучшений, имеющих целью оттенить физическую сущность изучаемых явлений.

Изложение ведется в международной системе единиц СИ и в абсолютной гауссовой. Особое внимание уделяется тому, чтобы научить читателя легко и свободно пользоваться выбранной им системой единиц и в случае необходимости без затруднения переходить от одной системы единиц к другой.

Г. А. Зисман,
О. М. Тодес

Октябрь 1964 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее пособие представляет собой второй том курса общей физики, написанного нами в соответствии с ныне принятой программой для втузов.

Общая установка, которой придерживались авторы, была изложена в предисловии к первому тому и остается неизменной.

Второй том содержит учение об электричестве. Часть I посвящена электростатике, часть II — электрическому току и часть III — электромагнетизму.

Секция физики Ленинградского дома ученых организовала широкое рецензирование рукописи настоящего тома специальными кафедрами ряда высших учебных заведений Ленинграда, что существенно помогло авторам в окончательной его доработке. Авторы выражают свою искреннюю признательность Секции физики ЛДУ и всем лицам, взявшим на себя труд прочтения и обсуждения рукописи.

Во втором томе курса §§ 1, 2, 5—27, 52—54 и Приложение II написаны О. М. Тодесом, §§ 3, 4 и 28—51 и Приложение I написаны Г. А. Зисманом.

Авторы будут благодарны всем кафедрам физики и отдельным лицам, которые поделятся с нами соображениями, направленными на улучшение курса.

Г. А. Зисман,
О. М. Тодес

Февраль 1959 г.

ЧАСТЬ I
ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ГЛАВА I
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 1. Взаимодействие электрических зарядов. Единицы измерения заряда

Издревле человечеством наблюдалось мощное проявление атмосферного электричества — молния. Свыше двух тысяч лет известна и другая группа электрических явлений — электризация при трении тел: потертый янтарь и некоторые другие вещества приобретают свойство притягивать легкие предметы. Однако изучение электрических (от греческого слова «электрон» — янтарь) явлений началось лишь в XVII веке.

Первый крупный научный успех в выяснении природы электричества был достигнут в середине XVIII века. В 1752—1753 гг. Ломоносов и Рихман в России и Франклин в Америке экспериментально доказали общность атмосферного электричества и электризации при трении. Мощная молния и слабые искорки, наблюдаемые в темной комнате при расчесывании волос гребнем, оказались одним и тем же электрическим разрядом в воздухе, различающимся лишь масштабом явления.

Для количественного изучения электричества Рихман сконструировал первый электроскоп, состоявший из металлической линейки с прикрепленной к ней тонкой нитью. При электризации нить, отталкиваясь от линейки, отклонялась на некоторый угол, измерявшийся транспортиром.

Ломоносов создал первую теорию атмосферного электричества. Согласно этой теории атмосферный воздух находится в состоянии непрерывного движения. Лучи Солнца нагревают поверхность Земли, которая в свою очередь нагревает прилегающие к ней слои воздуха. Нагретый воздух поднимается кверху, а на его место опускается более тяжелый холодный воздух из верхних слоев атмосферы. Движущиеся друг относительно друга массы воздуха при трении заряжаются, и это в большом масштабе воспроизводит электризацию при трении небольших предметов.

Уже первые попытки объяснить природу электрических явлений повлекли за собой важные практические применения. Для защиты от атмосферных электрических разрядов Франклин предложил молниеотвод — высокий металлический шест, отводящий молнию в землю мимо защищаемого им сооружения.

Исходя из простых и изящных опытов, Франклин выдвинул теорию существования двух разнородных электрических жидкостей и предложил современную терминологию. Электрический заряд, скапливающийся на потертой кожей стеклянной палочке, был назван «положительным», а заряд, скапливающийся на потертом мехом куске смолы, — «отрицательным».

На основании опытов можно заключить, что одноименные заряды отталкиваются друг от друга; разноименные заряды притягиваются друг к другу, а при соединении в равных количествах — нейтрализуются.

Силы, возникающие между заряженными телами, действуют на все электрически заряженные частицы, входящие в состав заряженных тел, в том числе и на те, чей нескомпенсированный заряд обусловливает наблюдаемый заряд тела. Если эти заряды тесно связаны с телом, то последнее начнет перемещаться вместе с ними, и по силе, действующей на тело, можно судить о величине электрических взаимодействий. При определенных условиях заряды могут переходить с одного тела на другое или уходить из тела через его поверхность.

Процессы движения электрических зарядов и сопутствующие им явления будут разобраны в двух последующих разделах этого тома (часть II «Электрический ток» и часть III «Электромагнетизм»). В этом же разделе мы рассмотрим статические, т. е. неподвижные, заряды и статические, не меняющиеся со временем, электрические поля. Будем считать, что перемещения зарядов отсутствуют и силы, действующие на заряды, целиком определяются взаимным расположением зарядов. Взаимные перемещения зарядов нам придется учитывать лишь при выводе соотношений для работы и энергии. Эти перемещения мы здесь будем считать бесконечно медленными, т. е. настолько медленными, чтобы силы взаимодействия можно было предполагать практически не зависящими от скорости движения зарядов.

Рассмотрение электростатических взаимодействий заряженных тел мы начнем с простейшего случая взаимодействия точечных зарядов, играющих в учении об электричестве такую же роль, как материальные точки в механике. *Точечным зарядом q называется наэлектризованное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми оно взаимодействует.* В случае протяженных зарядов, размерами которых пренебрегать нельзя, следует

мысленно расчленить их на достаточно малые элементы, каждый из которых может рассматриваться как точечный заряд.

Количественное изучение взаимодействия точечных зарядов, осуществленное французским физиком Кулоном в 1785 г., проводилось с помощью чувствительных крутильных весов. На тонкой кварцевой нити был подвешен горизонтальный стержень с маленьким заряженным шариком на конце. Второй заряженный шарик подносился к первому на некоторое расстояние в той же горизонтальной плоскости. В результате электростатических сил притяжения или отталкивания (в зависимости от знаков обоих зарядов) упругая нить закручивалась на некоторый угол α (см. рис. 1.1), тем больший, чем больше была сила взаимодействия между зарядами. Предварительно была определена зависимость угла закручивания нити от приложенной к шарику силы. Радиусы заряженных шариков были малы по сравнению с расстояниями между ними, так что заряды можно было считать точечными. Величину заряда каждого шарика можно было уменьшать в известное число раз, приводя его в соприкосновение с одним или несколькими такими же шариками.

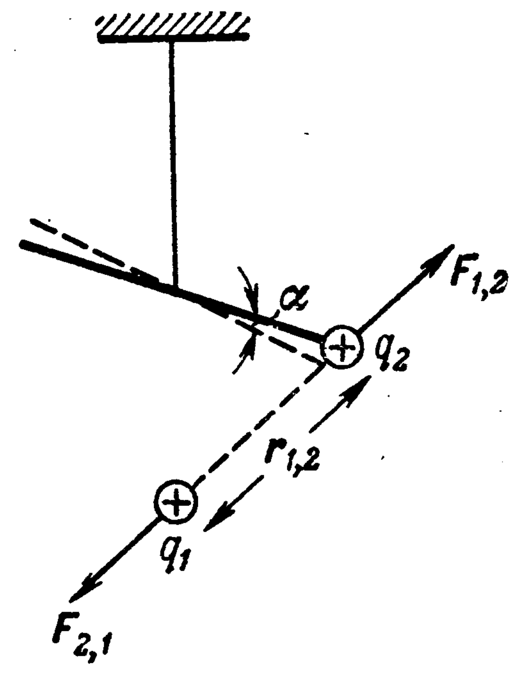


Рис. 1.1.

Обозначим величины взаимодействующих зарядов через q_1 и q_2 и расстояние между ними через $r_{1,2}$. Из опытов Кулона следовало, что сила взаимодействия между зарядами F пропорциональна каждому из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2}. \tag{1.1}$$

В опытах Кулона электрические заряды находились в воздухе. Дальнейшие опыты показали, что наличие вещества вокруг зарядов влияет на величину силы их взаимодействия.

Если при прочих равных условиях (величинах зарядов и их взаимном расстоянии) пространство заполнить однородной *непроводящей* средой (воздухом, керосином, маслом, стеклом и т. п.), то сила взаимодействия между зарядами уменьшится. Природа этого явления будет рассмотрена ниже, в §§ 4 и 10. Влияние той или иной среды на величину электрического взаимодействия между зарядами можно оценить, если сравнить силы между зарядами в отсутствие среды (F_0) и при ее наличии (F).

Назовем отношение сил F_0/F *диэлектрической проницаемостью среды* и обозначим эту величину через ε:

$$\frac{F_0}{F} = \varepsilon. \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что ε есть безразмерная величина. Таким образом, при наличии непроводящей среды, в которую помещены заряды, закон Кулона принимает вид

$$F = \frac{F_0}{\varepsilon} \sim \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^2}. \quad (1.3)$$

Для пустоты $\varepsilon = 1$, для керосина $\varepsilon = 2$, у сухой бумаги $\varepsilon = 2 \div 2{,}5$, у воды $\varepsilon = 80$, а для воздуха при атмосферном давлении $\varepsilon = 1{,}0006$, т. е. практически $\varepsilon_{\text{возд}} = 1$.

Единицы измерения силы и расстояния были введены в т. I в разделе механики. Здесь мы встречаемся с новой величиной — количеством электричества или электрическим зарядом q, единицу измерения которой можно выбрать различным образом. Исторически использовались различные системы единиц: электростатическая (СГСЭ), электромагнитная (СГСМ), система Гаусса (СГСГ или просто СГС), практическая (МКСА) — рационализованная и нерационализованная. С 1964 г. введена международная система СИ. Общая сводка систем и переводные коэффициенты приведены в Приложении I в конце тома. Мы во всем дальнейшем изложении будем использовать лишь две системы — СГС и СИ.

Абсолютная гауссова система единиц базируется на системе СГС (сантиметр, грамм массы, секунда). Сила измеряется в производных единицах — динах (1 *дин* = 1 *г·см/сек*^{2}), основанных на выборе коэффициента пропорциональности во втором законе Ньютона равным единице. Положим аналогично равным единице и коэффициент пропорциональности в законе Кулона, т. е. напишем

$$F_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^2}. \quad (1.4)$$

Тогда этот закон определит СГС единицу заряда. При $\varepsilon = 1$, т. е. в вакууме, и при $r_{1,2} = 1$ заряды $q_1 = q_2 = 1$ должны быть выбраны так, чтобы $F_{1,2} = 1$. Следовательно, СГС *единица заряда есть такое количество электричества, которое действует на равный ему заряд, помещенный в вакууме на расстоянии* 1 *см, с силой, равной* 1 *дин* (оба заряда точечные). Отсюда следует размерность заряда в системе Гаусса

$$[q] = [F]^{1/2}\,[r^2]^{1/2} = г^{1/2} см^{3/2} сек^{-1}. \quad (1.5)$$

В системе СИ для измерения электрических величин вводится не производная, а независимая четвертая единица. В качестве основной электрической единицы выбрана практическая единица тока — ампер (*а*), точное определение которой будет приведено в § 32. Единицей заряда в системе СИ является кулон (*к*), т. е.

количество электричества, протекающее за 1 *сек* через поперечное сечение проводника при токе в цепи, равном 1 *а*:

$$1\ \text{к} = 1\ \text{а} \cdot \text{сек} = 2{,}998 \cdot 10^9\ (\approx 3 \cdot 10^9)\ \text{СГС ед. заряда.} \qquad (1.6)$$

При введении независимой единицы заряда закон Кулона (1.4) должен содержать коэффициент пропорциональности, имеющий определенную величину и размерность. Мы запишем этот коэффициент в виде отношения двух величин k_0 и ε_0, т. е. положим

$$F_{1,2} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^2}. \qquad (1.7)$$

Величина ε_0 носит название электрической постоянной, а множитель k_0 — коэффициент рационализации. Поверхность шара $S = 4\pi r^2$ и полный телесный угол равен 4π. Поэтому в системе СИ для так называемой рационализации записи формул во все соотношения, описывающие сферически симметричные взаимодействия, вводится дополнительный множитель рационализации $k_0 = \frac{1}{4\pi}$. Этот множитель вводится и в закон Кулона, запись которого в системе СИ принимает вид

$$F_{1,2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_{1,2}^2}. \qquad (1.8)$$

Произведение

$$\varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon_a \qquad (1.9)$$

носит название абсолютной диэлектрической проницаемости данной среды. Величины ε_0 и ε_a в системе СИ являются размерными. Из (1.8) следует, что

$$[\varepsilon_a] = [\varepsilon_0] = \frac{[q]^2}{[F]\,[r]^2} = \frac{\text{к}^2}{\text{н} \cdot \text{м}^2}, \qquad (1.10)$$

где, как известно, $1\ \text{н} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м}/\text{сек}^2 = 10^5$ *дин* — единица силы в системе СИ (ньютон).

Для определения величины ε_0 рассмотрим пример взаимодействия двух точечных зарядов в 1 *к* каждый, помещенных в пустоте на расстоянии 1 *м* друг от друга. Согласно (1.4) и (1.6) сила взаимодействия между ними равна

$$F = \frac{(3 \cdot 10^9\ \text{СГС ед. заряда})^2}{(100\ \text{см})^2} = 9 \cdot 10^{14}\ \text{дин} = 9 \cdot 10^9\ \text{н}.$$

Сопоставляя это с (1.8), имеем

$$9 \cdot 10^9\ \text{н} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1\ \text{к}^2}{1\ \text{м}^2},$$

откуда

$$\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \frac{к^2}{н \cdot м^2} \tag{1.11}$$

и

$$\frac{k_0}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{н \cdot м^2}{к^2}. \tag{1.12}$$

Для того чтобы записать закон Кулона в форме, пригодной для обеих систем единиц, можно воспользоваться соотношением (1.7), учитывая, что

$$\left.\begin{array}{l} \text{в системе Гаусса } k_0 = 1 \text{ и } \varepsilon_0 = 1, \\ \text{а в системе СИ } k_0 = \dfrac{1}{4\pi} \text{ и } \varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \dfrac{к^2}{н \cdot м^2}. \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

В системе Гаусса рационализация не применяется и $k_0 = 1$.

Формула (1.7) определяет величину сил взаимодействия между зарядами. Поскольку сила есть векторная величина, надо еще охарактеризовать и ее направление. Для этого введем радиус-вектор $\mathbf{r}_{1,2}$, проведенный от первого заряда q_1 ко второму q_2 (рис. 1.2). Если заряды одноименны, то сила $\mathbf{F}_{1,2}$, испытываемая зарядом q_2 со стороны заряда q_1 (сила отталкивания), будет совпадать по направлению с $\mathbf{r}_{1,2}$. Введем единичный вектор направления $\mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$, где $r_{1,2}$ — величина радиус-вектора. Тогда закон Кулона в векторной форме примет вид

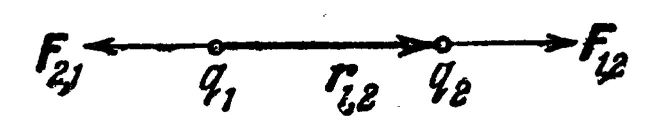


Рис. 1.2.

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^2} \frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{1,2}^3} \mathbf{r}_{1,2}. \tag{1.14}$$

Силу, испытываемую зарядом q_1 со стороны заряда q_2, получим простой перестановкой в (1.14) индексов 1 и 2:

$$\mathbf{F}_{2,1} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_2 q_1}{\varepsilon r_{2,1}^3} \mathbf{r}_{2,1}, \tag{1.15}$$

где

$$\mathbf{r}_{2,1} = -\mathbf{r}_{1,2} \tag{1.16}$$

представляет собой радиус-вектор, проведенный от второго заряда к первому. Из формул (1.14)—(1.16) следует, что

$$\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2},$$

т. е. взаимодействие электрических зарядов удовлетворяет третьему закону Ньютона.

Формулы (1.14) и (1.15) остаются справедливыми и в случае разноименных зарядов. Произведение $q_1 q_2$ в последнем случае отрицательно, и обе силы меняют свое направление — отталкивание заменяется притяжением.

§ 2. Электрическое поле. Вектор напряженности электрического поля

Удаленные друг от друга точечные электрические заряды взаимодействуют по закону (1.14). Возникает вопрос: каким образом осуществляется это взаимодействие при отсутствии вещества между зарядами, т. е. каков материальный носитель взаимодействия? Этим носителем является связанное с зарядами электрическое поле.

Неподвижный заряд q, расположенный в какой-либо точке пространства, неразрывно связан с электростатическим полем в окружающем пространстве. Это поле заполняет все пространство и, в частности, проявляется в виде силы $\mathbf{F}$, с которой оно воздействует на помещаемый в различные точки поля пробный заряд q'.

Не существует электростатических полей, не связанных с зарядами, как не существует «голых» — не окруженных полем — электрических зарядов. В последующих разделах мы увидим, что нестатические, переменные электрические поля могут существовать совместно с переменными магнитными полями в отрыве от электрических зарядов. В настоящем разделе мы рассматриваем неподвижные заряды и соответственно не меняющиеся в пространстве и времени статические электрические поля. Для краткости подобные электростатические поля мы будем называть просто электрическими, во всяком случае там, где это не может вызвать путаницы.

Возвращаясь к рассматриваемому случаю взаимодействия двух точечных зарядов q и q' (рис. 1.3), мы можем теперь толковать возникновение механических сил $\pm\mathbf{F}$ между ними следующим образом. С зарядом q связано окружающее его электрическое поле. Это поле действует на помещаемый в него второй заряд q' с некоторой силой $\mathbf{F}$, определяемой характером поля в той точке, где находится заряд q'. Поскольку поле, связанное с зарядом q, зависит от положения этого заряда в пространстве, то сила $\mathbf{F}$ зависит от расположения пробного заряда q' по отношению к q, т. е. от радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного от q к q'. В свою очередь с зарядом q' связано собственное электрическое поле, которое по закону (1.14) действует на заряд q с силой $-\mathbf{F}$, зависящей от того, в какую точку поля он помещен.

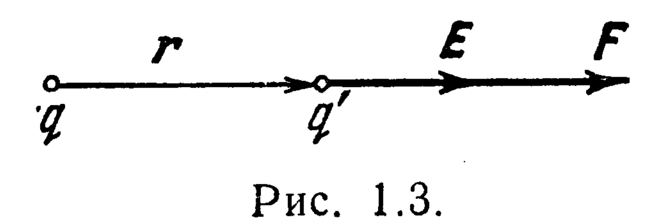


Рис. 1.3.

В случае статических полей электрические поля, создаваемые зарядами q и q', не взаимодействуют друг с другом и каждое из них не оказывает воздействия на «собственный» заряд, создающий

данное поле. Электрическое поле, связанное с зарядом q, существует независимо от наличия или отсутствия других зарядов. Однако обнаружить его мы можем лишь с помощью сил, испытываемых каким-либо другим пробным зарядом q', помещенным в это поле. Этим обстоятельством и пользуются для количественной характеристики электрического поля.

Будем рассматривать заряд q как «источник» электрического поля, в которое на расстоянии $\mathbf{r}$ помещен пробный заряд q'. Согласно закону Кулона (1.14) на последний будет действовать сила

$$\mathbf{F}=k_0\frac{qq'}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}\mathbf{r}=q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}\mathbf{r}. \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что сила, действующая на пробный заряд, помещенный в данную точку поля, зависит от величины этого заряда q' и прямо пропорциональна последней. С другой стороны, множитель пропорциональности, т. е. величина $\frac{k_0 q}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}\mathbf{r}$, не зависит от q' и определяется только величиной заряда q, свойствами среды ε и положением в пространстве той точки, в которой изучается поле,— значением радиус-вектора $\mathbf{r}$. Эту величину и можно принять для количественной характеристики электрического поля:

$$\mathbf{E}=\frac{k_0 q}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}\mathbf{r}=\frac{\mathbf{F}}{q'}. \tag{2.2}$$

Вектор $\mathbf{E}$ носит название вектора напряженности электрического поля. С помощью его можно переписать выражение (2.1) для механической силы, действующей на пробный заряд q', в виде

$$\mathbf{F}=q'\mathbf{E}. \tag{2.3}$$

Следовательно, $\mathbf{E}=\mathbf{F}$ при $q'=+1$, и *вектор напряженности электрического поля численно равен силе, действующей в данной точке на помещенный в нее пробный единичный положительный точечный заряд.*

Формула (2.2) определяет вектор напряженности электрического поля точечного заряда q. Величина этого вектора

$$E_{\text{т.з}}=\frac{k_0 q}{\varepsilon_0\varepsilon r^2} \tag{2.4}$$

убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника. В системе Гаусса $\varepsilon_0=1$, $k_0=1$ и

$$E_{\text{т.з}}=\frac{q}{\varepsilon r^2}\ \text{СГС ед. напряженности поля.} \tag{2.4а}$$

Используя (1.5), можно определить размерность этой единицы:

1 СГС ед. напряженности поля $=1\ г^{1/2}\cdot см^{-1/2}\cdot сек^{-1}$.

В системе СИ $k_0 = 1/4\pi$ и

$$E_{\text{т.з.}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}\ \frac{н}{к}. \tag{2.4б}$$

Если электрическое поле создается не одним, а несколькими точечными зарядами q_1, q_2, ..., q_n (рис. 1.4), то это поле будет действовать на пробный заряд q', помещенный в некоторой точке поля, с результирующей силой **F**. Опыт показывает, что силы, возникающие в результате электрического взаимодействия, складываются по тем же законам, как и силы в механике, т. е. вектор **F** равен геометрической сумме сил $\mathbf{F}_i$, создаваемых электрическими полями каждого заряда и определяемых по закону Кулона:

$$\mathbf{F}_i = k_0 \frac{q_i q'}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^3} \mathbf{r}_i, \tag{2.5}$$

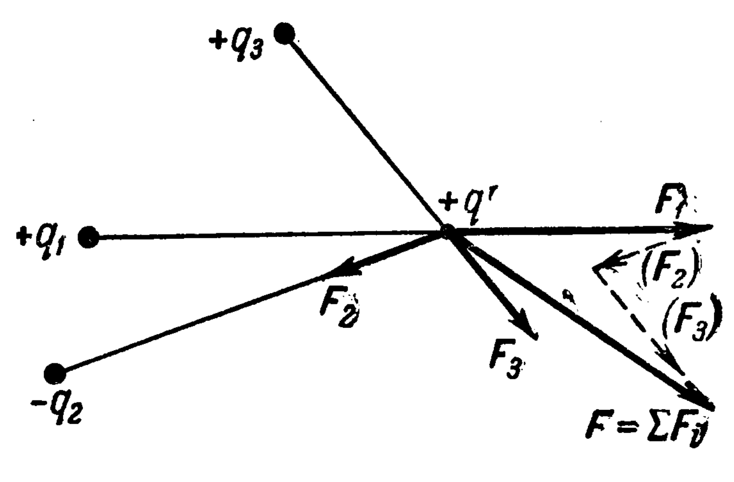


Рис. 1.4.

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из точки i-го заряда в точку поля, куда помещен пробный заряд q'.

Складывая эти силы и вынося общий множитель q', получим:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k_0 q_i q'}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^3} \mathbf{r}_i = q' \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k_0 q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^3} \mathbf{r}_i = q'\mathbf{E}, \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k_0 q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^3} \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{E}_i \tag{2.7}$$

представляет собой вектор напряженности электрического поля, создаваемого всей системой зарядов. Из (2.7) следует, что *вектор напряженности электрического поля системы зарядов равен геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.*

Это соотношение носит название принципа наложения (суперпозиции) электрических полей. С его помощью можно в общем виде рассчитывать электрические поля любых сколь угодно сложных систем электрических зарядов.

Графически поле характеризуют с помощью так называемых линий напряженности, или силовых линий. Эти линии проводятся так, чтобы касательные к ним в каждой точке пространства совпадали по направлению с вектором **E** в той же самой точке (см. рис. 1.5). Таким образом, силовая линия указывает направление вектора напряженности электрического поля в каждой точке, через которую она проходит.

Линии напряженности характеризуют поле весьма неполно. Электрическое поле есть непрерывный материальный объект, линии же напряженности могут быть проведены с любой, но все же конечной густотой.

Чтобы с помощью линий напряженности охарактеризовать не только направление, но и величину вектора **E**, условно принимают, что *число линий, проходящих через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно этим линиям, должно равняться численной величине E в данной области поля.* Таким образом, величина напряженности поля характеризуется густотой линий напряженности; в тех областях, где величина E больше, линии напряженности проходят гуще, и наоборот.

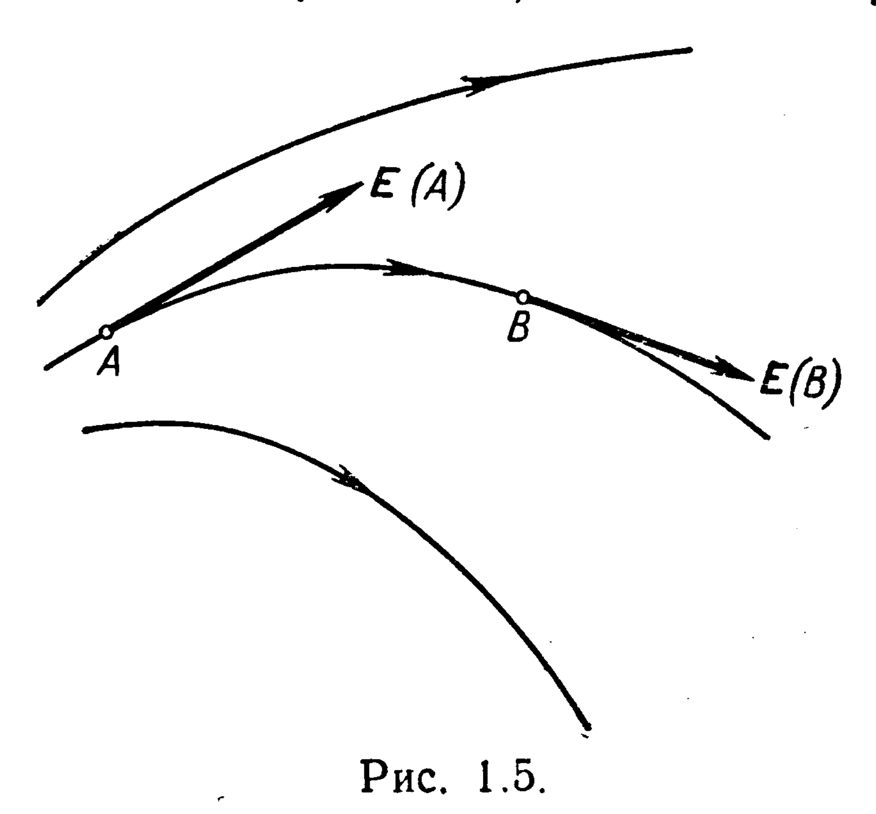


Рис. 1.5.

В случае поля точечного заряда, согласно (2.2), $\mathbf{E} \parallel \mathbf{r}$ и линии напряженности направлены по радиусам, проведенным из заряда. Для положительного заряда ($q > 0$) эти линии исходят из заряда и уходят в бесконечность (рис. 1.6, *а*). Для отрицательного заряда ($q < 0$) вектор **E** направлен против радиус-вектора **r**, а линии напряженности идут из бесконечности и сходятся в точке нахождения заряда (рис. 1.6, *б*).

Согласно (2.4) $E \sim 1/r^2$, так что густота линий напряженности должна убывать обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. Так как площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии, сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, то общее число линий будет оставаться постоянным на любом расстоянии от заряда. Как мы увидим ниже, то свойство линий напряженности, что они могут начинаться или кончаться только на электрических зарядах, но нигде в пространстве между ними (или уходить в бесконечность), сохраняется и для полей, создаваемых любой системой электрических зарядов.

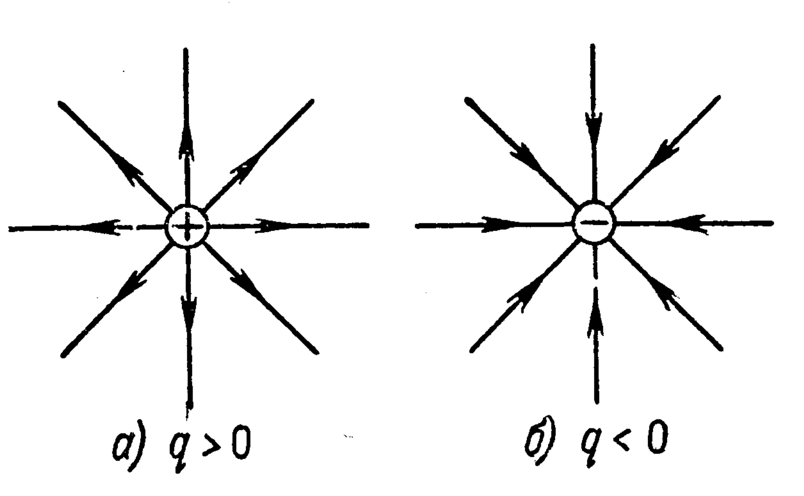


Рис. 1.6.

В качестве примера принципа наложения электрических полей рассмотрим поле так называемого постоянного электрического диполя, который будет часто встречаться в дальнейшем изложе-

нии. Диполем называется совокупность двух одинаковых по абсолютной величине разноименных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга. Мы ограничимся случаями, когда расстояние l мало по сравнению с расстоянием r от центра диполя O до точки M, в которой определяется напряженность электрического поля диполя **E** (рис. 1.7). При этом условии ($l \ll r$) зависимость **E** от радиус-вектора **r** и угла θ между **r** и единичным вектором **n**, направленным вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному, будет выражаться, как мы покажем, сравнительно

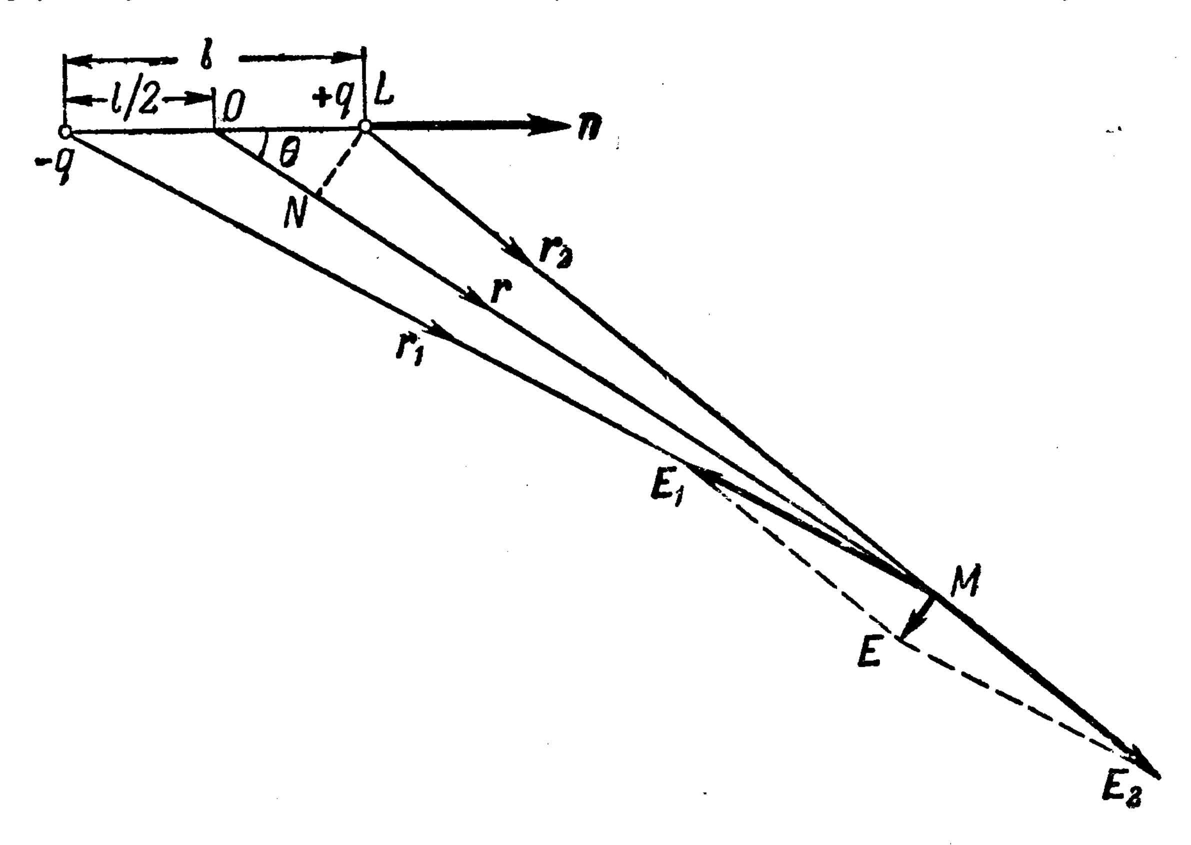


Рис. 1.7.

просто. В непосредственной же близости от зарядов ($r \approx l$) поле имеет значительно более сложный характер.

Соединим точку наблюдения M с обоими зарядами радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, проведенными из последних. Тогда вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}_1$, создаваемого зарядом $-q$ в точке M, будет направлен против радиус-вектора $\mathbf{r}_1$, а вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}_2$, создаваемого зарядом $+q$ в точке M, будет направлен по радиус-вектору $\mathbf{r}_2$, как это изображено на рис. 1.7. Векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ определяются по формуле (2.2), а полный вектор напряженности электрического поля в точке M равен их геометрической сумме:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = k_0 \frac{-q}{\varepsilon_0 \varepsilon r_1^3} \mathbf{r}_1 + k_0 \frac{+q}{\varepsilon_0 \varepsilon r_2^3} \mathbf{r}_2. \qquad (2.8)$$

Из треугольника OLM на рис. 1.7 видно, что вектор **r** является геометрической суммой вектора $\mathbf{r}_2$ и вектора $\overrightarrow{OL} = \frac{l}{2}\mathbf{n}$. Отсюда

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \frac{l}{2}\mathbf{n} \quad \text{и аналогично} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{l}{2}\mathbf{n}. \qquad (2.9)$$

Опуская из точки L перпендикуляр на радиус-вектор $\mathbf{r}$, мы видим, что величина последнего равна сумме двух отрезков:

$$r = ON + NM = \frac{l}{2}\cos\theta + NM.$$

Используя условие $l \ll r$, мы можем считать в прямоугольном треугольнике LNM катет NM с точностью до величин второго порядка малости ($\sim l^2$) равным гипотенузе r_2; тогда

$$r_2 \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta \quad \text{и аналогично} \quad r_1 \approx r + \frac{l}{2}\cos\theta. \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.8), получаем

$$\mathbf{E} = \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon}\left[\frac{\mathbf{r} - \frac{l}{2}\mathbf{n}}{\left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)^3} - \frac{\mathbf{r} + \frac{l}{2}\mathbf{n}}{\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)^3}\right]. \qquad (2.11)$$

Раскрывая скобки в знаменателях по формуле бинома Ньютона и отбрасывая члены, содержащие малые порядков l^2 и l^3, имеем

$$\left(r \pm \frac{l}{2}\cos\theta\right)^3 \approx r^3 \pm 3r^2\frac{l}{2}\cos\theta = r^3\left(1 \pm \frac{3}{2}\frac{l}{r}\cos\theta\right).$$

Воспользуемся известным правилом приближенного деления, согласно которому при $\delta \ll 1$ с точностью до членов второго порядка

$$\frac{1}{1 \pm \delta} = \frac{1 \mp \delta}{1 - \delta^2} \approx 1 \mp \delta.$$

Тогда

$$\frac{1}{\left(r \pm \frac{l}{2}\cos\theta\right)^3} \approx \frac{1}{r^3\left(1 \pm \frac{3}{2}\frac{l}{r}\cos\theta\right)} \approx \frac{1 \mp \frac{3}{2}\frac{l}{r}\cos\theta}{r^3}. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11) и раскрывая все скобки, получим окончательно

$$E \approx k_0 \frac{ql}{\varepsilon_0 \varepsilon r^3}\left(3\frac{\mathbf{r}}{r}\cos\theta - \mathbf{n}\right). \qquad (2.13)$$

Отсюда видно, что напряженность поля диполя определяется не в отдельности величиной зарядов q и расстоянием между ними l, а произведением

$$p = ql, \qquad (2.14)$$

которое называется электрическим моментом диполя, или просто дипольным моментом. Поскольку ось диполя имеет вполне определенную ориентацию в пространстве, то дипольный момент является вектором. Этот вектор $\mathbf{p}$ направлен вдоль оси ди-

поля от отрицательного заряда к положительному, т. е. по направлению введенного нами выше единичного вектора $\mathbf{n}$. Следовательно,

$$\mathbf{p}=ql\mathbf{n}. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.14) и (2.15) в (2.13), получаем

$$\mathbf{E}=k_0\frac{p}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}\left(3\frac{\mathbf{r}}{r}\cos\theta-\mathbf{n}\right)=k_0\frac{3p\frac{\mathbf{r}}{r}\cos\theta-\mathbf{p}}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{2.16}$$

Таким образом, напряженность электрического поля диполя E прямо пропорциональна величине дипольного момента p и в любом направлении (для любых значений θ) убывает с ростом r как $1/r^3$,

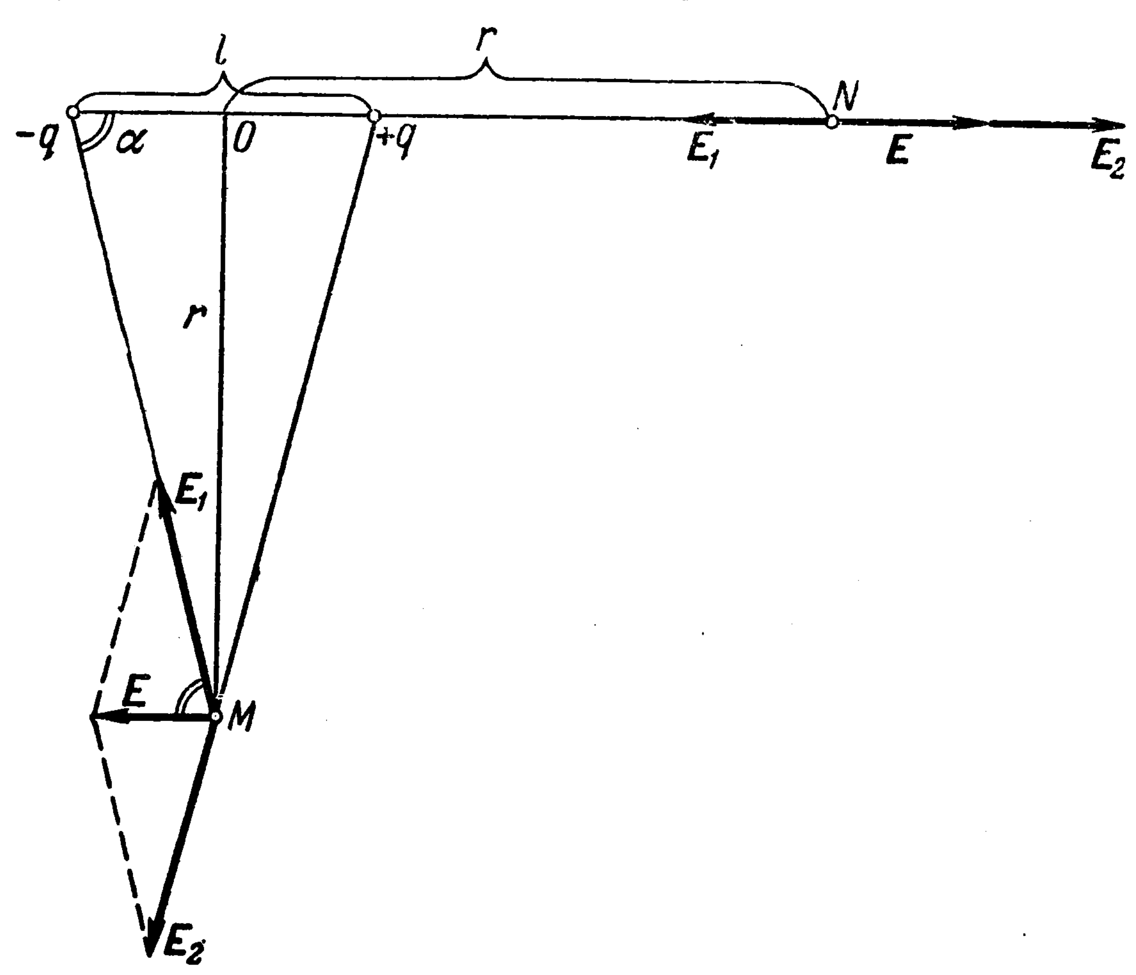


Рис. 1.8.

т. е. быстрее, чем поле одиночного заряда (убывающее $\sim 1/r^2$). Происходит это потому, что заряды диполя имеют разные знаки и их поля частично погашаются.

Рассмотрим точку N, лежащую справа от заряда $+q$ на продолжении оси диполя (рис. 1.8). Для этой точки $\theta=0$, $\cos\theta=1$, $\mathbf{r}=r\mathbf{n}$ и

$$\mathbf{E}_{\parallel\,\text{оси}}=k_0\frac{p}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}(3\mathbf{n}-\mathbf{n})=k_0\frac{2p\mathbf{n}}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}=k_0\frac{2\mathbf{p}}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{2.17}$$

Это соотношение остается справедливым и для точек, лежащих на оси диполя слева от последнего, где $\theta=\pi$, $\cos\theta=-1$, но $\mathbf{r}=-r\mathbf{n}$.

Для точки M, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, $\theta=\pi/2$, $\cos\theta=0$ и

$$\mathbf{E}_{\perp\,\text{оси}}=-k_0\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_0\varepsilon r^3}. \tag{2.18}$$

Величина напряженности поля в точке M в два раза меньше, чем в точке N на оси диполя (при том же значении r), а направление вектора **E** противоположно направлению момента диполя.

В общем случае произвольного θ, возводя выражение (2.16) в квадрат и принимая во внимание, что скалярное произведение (**rn**) равно $r\cos\theta$, можно легко вычислить величину вектора **E**:

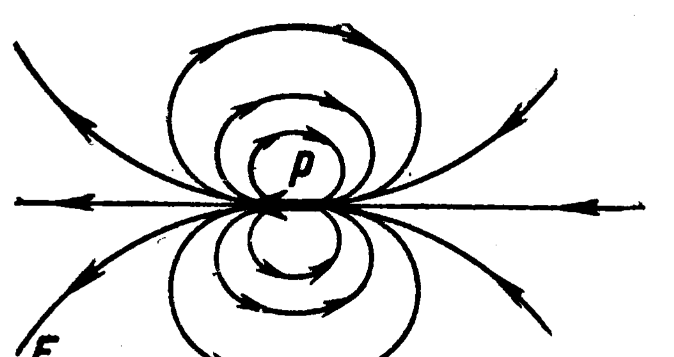


Рис. 1.9.

$$E = k_0 \frac{p}{\varepsilon_0 \varepsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (2.19)$$

Устремляя l к нулю, а q к бесконечности так, чтобы их произведение $ql = p$ оставалось неизменным, получаем так называемый точечный диполь ($l = 0$), поле которого изображено на рис. 1.9. В случае точечного диполя соотношение $l \ll r$ остается верным при всех значениях r, следовательно, формулы (2.16)—(2.19) верны без ограничений.

§ 3. Элементарные электрические заряды

При электризации трением оба трущихся тела заряжаются разноименно — одно положительно, а другое отрицательно. При этом абсолютные величины зарядов обоих тел (т. е. без учета их знаков) оказываются равными, и при соприкосновении они могут вновь нейтрализовать друг друга.

Это объясняется тем, что при трении происходит не возникновение электричества, а лишь разделение положительных и отрицательных зарядов, поровну существующих в нейтральных телах. Рассмотрим замкнутую систему, через поверхность которой заряды не переходят. Обозначим через q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) величины отдельных зарядов, находящихся в системе; для положительных зарядов $q_i > 0$, а для отрицательных $q_i < 0$. Тогда, как показывает опыт, при всех процессах электризации и нейтрализации зарядов внутри системы (замкнутой!) выполняется закон сохранения электрического заряда

$$\sum_i q_i = \mathrm{const} \quad (3.1)$$

— *алгебраическая сумма электрических зарядов в замкнутой системе остается постоянной.*

Изучая явления электролиза, Фарадей в начале XIX века установил прямую пропорциональность между количеством электричества, прошедшим через раствор электролита, и количеством вещества, выделившимся на электродах. Этот факт указывал на тесную связь электрической субстанции с веществом. Представления об атомисти-

ческом строении вещества приводили тогда к предположению о том, что и электрическая субстанция не является непрерывной, а существует в природе в виде совершенно определенных «дискретных» порций: с каждым ионом (заряженным атомом) вещества связана определенная порция электричества. Из законов Фарадея для электролиза (подробнее см. § 24) следует, что с каждым атомом любого одновалентного химического элемента, выделяющимся на электроде, связана одна и та же порция электрического заряда, с каждым двухвалентным атомом — ровно вдвое большая порция и т. д.

Однако вплоть до начала XX века само существование атомов и молекул оспаривалось многими учеными. Кроме того, законы электролиза были установлены для макроскопических количеств вещества, и могло возникать сомнение: может быть пропорциональность между количествами прошедшего электричества и выделившегося вещества соблюдается лишь в среднем для большого количества атомов, каждый из которых переносит с собой несколько различные порции заряда. Поэтому гипотеза о дискретной («атомной») природе электричества требовала прямого экспериментального доказательства.

В 20-х годах XIX века была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями, и центр тяжести интересов физиков переместился в область изучения свойств электромагнитного поля, создаваемого зарядами. В теоретических работах Фарадея и Максвелла была установлена возможность распространения электромагнитных полей независимо от создающих эти поля движущихся электрических зарядов. Опытами Герца и Попова было подтверждено существование электромагнитных волн, и последние получили широкое применение в технике.

То обстоятельство, что электрические заряды всегда окружены полем, а поле может существовать и изменяться независимо от зарядов, приводило к представлению о первичности поля и вторичности зарядов. В наши дни с открытием новых взаимодействий (ядерного, «слабого», связанного с нейтрино, — см. т. III, ч. III) проблема еще более усложнилась и, по-видимому, далека от решения. Ее рассмотрение выходит далеко за пределы нашего курса.

Изучение катодных лучей, открытых в разрядной трубке Круксом в 1870 г., привело к заключению, что мельчайшие заряженные частицы, вырываемые из атомов вещества, обладают отрицательными зарядами. Эти частицы были названы электронами. Измеряя радиус кривизны траектории пучка электронов, заворачиваемых в магнитном поле, можно было определить удельный заряд электрона e/m, т. е. отношение его заряда e к массе m (подробнее см. часть III, гл. VIII, § 38). Многочисленные опыты показали, что (при скоростях электронов, много меньших скорости света)

величина удельного заряда e/m для всех электронов одинакова. Это указывало на тождественность всех электронов, вырываемых из атомов различных веществ, на одинаковость их заряда e и массы (покоящейся) m.

Величина e/m для электрона оказалась в 1836 раз больше, чем e/M для положительного иона водорода H^+, т. е. для атома водорода, от которого оторван один электрон. Таким образом, физики пришли к заключению, что атомы вещества содержат «тяжелые» положительно заряженные частицы и «легкие» отрицательно заряженные частицы — электроны. Сообщая телу добавочное число электронов, мы заряжаем его отрицательным электричеством. Отнимая от тела часть электронов, мы заряжаем его положительно.

При обычных макроскопических процессах число участвующих в них электронов столь велико, что дискретность заряда может не учитываться в такой же мере, как несущественно при отмеривании порции жидкости то обстоятельство, что эта порция должна содержать целое число молекул. Однако для понимания механизма электрических явлений знание природы элементарных носителей электрического заряда совершенно необходимо. Для установления количественных закономерностей многих процессов существенной является и абсолютная величина элементарного заряда e.

Экспериментальное определение величины e и тем самым прямое доказательство дискретности электрического заряда было впервые осуществлено в 1909 г. Милликеном. Идея опытов Милликена состоит в следующем.

Представим себе микроскопическую капельку какой-нибудь нелетучей жидкости (например, минерального масла), помещенную между двумя строго горизонтальными пластинами, заряженными электричеством противоположного знака (плоский конденсатор). Меняя с помощью батареи и реостата заряд пластин, можно создавать в пространстве между пластинами вертикально направленное электрическое поле **E** различной напряженности.

Под воздействием радиоактивных излучений, рентгеновых или ультрафиолетовых лучей воздух между пластинами конденсатора ионизуется и в нем появляются отрицательно и положительно заряженные ионы, т. е. молекулы с избытком или недостатком электронов. Эти ионы оседают на капельке масла и заряжают ее. Обозначим полный заряд, приобретенный капелькой к данному моменту, через q. Тогда можно, изменяя величину и направление электрического поля E в конденсаторе, подобрать его таким, чтобы электрическая сила $F_{эл}$, действующая на капельку ($F_{эл}=qE$), в точности уравновесила вес последней mg (m — масса капельки):

$$qE = mg. \qquad (3.2)$$

При этом капелька повиснет в воздухе и будет оставаться неподвижной, как это изображено на рис. 1.10. Если масса капельки m известна, то легко определить несомый ею заряд:

$$q = \frac{mg}{E}. \tag{3.3}$$

Определение массы капельки ничтожных размеров является наиболее трудной частью опыта. Крошечные капельки масла Милликен получал, разбрызгивая с помощью пульверизатора масло над верхней пластиной конденсатора. Некоторые из этих микроскопических капелек, оседая, проникали в пространство между пластинами через

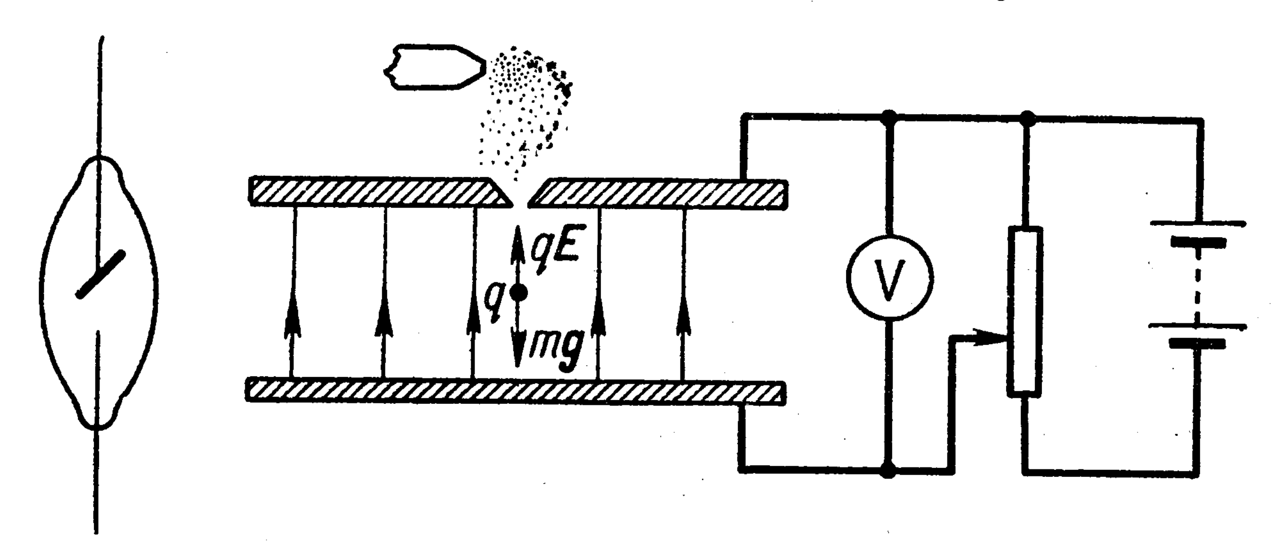


Рис. 1.10.

небольшое отверстие в верхней пластине. Как правило, вследствие трения при разбрызгивании эти капельки приобретали некоторый первоначальный заряд.

В отсутствие электрического поля ($E=0$) капелька под действием силы тяжести начинала ускоренно падать. По мере возрастания скорости падения на нее действовала все большая сила трения о воздух $F_{тр}$, направленная против силы тяжести и уменьшающая ускорение капельки. Микроскопические капельки масла под действием сил поверхностного натяжения принимают строго сферическую форму, и силу трения для них можно рассчитывать по закону Стокса:

$$F_{тр} = 6\pi\eta r v, \tag{3.4}$$

где η — вязкость воздуха, r — радиус капли и v — скорость ее падения.

Зная плотность масла δ, можно выразить массу капли m и ее вес mg через ее радиус:

$$F_{тяж} = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \delta g. \tag{3.5}$$

Спустя весьма короткий промежуток времени сила трения сравнивается с силой тяжести и капля начинает падать равномерно с

постоянной скоростью v_0 такой, что

$$\frac{4}{3}\pi r^3\delta g = 6\pi r\eta v_0. \tag{3.6}$$

Наблюдая за падающей каплей в отсчетный микроскоп (см. рис. 1.11), можно определить ее перемещение за определенный промежуток времени и тем самым найти величину v_0. Из (3.6) тогда находится радиус капли

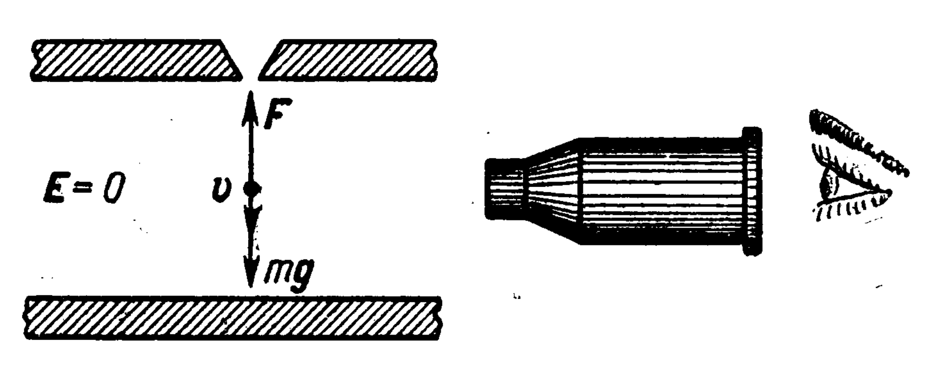


Рис. 1.11.

$$r = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta v_0}{\delta g}} \tag{3.7}$$

и ее вес

$$mg = 6\pi\eta v_0\sqrt{\frac{9}{2}\frac{\eta v_0}{\delta g}}. \tag{3.8}$$

Подбирая напряженность электрического поля E_1, каплю можно остановить и определить находящийся на ней заряд $q_1 = mg/E_1$. Затем включается облучение воздушного промежутка до тех пор, пока капля не приобретет дополнительный положительный или отрицательный заряд и ее равновесие нарушится. Изменяя напряженность электрического поля до некоторого значения E_2, вновь добиваются равновесия капли и определяют ее новый заряд $q_2 = mg/E_2$. Затем вновь включают облучение воздушного промежутка и т. д.

Получив ряд последовательных значений заряда капли q_1, q_2, q_3, ..., Милликен установил, что как сами величины q_i, так и их последовательные разности являются целыми кратными некоторого элементарного заряда e, т. е.

$$q_i = \pm n_i e, \tag{3.9}$$

где n_i — всегда целое число.

Опыты Милликена многократно повторялись, видоизменялись и уточнялись. В результате использования несколько неточных данных о вязкости воздуха и вследствие других мелких погрешностей значение e, полученное Милликеном, оказалось заниженным примерно на 0,6%. Это было установлено окончательно лишь в 30-е годы и повлекло за собой необходимость пересмотра численных значений многих других важнейших физических постоянных. Современное уточненное значение величины элементарного заряда равно

$$e = (4{,}802 \pm 0{,}002)\cdot 10^{-10}\ \text{СГС ед. заряда} = (1{,}601 \pm 0{,}001)\cdot 10^{-19}\ \text{к}. \tag{3.10}$$

Определение числа Авогадро N_0, произведенное Перреном в 1916 г., дало возможность вычислить величину элементарного заряда e другим путем, используя установленные Фарадеем законы

электролиза. При выделении на электродах одного килограмм-атома, т. е. N_0 атомов, одновалентного вещества через раствор проходит вполне определенное количество электричества F. Отношение

$$\frac{F}{N_0}=e \tag{3.11}$$

представляет собой заряд, переносимый одним одновалентным ионом. Измерения дали значение $F=96,5\cdot10^6\,к$, число Авогадро $N_0=6,02\cdot10^{26}$ молекул в килограмм-молекуле. Отсюда для e получается то же значение (3.10).

Изучение строения атомов показало, что атомы состоят из положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и движущихся вокруг ядра отрицательно заряженных электронов. Электроны во всех атомах одинаковы и имеют массу покоя $m_e=9,11\cdot10^{-28}$ *г* и заряд $e=-4,80\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда $=-1,6\cdot10^{-19}$ *к*. Ядра различных атомов имеют разную массу, а их положительный заряд является целым кратным заряду электрона. Наиболее легкое ядро атома водорода, частица, называемая **протоном**, имеет массу $m_p=1,67\cdot10^{-24}$ *г* и заряд $e=+4,80\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда $=+1,6\cdot10^{-19}$ *к*.

Атом в целом электрически нейтрален, суммарный заряд всех его электронов равен по величине и обратен по знаку заряду ядра. Если от атома оторвать один или несколько электронов, то возникает положительно заряженный **ион**. Если к атому присоединяется один или несколько лишних электронов, то возникает отрицательно заряженный ион. Процессы переноса электронов или ионов с одного тела на другое обусловливают электризацию или нейтрализацию этих тел.

Закон сохранения заряда (3.1) представлялся ранее простым следствием неуничтожимости элементарных заряженных частиц — электронов и протонов. Положение, однако, усложнилось в 30-х годах нашего века, когда были открыты новые элементарные частицы — **нейтрон** и **позитрон**. Нейтрон является частицей с массой, близкой к массе протона, $m_n \approx m_p$, и зарядом, равным нулю. Позитрон же представляет собой положительный электрон, т. е. имеет массу $m_e=9,11\cdot10^{-28}$ *г* и заряд $e=+4,80\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда $=+1,6\cdot10^{-19}$ *к*. Одновременно с открытием этих частиц было обнаружено, что все известные частицы способны к взаимным превращениям.

Так, например, при встрече позитрона (e^+) с электроном (e^-) обе частицы превращаются в два нейтральных фотона жестких γ-лучей:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma. \tag{3.12}$$

Нейтрон (n), находящийся в свободном состоянии, в среднем через 12 минут распадается на 3 частицы: положительно заряженный протон (p^+), отрицательно заряженный электрон и нейтральную частицу малой массы, получившую название **антинейтрино** ($\tilde{\nu}$):

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \tilde{\nu}. \tag{3.13}$$

Указанные процессы превращения одних элементарных частиц в другие могут протекать и в обратном направлении. Например, достаточно жесткий

электрически нейтральный γ-квант вблизи тяжелого ядра может превращаться в пару противоположно заряженных частиц — электрон и позитрон:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+. \qquad (3.14)$$

Ядра атомов состоят из протонов и нейтронов, которые способны при определенных условиях превращаться друг в друга как по реакции (3.13), так и в противоположном направлении, по реакции

$$p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu, \qquad (3.15)$$

где ν — нейтрино, причем тяжелые частицы остаются внутри ядра, а легкие (электрон, позитрон, нейтрино и антинейтрино) вылетают за пределы атома.

Наконец, наряду с относительно тяжелыми ядерными частицами (нейтрон, протон) и легкими (электрон, позитрон, нейтрино, антинейтрино) в последние годы был обнаружен целый ряд неустойчивых частиц с различными массами, как промежуточными между массой электрона и массой протона (мезоны), так и с массами больше массы протона (гипероны). Существуют положительные, отрицательные и нейтральные мезоны и гипероны, причем электрически заряженные мезоны и гипероны имеют заряд, в точности равный элементарному заряду $e = \pm\ 4{,}80 \cdot 10^{-10}$ СГС ед. заряда.

При взаимных превращениях различных элементарных частиц, примерами которых являются написанные выше реакции (3.12) — (3.15), происходит возникновение и исчезновение отдельных элементарных зарядов. Однако и в этих случаях, как при макроскопических процессах разделения зарядов, *алгебраическая сумма зарядов исчезающих частиц равна алгебраической сумме зарядов возникающих частиц.*

Таким образом, *закон сохранения электрического заряда является совершенно универсальным*, справедливым при всех макроскопических и микроскопических процессах. Сам же электрический заряд является одним из свойств элементарных частиц, у которых он может принимать лишь одно из трех значений:

$$e = \begin{cases} +4{,}80 \cdot 10^{-10} \text{ СГС ед. заряда,} \\ 0, \\ -4{,}80 \cdot 10^{-10} \text{ СГС ед. заряда.} \end{cases} \qquad (3.16)$$

§ 4. Электрическое поле в диэлектрике. Свободные и связанные заряды

Рассмотрим причины того, что наличие непроводящего вещества между электрическими зарядами уменьшает их взаимодействие, т. е. что напряженность электрического поля в среде оказывается меньшей, чем в вакууме.

Все тела (твердые, жидкие и газообразные) состоят из атомов и молекул. Последние представляют сложные системы электрических зарядов, хотя в целом электрически нейтральны. В некоторых телах часть микроскопических зарядов может свободно перемещаться

через все тело. Такие тела способны проводить электрический ток и называются проводниками электричества. В других телах свободные заряды отсутствуют, и все микроскопические заряды тесно связаны друг с другом и движутся вполне определенным образом. Такие тела не проводят электрического тока и называются диэлектриками, или изоляторами.

Подробнее к вопросу о свойствах проводников и диэлектриков и количественным закономерностям электрического поля в различных телах мы обратимся в следующих параграфах. Здесь же остановимся лишь на некоторых общих понятиях и явлениях.

Элементарные микроскопические заряды имеют величину $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ СГС ед. заряда $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*. При размерах атома $r \sim 10^{-10}$ *м* напряженность электрического поля внутри атома в соответствии с (2.4а) имеет огромную величину, порядка

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{-20}} 9 \cdot 10^9 = 1{,}5 \cdot 10^{11} \, в/м$$

во много раз превышающую достижимые в технике макроскопические поля, имеющие порядок 10^7 *в/м*.

Однако в целом диэлектрик нейтрален. В любом макроскопическом объеме, большом по сравнению с атомными размерами, суммарные величины всех положительных и отрицательных элементарных зарядов равны друг другу и их электрические поля в значительной степени взаимно компенсируются, весьма быстро убывая за пределами вещества.

Строго говоря, в точной микроскопической теории любое нейтральное вещество представляет собой огромное множество заряженных частиц, движущихся в вакууме. Истинное электрическое поле $\mathbf{E}_{ист}$, создаваемое этими зарядами, весьма резко меняется от точки к точке и быстро колеблется с течением времени вследствие их движения.

Если поместить внутрь диэлектрика макроскопически малое (но большое по сравнению с атомными размерами) заряженное тело, то суммарная действующая на него сила будет определяться средним значением $\mathbf{E}_{ист}$ по всей макроскопически малой области, занимаемой телом. Благодаря большой (по сравнению с электронами и атомами) инертности макроскопически малого заряда очень быстрые колебания истинного поля не будут успевать сказываться на движении последнего. Воздействие поля на этот заряд будет определяться средним значением $\mathbf{E}_{ист}$ за макроскопически малый промежуток времени, достаточно большой по сравнению с периодами колебаний микроскопических зарядов.

Следовательно, макроскопическое поле $\mathbf{E}'$, действующее на макроскопически малый заряд q', есть среднее от истинного

микроскопического поля $\mathbf{E}_{\text{ист}}$:

$$\overline{\mathbf{E}}_{\text{ист}} = \mathbf{E}'. \tag{4.1}$$

При отсутствии внешнего поля $\overline{\mathbf{E}}_{\text{ист}} = 0$.

Внешнее поле $\mathbf{E}_0$ вызывает смещение микроскопических зарядов и появление поля $\overline{\mathbf{E}}_{\text{ист}} = \mathbf{E}'$. Следовательно, заряд в диэлектрике будет находиться под действием поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$, отличного от поля $\mathbf{E}_0$. Это обстоятельство и учитывается введением диэлектрической проницаемости в закон Кулона.

Поместим пластину из диэлектрика во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, перпендикулярное к пластине, как это изображено на рис. 1.12. Выделим мысленно макроскопически малый объем v внутри пластины. Под действием внешнего поля $\mathbf{E}_0$ микроскопические заряды в объеме v начнут смещаться: положительные по полю, а отрицательные — против поля (см. рис. 1.12). Микроскопические заряды, составляющие диэлектрик, связаны и удерживаются друг около друга весьма большими внутренними силами, величина которых, как подсчитывалось выше, во много раз превышает внешнее поле E_0. Поэтому смещение зарядов внутри диэлектрика (так называемая поляризация диэлектрика) будет невелико, но тем значительнее, чем больше приложенное внешнее поле $\mathbf{E}_0$.

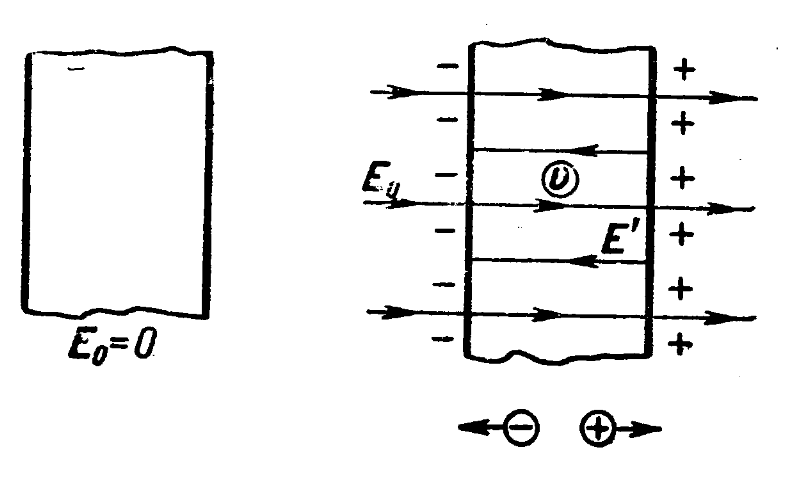


Рис. 1.12.

При равномерном смещении всех зарядов суммарный заряд любого макроскопически малого элемента объема диэлектрика не изменится, т. е. останется равным нулю.

Подобная компенсация, однако, не будет иметь места на границах диэлектрика. Как видно из рис. 1.12, на правой границе диэлектрика возникает избыток положительного, а на левой границе — избыток отрицательного заряда. Эти поверхностные заряды создают внутри диэлектрика дополнительное макроскопическое поле $\mathbf{E}'$, линии которого направлены от плюса к минусу, т. е. против линий внешнего поля $\mathbf{E}_0$. Таким образом, результирующее электрическое поле внутри диэлектрика $\mathbf{E}$ по величине будет равно разности

$$E = E_0 - E' < E_0 \tag{4.2}$$

и уменьшается по сравнению с тем полем E_0, которое было бы в данном месте в отсутствие диэлектрика.

Количественные закономерности, связывающие E' и E с E_0, будут разобраны ниже, в § 10. Здесь же ограничимся простыми

качественными соображениями. Очевидно, чем сильнее внешнее поле E_0, тем сильнее будут смещаться микроскопические заряды внутри диэлектрика и тем больше избыточных связанных зарядов появится на обеих поверхностях диэлектрической пластины. Будем считать, что величина этих зарядов пропорциональна полю E_0. Поскольку создаваемое ими дополнительное поле E' в свою очередь пропорционально величине этих зарядов (как это видно из разобранных выше примеров (2.2) и (2.13)), то должна соблюдаться пропорциональность

$$E' \sim E_0 \quad \text{и} \quad E = E_0 - E' \sim E_0. \tag{4.3}$$

Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности, можно последнее соотношение записать в виде равенства

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}, \tag{4.4}$$

откуда, учитывая (4.2), заключаем, что величина ε должна быть больше единицы.

Именно это ослабленное поле и будет действовать на пробный заряд q', помещенный в данную точку диэлектрика. Согласно (2.6) $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ при $q' = +1$, т. е. вектор напряженности электрического поля в данной точке численно равен силе, действующей на единичный пробный точечный положительный заряд, помещаемый в эту точку. Слово «точечный» при этом следует понимать макроскопически: пробный заряд должен быть мал по сравнению с расстояниями до других макроскопических зарядов, создающих внешнее поле $\mathbf{E}_0$, но, с другой стороны, должен быть достаточно велик по сравнению с атомными размерами, так чтобы на него оказывало воздействие не истинное резко меняющееся микроскопическое поле $\mathbf{E}_{ист}$, а усредненное макроскопическое поле $\mathbf{E}'$.

Таким образом, диэлектрик в электрическом поле поляризуется и создает дополнительное поле $\mathbf{E}'$, источниками которого являются связанные с диэлектриком микроскопические заряды разных знаков, смещенные в разные стороны и, следовательно, частично разделенные. В приведенном выше примере диэлектрической пластины в однородном внешнем поле связанные заряды концентрируются на ее границах. В более общем случае неоднородных полей и диэлектриков сложной конфигурации поляризация соседних объемов диэлектрика будет различной и связанные заряды будут распределяться не только по поверхности, но и по объему диэлектрика.

ГЛАВА II

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

§ 5. Вектор электростатической индукции. Поток индукции

Основной прикладной задачей электростатики является расчет электрических полей, создаваемых в различных приборах и аппаратах (конденсаторы, кабели, электровакуумные приборы и т. д.). В общем виде эта задача решается с помощью закона Кулона и принципа наложения при использовании формул (2.2) и (2.7). Однако уже разобранный в § 2 простейший пример поля двух точечных зарядов (постоянный диполь) иллюстрирует сложность вычисления этим путем распределения значений вектора **E** в пространстве. При наличии большого числа точечных или пространственно распределенных зарядов эта задача сводится к сложному суммированию или интегрированию.

Еще бóльшие трудности вызывает расчет электрических полей при наличии в пространстве диэлектриков или проводников, внутри которых под действием внешнего поля $\mathbf{E}_0$ происходит смещение и перераспределение микроскопических зарядов, создающих свое дополнительное поле $\mathbf{E}'$.

Поэтому для практического решения основных задач электростатики был разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов, использующих подчас весьма сложный математический аппарат. Мы рассмотрим лишь один из простейших методов, основанный на применении теоремы Остроградского—Гаусса (называемой в электротехнике просто теоремой Гаусса). Для вывода ее придется предварительно ввести ряд важных вспомогательных понятий, таких как вектор электростатической индукции и поток этого вектора. Существенную роль для понимания физических свойств поля играют вводимые в данной главе понятия потенциальной энергии и электрического потенциала поля.

В местах появления положительных связанных зарядов будут возникать новые линии суммарного вектора напряженности электри-

ческого поля **E**, а в местах появления отрицательных связанных зарядов эти линии будут исчезать. Вследствие этого при переходе через границу диэлектрика напряженность электрического поля **E** и характеризующая ее густота линий поля изменяются скачком. Еще сложнее будет выглядеть картина линий поля в случае, когда связанные заряды распределены в диэлектрике непрерывно (что будет иметь место в неоднородном поле и в случае диэлектрика произвольной формы).

Рассмотрим простейший пример. На рис. 1.13 изображен случай, когда точечный заряд q помещен в центре сферической полости внутри безграничного диэлектрика. Внутри полости вакуум, $\varepsilon = 1$ и

$$\mathbf{E}_{\text{в}} = \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (5.1)$$

В диэлектрике $\varepsilon > 1$ и

$$\mathbf{E}_{\text{д}} = k_0 \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (5.2)$$

На границе полости с диэлектриком концентрируются связанные отрицательные заряды, напряженность поля уменьшается в ε раз и соответственно скачком уменьшается густота силовых линий.

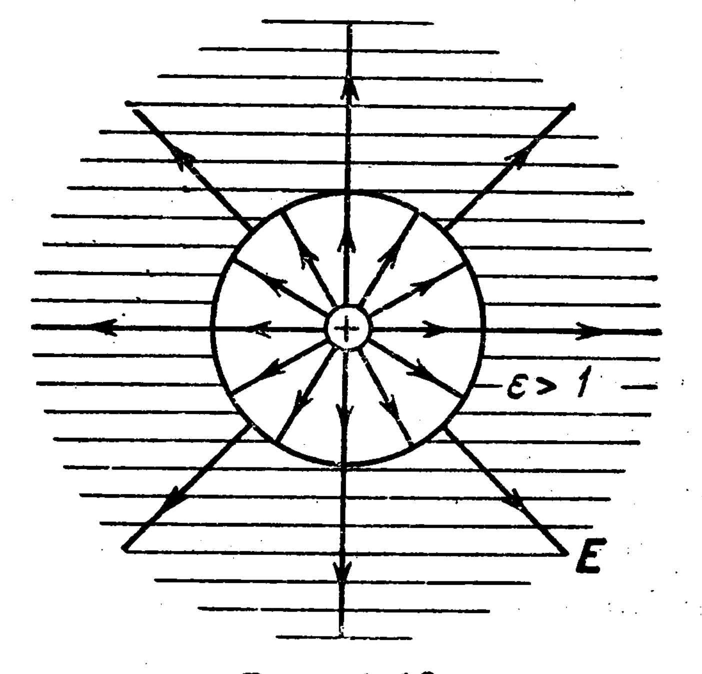


Рис. 1.13.

Скачкообразное изменение вектора напряженности электрического поля и числа линий напряженности на границах диэлектриков создает ряд неудобств при расчете электрических полей. Поэтому вводят вспомогательное векторное поле

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \qquad (5.3)$$

Вектор **D**, равный произведению вектора напряженности электрического поля на абсолютную диэлектрическую проницаемость среды в данной точке, носит название в е к т о р а   э л е к т р о с т а т и ч е с к о й   и н д у к ц и и (иногда — в е к т о р а   э л е к т р и ч е с к о г о   с м е щ е н и я).

В гауссовой системе единиц $\varepsilon_0 = 1$ и **D** и **E** имеют одинаковые размерности. Для вакуума $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. В системе СИ размерности D и E различны, в вакууме **D** и **E** не совпадают. Это обстоятельство является существенным недостатком системы единиц СИ, обусловленным введением отличной от единицы и размерной величины ε_0.

Подставляя (5.1) и (5.2) в (5.3), легко убедиться, что в рассмотренном выше примере вектор электростатической индукции точечного заряда и в полости, и в диэлектрике выражается одной и той же формулой:

$$\mathbf{D}_{\text{т. з.}} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (5.4)$$

В системе Гаусса абсолютная диэлектрическая проницаемость ε_a есть величина безразмерная ($\varepsilon_0=1$ и $\varepsilon_a=\varepsilon$) и вектор **D** согласно (5.3) имеет ту же размерность, что и **E**, а в пустоте ($\varepsilon=1$) оба эти вектора тождественно равны друг другу. В этой системе $k_0=1$ и вектор электростатической индукции точечного заряда равен

$$\mathbf{D}_{\text{т.з.}}=\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\ \text{СГС ед. индукции.} \tag{5.4а}$$

В системе СИ и численные значения, и размерности векторов **D** и **E** различны (даже в пустоте, что является большим неудобством системы СИ). Размерность вектора **D** в этой системе будет

$$[D]=[\varepsilon_0][E]=\frac{к^2}{н\cdot м^2}\frac{н}{к}=\frac{к}{м^2}.$$

В системе СИ $k_0=1/4\pi$ и вектор электростатической индукции точечного заряда равен

$$\mathbf{D}_{\text{т.з.}}=\frac{q}{4\pi r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\ \frac{к}{м^2}. \tag{5.4б}$$

Из определения (5.3) и равенства (2.7) следует, что для поля вектора **D** имеет место принцип суперпозиции, как и для поля **E**:

$$\mathbf{D}=\sum_i \mathbf{D}_i, \tag{5.5}$$

т. е. вектор электростатической индукции, создаваемый в данной точке поля системой электрических зарядов, равен геометрической сумме векторов индукции, создаваемых в той же точке каждым из зарядов в отдельности.

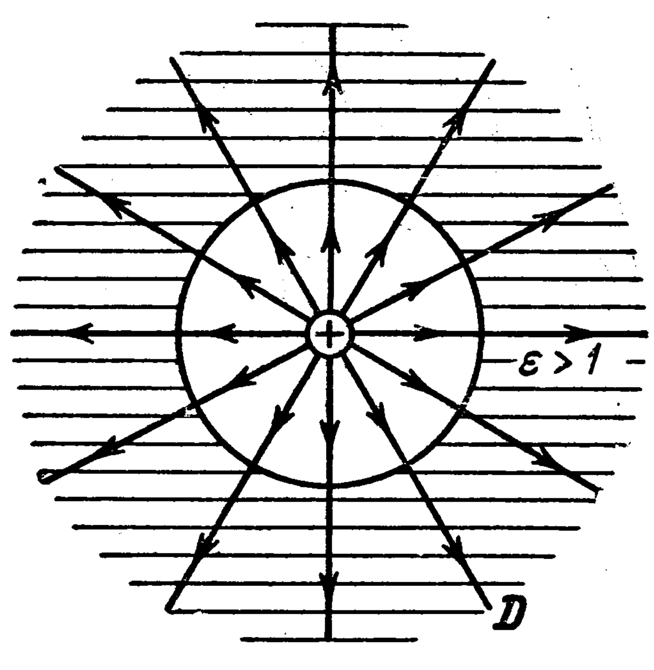
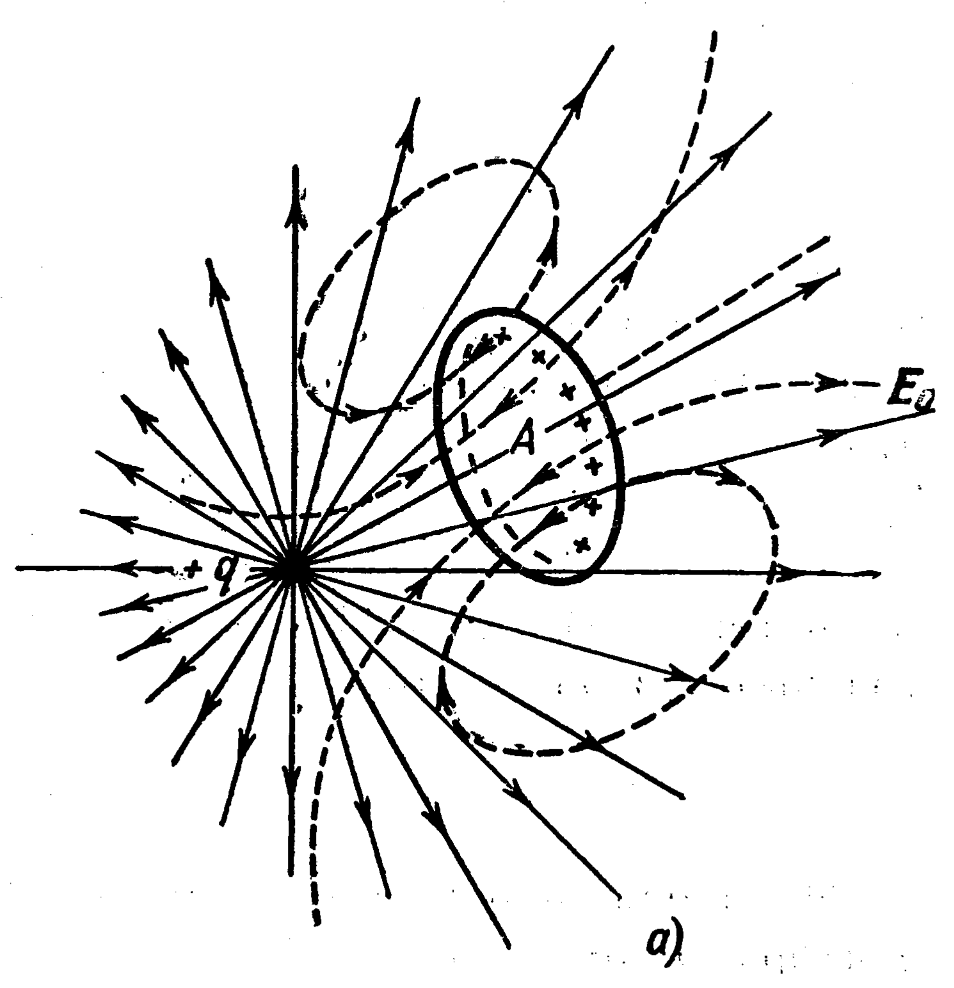


Рис. 1.14.

Поле **D** графически изображается линиями индукции точно так же, как и поле **E**. Линии индукции проводят так, чтобы в каждой точке их направление совпадало с направлением вектора **D** в этой же точке, а число линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к ним, равнялось бы численному значению D в данном месте.

Общая картина поля **D** оказывается более простой, чем поля **E**. Для рассмотренного выше (рис. 1.13) примера заряда в центре полости, согласно (5.4) линии вектора **D** пойдут непрерывно, как это изображено на рис. 1.14. Сопоставляя рис. 1.13 и рис. 1.14, можно видеть основное различие между полями **E** и **D**. Линии вектора **E** начинаются (и кончаются) на л ю б ы х как свободных, так и связан-

ных зарядах, и поэтому на границе диэлектрика густота этих линий изменяется скачком. В отличие от этого, линии вектора **D** начинаются (и кончаются) только на свободных зарядах, и на границе диэлектрика их густота остается неизменной.



Если бы в рассмотренном примере диэлектрик вовсе отсутствовал, то для точечного заряда в пустоте ($\varepsilon = 1$) напряженность электрического поля была бы равна

$$\mathbf{E}_0 = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (5.6)$$

Сопоставляя (5.4) с (5.6), мы видим, что

$$\mathbf{D}_{\text{т. з.}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \qquad (5.7)$$

т. е. при наличии диэлектрика вектор **D** с точностью до постоянного множителя ε_0 (зависящего от выбора системы единиц) совпадает с вектором напряженности электрического

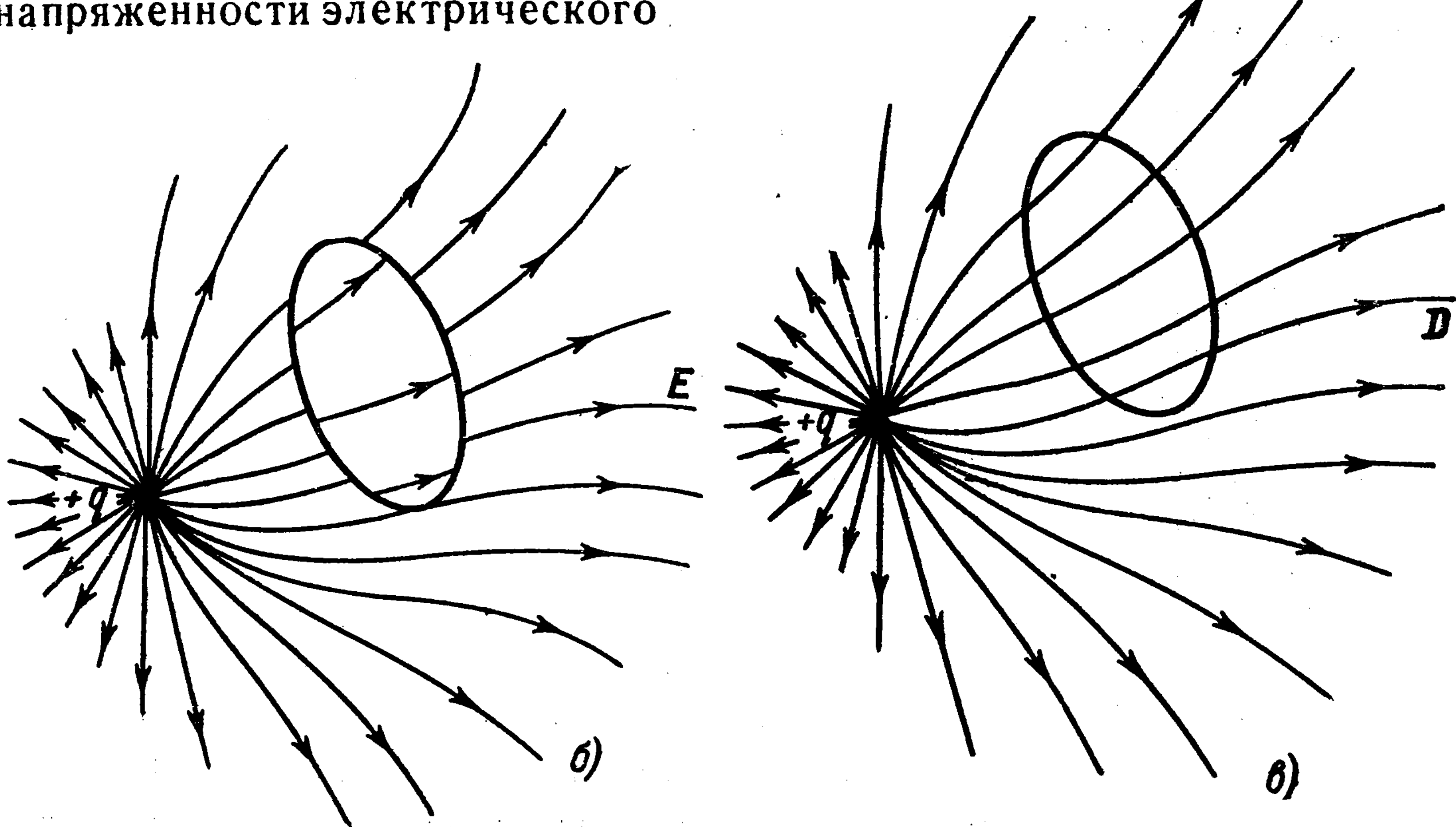


Рис. 1.15.

поля $\mathbf{E}_0$ в отсутствие диэлектрика. Правда, соотношение (5.7) выполняется лишь в самых простейших случаях. В общем случае диэлектрика произвольной формы характер распределения линий вектора

$\mathbf{D}$ может весьма существенно отличаться от картины поля $\mathbf{E}_0$. На рис. 1.14 было показано сферически симметричное поле $\mathbf{E}_0$ точечного заряда $+q$ в вакууме. Поместим в это поле диэлектрик A произвольной формы. Тогда на поверхности диэлектрика, ближайшей к заряду q, сконцентрируются отрицательные связанные заряды, а на противоположной границе — положительные заряды, как это изображено на рис. 1.15, *а*. Эти заряды создадут дополнительное довольно сложное поле $\mathbf{E}'$, линии которого показаны пунктиром. Полное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ будет отличаться от поля $\mathbf{E}_0$ особенно сильно внутри диэлектрика, но и вне диэлектрика линии $\mathbf{E}$ перестанут быть сферически симметричными и примут вид, изображенный на рис. 1.15, *б*.

Умножая вектор $\mathbf{E}$ на ε_a, мы получим вектор $\mathbf{D}$, линии которого изображены на рис. 1.15, *в*. Вне диэлектрика $\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 1$ (в системе Гаусса) и линии $\mathbf{D}$ пойдут так же, как и линии $\mathbf{E}$ на рис. 1.15, *б*. Внутри диэлектрика $\varepsilon = \varepsilon_a > 1$, линии $\mathbf{D}$ направлены так же, как и $\mathbf{E}$, но густота их возрастает так, что на границах диэлектрика количество линий индукции не изменяется. Сопоставляя рис. 1.15, *в* и *а*, мы видим, что в этом случае линии вектора $\mathbf{D}$ существенно отличаются от линий вектора $\mathbf{E}_0$, т. е. $\mathbf{D} \neq \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$.

Непрерывность линий индукции значительно облегчает вычисление вектора $\mathbf{D}$ при заданном распределении свободных зарядов. После того же, как будет найдено распределение значений вспомогательного вектора $\mathbf{D}$ во всех точках пространства, можно найти искомые величины вектора напряженности электрического поля с помощью простого деления на соответствующие значения диэлектрической проницаемости:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_a}. \qquad (5.8)$$

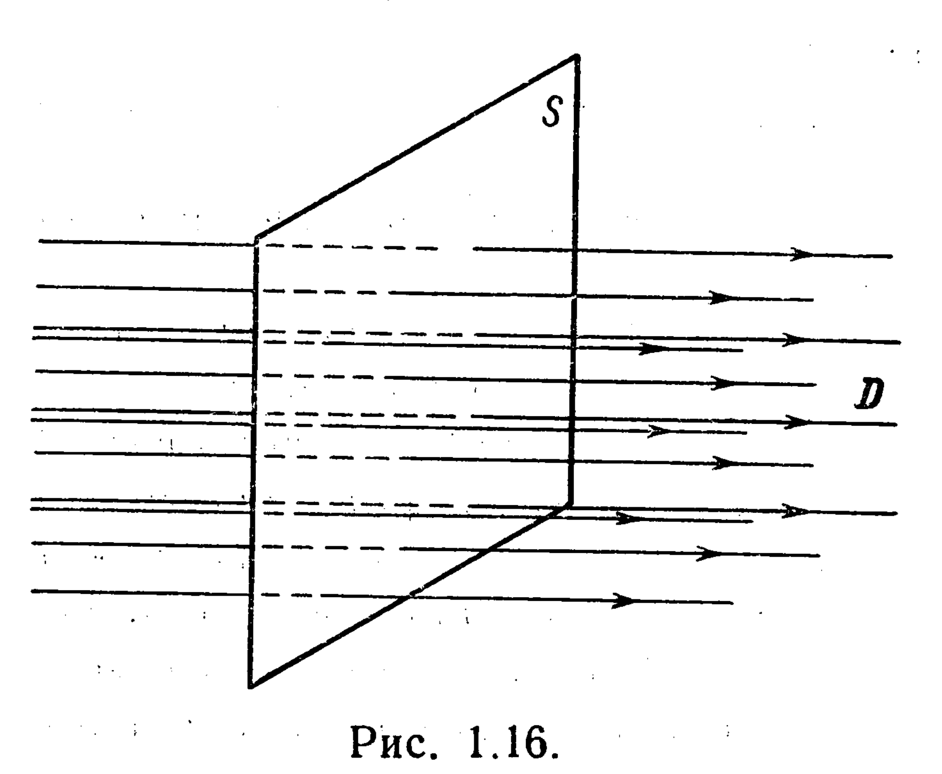


Рис. 1.16.

Для вывода основного уравнения, связывающего поле вектора $\mathbf{D}$ с распределением свободных зарядов (см. ниже, § 6), введем предварительно еще одну вспомогательную величину — поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность.

Рассмотрим простейший случай однородного поля, в котором $\mathbf{D} = \text{const}$, т. е. вектор индукции повсюду одинаков и по величине, и по направлению. В этом случае все линии индукции прямые и идут параллельно на одинаковом расстоянии друг от друга (см. рис. 1.16). Построим площадку S произвольной формы, перпендикулярную линиям вектора $\mathbf{D}$, и определим поток индукции через

нее как произведение D на S:

$$N = DS. \tag{5.9}$$

Поскольку через единицу площади проходят D линий индукции, то величина N численно равна полному числу линий индукции, пронизывающих эту площадку. Проведем теперь площадку S наклонно к линиям индукции (см. рис. 1.17). Ориентация площадки в пространстве характеризуется перпендикулярным к ней вектором нормали **n**. При этом сторона площадки, из которой выходит нормаль **n**, называется положительной, а противоположная сторона— отрицательной *). Угол α между направлением вектора индукции и нормалью **n** к площадке может изменяться от 0 до 180°. Для нахождения числа N линий индукции, проходящих через эту площадку, спроектируем последнюю на плоскость, перпендикулярную вектору **D**. Из рис. 1.17 видно, что через площадку S и ее проекцию $S_{\text{пр}}$ проходит одинаковое число линий индукции, равное

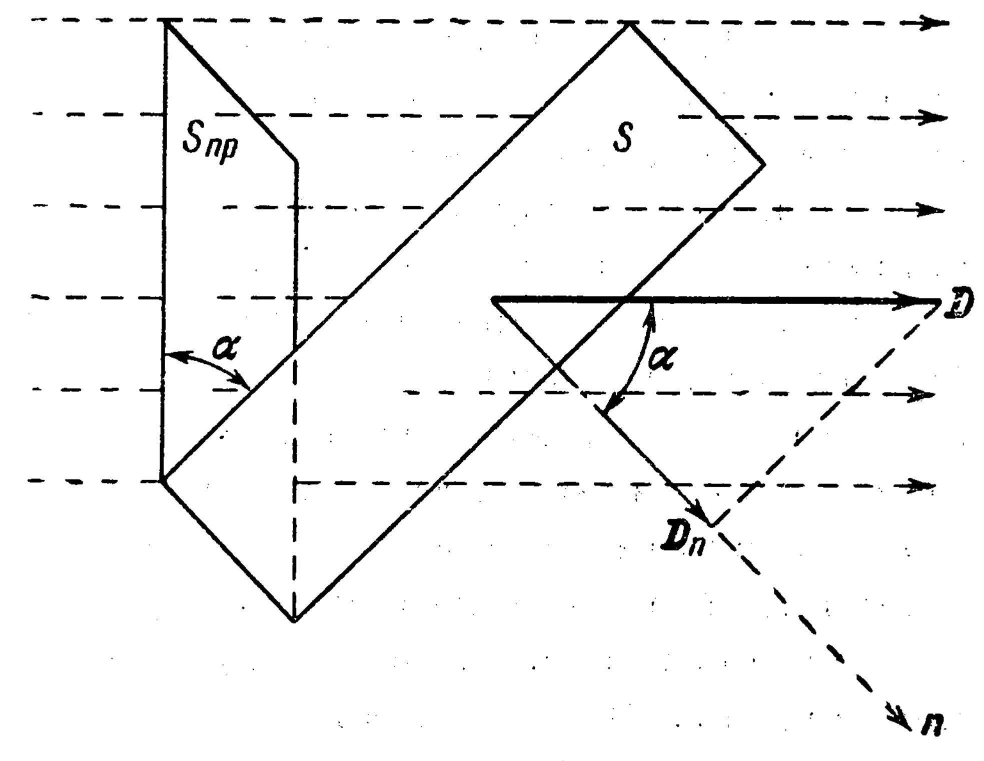


Рис. 1.17.

$$N = DS_{\text{пр}} = DS\cos\alpha = D_nS, \tag{5.10}$$

где $D_n = D\cos\alpha$ — проекция вектора индукции на направление нормали к площадке.

Величина N, определяемая формулой (5.10), называется **потоком вектора электростатической индукции** (или потоком вектора электрического смещения) через площадку S. Термин **поток** заимствован из гидродинамики: определяемый аналогично (5.10) поток вектора скорости численно равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через данную площадку.

Поток индукции есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным. При $\alpha < 90°$ линии индукции направлены по отношению к площадке в ту же сторону, как и вектор **n**, **выходят** из ее положительной стороны, и, следовательно, $N > 0$ (см. рис. 1.18, *а*).

*) Выбор положительного направления нормали условен. Если площадка ограничивает некоторый объем, то нормаль **n** направляют обычно наружу по отношению к этому объему.

При $\alpha > 90°$ линии индукции входят в положительную сторону площадки и $N < 0$ (см. рис. 1.18, *б*). Наконец, при $\alpha = 90°$ $\cos\alpha = 0$ и $N = 0$, так как линии индукции в этом случае скользят вдоль площадки и не пересекают последнюю (см. рис. 1.18, *в*).

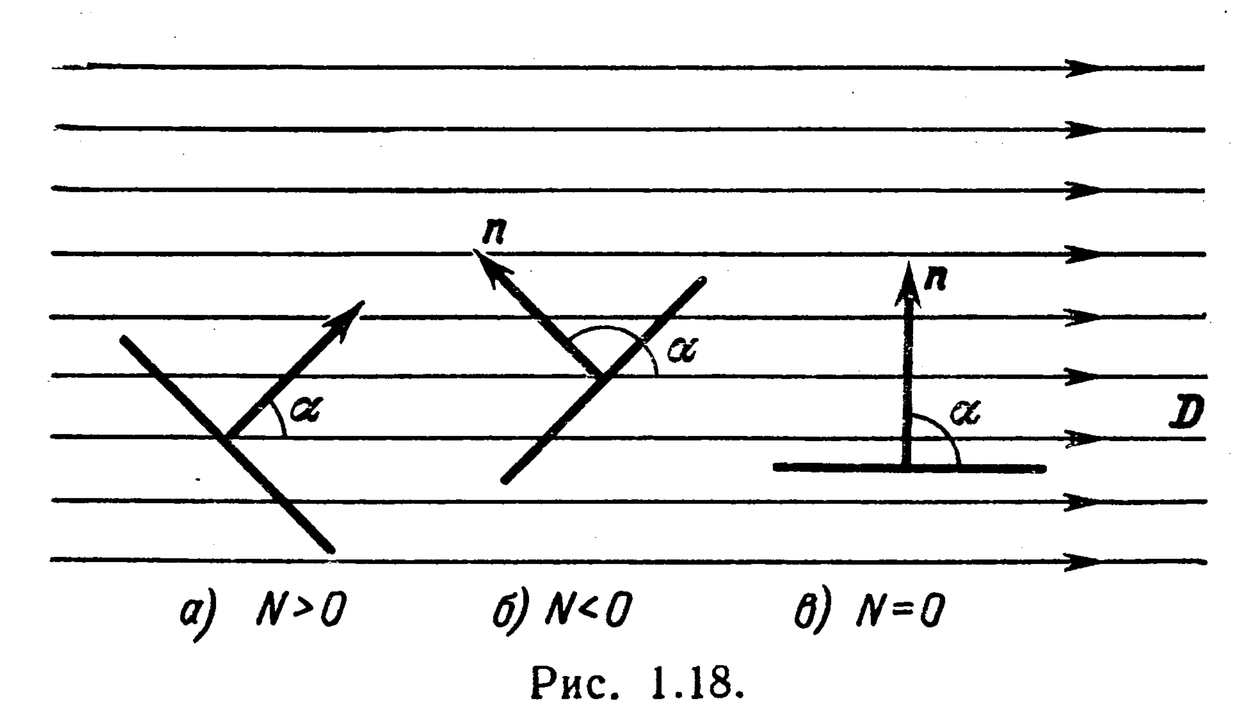


Рис. 1.18.

В общем случае неоднородного поля ($\mathbf{D} \neq \text{const}$) и произвольной неплоской поверхности S ($\mathbf{n} \neq \text{const}$) для нахождения полного потока вектора электростатической индукции N через площадку ее следует мысленно разбить на отдельные бесконечно малые площадки ΔS (см. рис. 1.19). Считая каждую такую площадку практически плоской и поле в ее пределах практически постоянным, можно по формуле (5.10) вычислить поток линий индукции, проходящих через эту площадку:

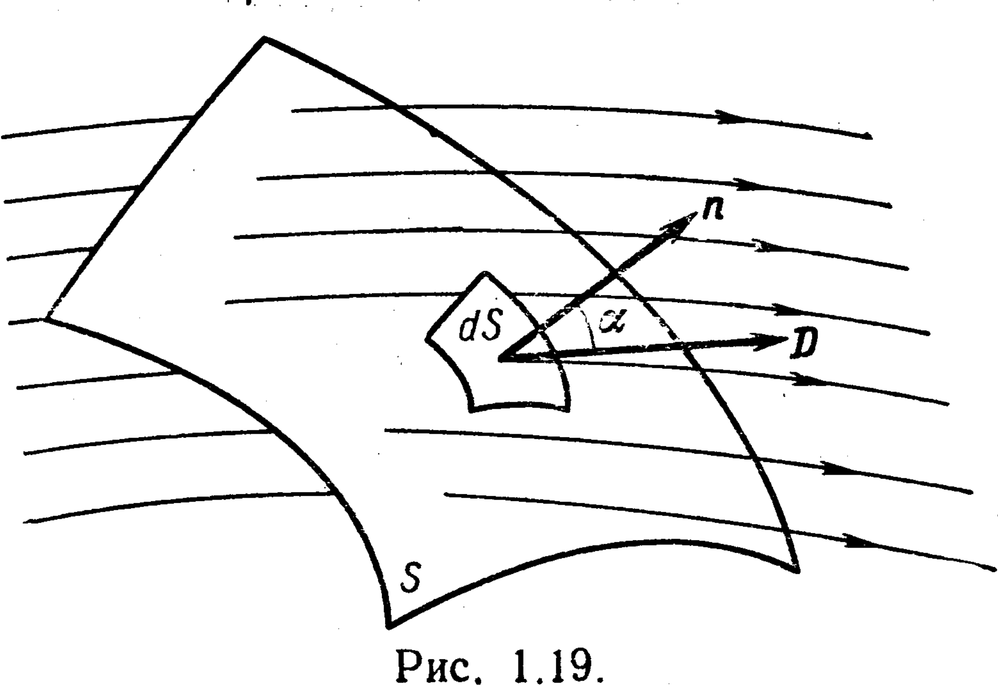


Рис. 1.19.

$$\Delta N = D\cos\alpha\,\Delta S = D_n \Delta S. \qquad (5.11)$$

Суммируя элементарные потоки ΔN, проходящие через каждый участок поверхности ΔS, по всем таким элементарным участкам, мы найдем полное число линий индукции N, пронизывающих поверхность S:

$$N = \sum_{(S)} D\cos\alpha\,\Delta S. \qquad (5.12)$$

В пределе эта сумма заменится соответствующим интегралом по поверхности:

$$N = \int_{(S)} D\cos\alpha\,dS = \int_{(S)} D_n\,dS. \qquad (5.13)$$

Из (5.12) и (5.4) следует, что поток вектора электростатической индукции N имеет размерность электрического заряда и в системе единиц СИ измеряется в кулонах.

Если поле создается системой электрических зарядов q_i ($i=1$, 2, 3, ...), то по принципу наложения (5.5) вектор электростатической индукции $\mathbf{D}$ в любой точке поля равен геометрической сумме векторов $\mathbf{D}_i$, создаваемых каждым i-м зарядом в этой точке. Проекция геометрической суммы векторов на любое направление (в том числе и на направление нормали к площадке $\mathbf{n}$) равна алгебраической сумме проекций всех этих векторов на то же направление. Согласно (5.12) поток N пропорционален величинам D_n. Поэтому для произвольной поверхности S поток вектора электростатической индукции N, создаваемый системой электрических зарядов, равен алгебраической сумме потоков индукции N_i, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$N=\sum_i N_i. \tag{5.14}$$

§ 6. Теорема Гаусса

Закон Кулона в форме (2.2) и правило наложения электрических полей (2.7) в принципе позволяют рассчитать поле, создаваемое любой системой точечных зарядов. В случае непрерывного распределения заряда в пространстве суммирование в (2.7) следует заменить соответствующим интегрированием. Практически, однако, вычисление соответствующих сумм и интегралов часто представляет собой весьма трудоемкую математическую задачу. Поэтому был разработан целый ряд вспомогательных методов и приемов, упрощающих вычисление. Одним из таких практически важных и простых методов является применение теоремы Гаусса, краткий вывод которой мы приведем ниже. Эта теорема позволяет найти поток вектора электростатической индукции через замкнутую поверхность, внутри которой находятся электрические заряды.

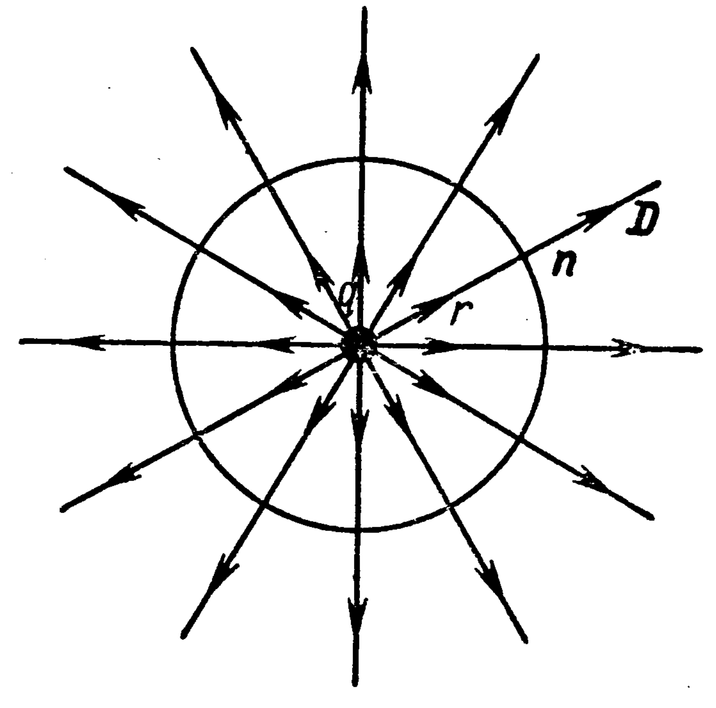


Рис. 1.20.

Рассмотрим сначала один точечный заряд q, помещенный в центре сферы произвольного радиуса r (см. рис. 1.20), и вычислим полный поток индукции N, проходящий через всю поверхность этой сферы наружу. Из (5.4) следует, что в этом случае численное значение вектора $\mathbf{D}$ на всей сфере S ($r=\text{const}$) одинаково

и равно

$$D_{\text{т.з.}} = k_0 \frac{q}{r^2}. \qquad (6.1)$$

Кроме того, направление вектора **D** при этом в каждой точке совпадает с направлением внешней нормали к сфере. Тогда входящий в формулу (5.12) $\cos\alpha = \cos 0° = 1$. Поэтому полный поток индукции через нашу сферу равен

$$N = \sum D\Delta S \cdot 1 = D \sum \Delta S = k_0 \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = k_0 \cdot 4\pi q, \qquad (6.2)$$

так как полная поверхность сферы $S = 4\pi r^2$.

Из (6.2) следует, что поток индукции, создаваемый точечным зарядом, для сферы любого радиуса с центром в источнике поля одинаков и численно равен $k_0 \cdot 4\pi q$. Проведя две такие концентрические сферы радиусами r_1 и r_2 (см. рис. 1.21), мы видим, что число линий индукции N, пронизывающих обе сферы, одинаково. Между этими сферами линии индукции идут непрерывно, нигде не заканчиваясь и не возникая вновь. Поэтому, если мы проведем между этими двумя сферами з а м к н у т у ю поверхность S_1 произвольной формы, тоже о х в а т ы в а ю щ у ю наш точечный заряд q, то полное число линий индукции N через эту поверхность будет также равно $k_0 \cdot 4\pi q$.

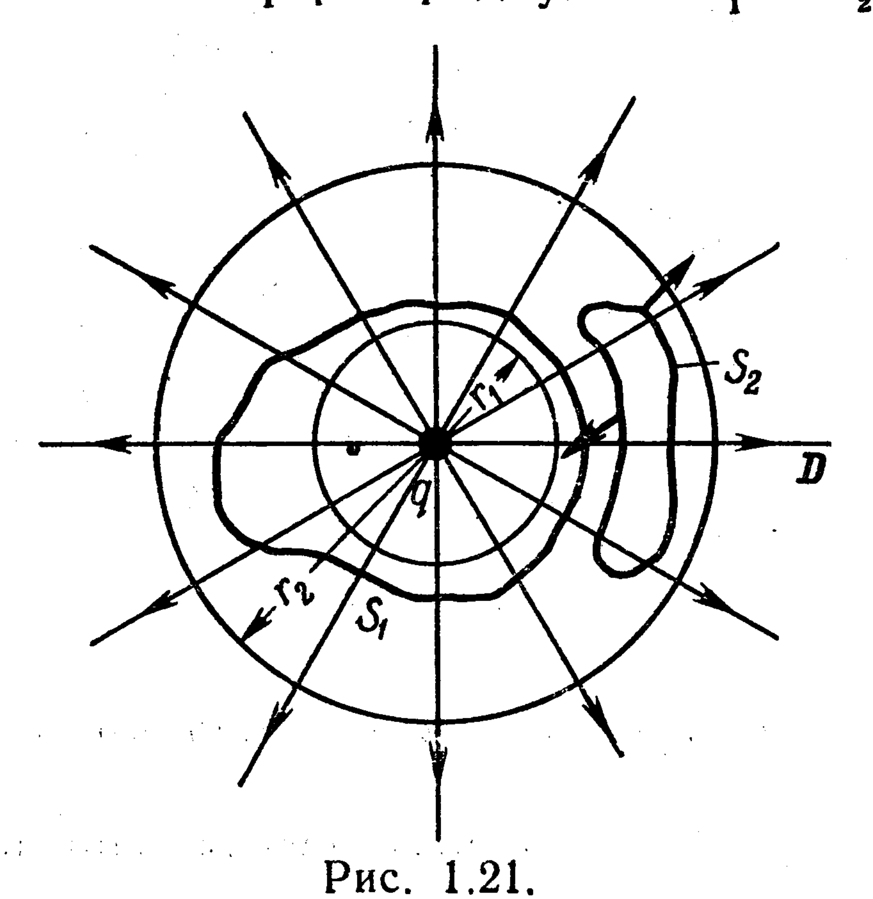


Рис. 1.21.

При вычислении потока через замкнутую поверхность, так же как и в случае сферы, вектор нормали **n** следует считать направленным по отношению к поверхности наружу. Линии индукции, выходящие из объема, ограниченного данной поверхностью, создают положительный поток, линии же, входящие в объем,— отрицательный поток.

Если между нашими сферами с произвольными радиусами расположить з а м к н у т у ю поверхность S_2, н е о х в а т ы в а ю щ у ю заряда q, то, как видно из рис. 1.21, каждая линия индукции будет пересекать эту поверхность дважды, один раз с положительной стороны (войдет в поверхность), а другой раз с отрицательной стороны (выйдет из поверхности). Поэтому алгебраическая сумма линий индукции, проходящих через замкнутую поверхность S_2, т. е. полный поток индукции N через эту поверхность, будет равна нулю.

Таким образом, для одного точечного заряда q полный поток индукции через любую замкнутую поверхность S будет равен

$$\left.\begin{array}{ll} N=k_0\cdot 4\pi q, & \text{если заряд расположен внутри замкнутой поверхности;} \\ N=0, & \text{если заряд расположен вне замкнутой поверхности,} \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

и результат этот от формы поверхности не зависит.

В соответствии с (5.14) в общем случае электрического поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов (см. рис. 1.22), полный поток индукции, проходящий через замкнутую поверхность S, равен

$$N=\sum_j N_j=k_0\cdot 4\pi\sum_i q_i, \tag{6.4}$$

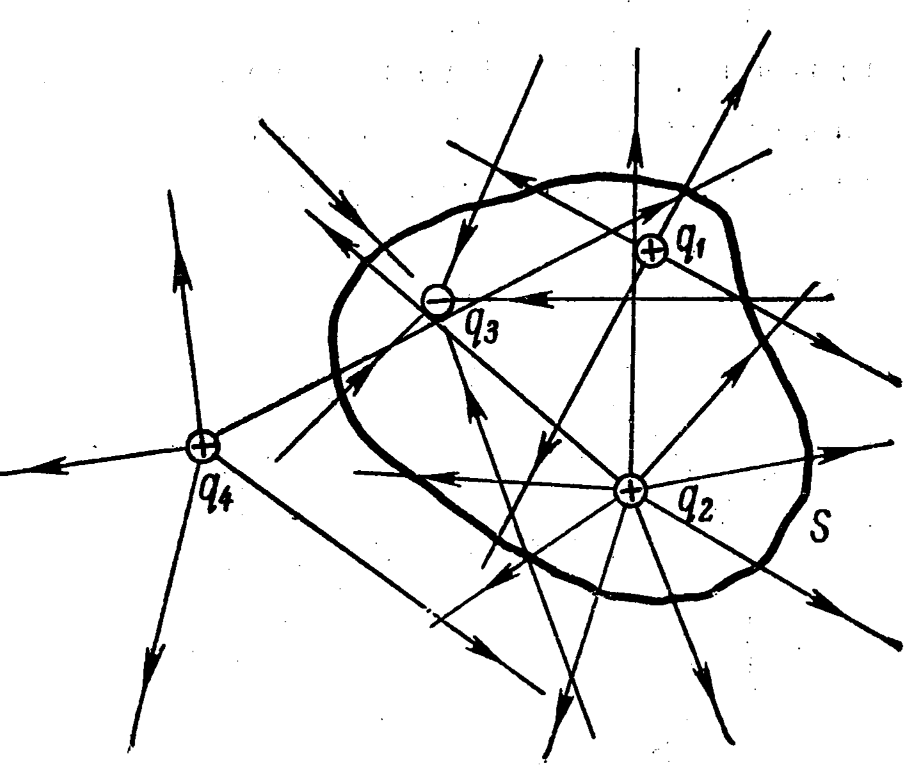


Рис. 1.22.

где окончательное суммирование распространяется только на заряды, расположенные внутри этой поверхности. Отсюда получается окончательная формулировка теоремы Гаусса: *поток вектора электростатической индукции через любую замкнутую поверхность численно равен алгебраической сумме находящихся внутри этой поверхности зарядов, умноженной на* $4\pi k_0$.

В гауссовой системе $\varepsilon_0=1$, $k_0=1$ и математическая запись теоремы Гаусса принимает вид:

$$N=4\pi\sum_i q_i. \tag{6.4а}$$

В системе СИ $k_0=1/4\pi$ и

$$N=\sum_i q_i. \tag{6.4б}$$

Теорема Гаусса может быть применена не только к векторному полю $\mathbf{D}$, но и к полю $\mathbf{E}_0$, создаваемому только свободными зарядами. Действительно, если убрать из поля все диэлектрики, то

$$\mathbf{D}_{\text{вак}}=\varepsilon_0\mathbf{E}_0. \tag{6.5}$$

Подставляя (6.5) в (6.4) и вводя понятие потока вектора напряженности электрического поля

$$N_0=\sum E_0\cos(\widehat{\mathbf{E}_0, \mathbf{n}})\,\Delta S=\sum E_{0n}\,\Delta S, \tag{6.6}$$

получаем

$$N_0 = \frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi \sum_i q_i. \qquad (6.7)$$

Теорему Гаусса можно было бы вывести также для полного макроскопического поля **E**, если учитывать все его источники — как свободные, так и связанные заряды. Поскольку, однако, распределение связанных зарядов само зависит от **E**, то пользоваться подобным соотношением неудобно, и на практике оно не применяется.

Как будет показано в следующем параграфе, теорема Гаусса (6.4) позволяет сравнительно просто рассчитывать электрические поля при симметричных распределениях зарядов и окружающих их диэлектриков. В более общем случае целесообразно, применяя теорему Гаусса к любому макроскопически малому объему, перейти от интегрального соотношения (6.4) к эквивалентным ему дифференциальным. Эти дифференциальные уравнения в частных производных рассматриваются и решаются в теоретической электродинамике (уравнения Максвелла).

§ 7. Примеры применения теоремы Гаусса

Разберем несколько примеров применения теоремы Гаусса к расчету электрических полей в простейших практически важных случаях.

Пример 1. *Поле равномерно заряженной сферы.*

Сферу радиуса R, помещенную в среду с диэлектрической проницаемостью ε, зарядим так, чтобы весь ее заряд q равномерно распределился по поверхности (рис. 1.23, *а*). На каждой единице площади поверхности шара будет тогда находиться заряд

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}. \qquad (7.1)$$

Величина σ называется поверхностной плотностью электрического заряда (ее единицей является, например, *к/м*^{2}).

Так как заряд расположен совершенно симметрично, то и создаваемое им электрическое поле также должно обладать сферической симметрией. Следовательно, линии вектора индукции **D** должны быть направлены по радиусам, проведенным из центра шара (рис. 1.23, *а*), а численное значение D может зависеть только от расстояния r до центра шара. Вид этой зависимости

$$D = D(r) \qquad (7.2)$$

мы найдем с помощью теоремы Гаусса.

Представим себе мысленно вспомогательную сферу S' произвольного радиуса $r > R$, концентрически охватывающую наш шар. Эта сфера изображена на рис. 1.23, *а* штрих-пунктиром. Вычислим поток индукции через сферу S'. Из (5.12) и (7.2) следует

$$N = \int D\,dS\cos\alpha = D(r)\int dS\cdot 1 = D(r)\cdot 4\pi r^2. \tag{7.3}$$

Так как $r > R$, то суммарный заряд, заключенный внутри этой сферы, равен полному заряду шара:

$$\sum q_i = q. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.3) и (7.4) соответственно в левую и правую части

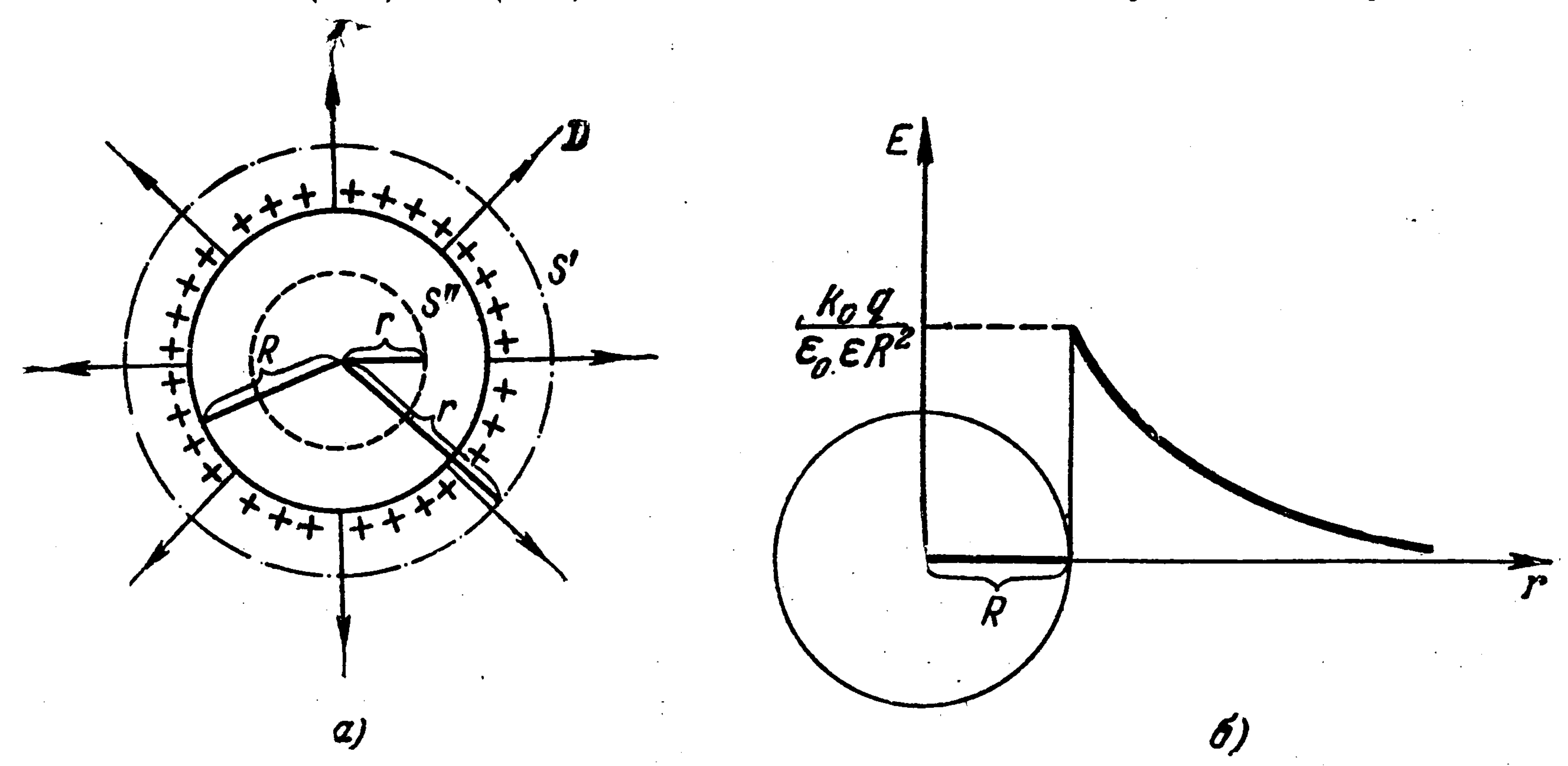


Рис. 1.23.

формулировки теоремы Гаусса (6.4), получаем $D(r)\cdot 4\pi r^2 = k_0\cdot 4\pi q$, откуда

$$D(r) = D_{\text{вне шара}} = k_0\frac{q}{r^2} \tag{7.5}$$

и соответственно

$$E_{\text{вне шара}} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = k_0\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{7.5a}$$

Для изображенной на рис. 1.23,*а* пунктиром сферы S'' радиуса $r < R$ поток индукции выражается также формулой (7.3). Однако в этом случае внутри сферы S'' зарядов нет и

$$\sum q_i = 0. \tag{7.6}$$

Подставляя (7.3) и (7.6) в (6.4), получаем $D(r)\cdot 4\pi r^2 = 0$; следовательно,

$$D_{\text{внутри шара}} = 0 \tag{7.7}$$

и

$$E_{\text{внутри шара}} = 0. \tag{7.8}$$

Сравнивая (7.5) с (2.4), видим, что электрическое поле снаружи шара, равномерно заряженного по поверхности, в точности такое же, как если бы весь заряд шара q был сосредоточен в одной точке — центре шара. Внутри же шара поля, создаваемые зарядами, расположенными на отдельных участках его поверхности, взаимно компенсируются и суммарное поле равно нулю. График зависимости E от r вне и внутри шара изображен на рис. 1.23, *б*; видно, что на границе шара напряженность электрического поля меняется не непрерывно, а скачкообразно, возрастая от $E=0$ внутри шара до

$$E = k_0 \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon R^2} \tag{7.9}$$

на внешней его поверхности.

Пример 2. *Поле равномерно заряженной плоскости.*

Представим себе равномерно заряженную бесконечную плоскость (рис. 1.24) с постоянной поверхностной плотностью заряда σ. Линии индукции в этом случае, очевидно, должны быть направлены симметрично в обе стороны от плоскости и идти перпендикулярно ей. Из симметрии также следует, что абсолютная величина вектора индукции D может зависеть только от расстояния x до плоскости.

Для нахождения вида зависимости $D=D(x)$ мы применим теорему Гаусса к замкнутой цилиндрической поверхности, изображенной на том же рис. 1.24. Ось цилиндра перпендикулярна заряженной

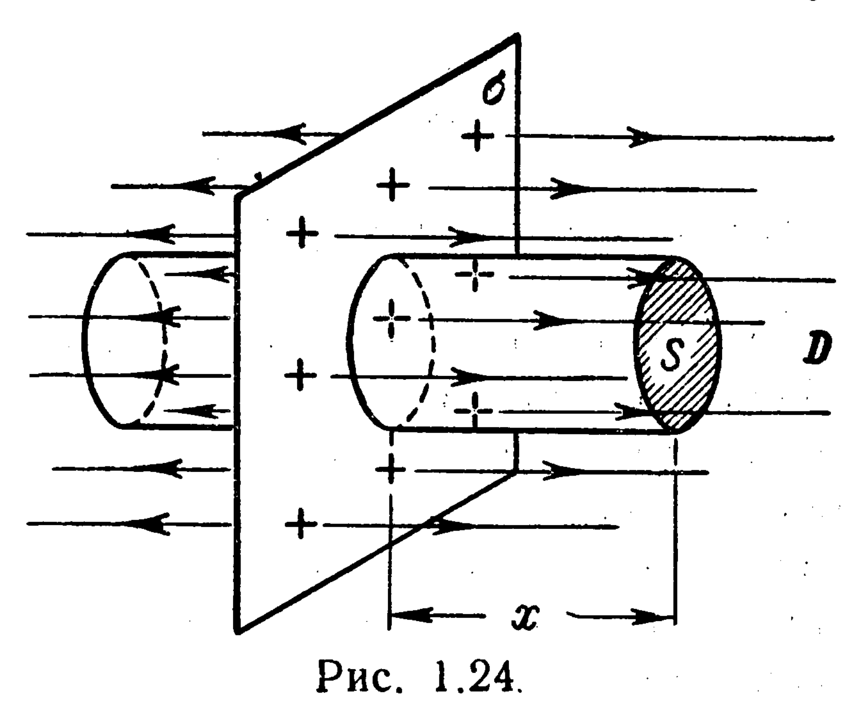


Рис. 1.24.

плоскости, и последняя делит высоту цилиндра $2x$ пополам. Оба основания параллельны заряженной плоскости и имеют одинаковую площадь S.

Поток индукции через цилиндрическую поверхность равен

$$N = \sum_{\text{бок. пов.}} D\Delta S \cos\alpha + 2 \sum_{\text{основ}} D\Delta S \cos\alpha. \tag{7.10}$$

На боковой поверхности вектор **D** параллелен поверхности и $\cos\alpha = 0$. На торцах цилиндра вектор **D** перпендикулярен поверхности и $\cos\alpha = 1$, а величина D одинакова на обоих основаниях; следовательно,

$$N = 2\sum_{\text{основ}} D\Delta S\cdot 1 = 2DS. \qquad (7.11)$$

Проведенная цилиндрическая поверхность вырезает из плоскости такую же площадку S с полным зарядом

$$\sum q_i = \sigma S. \qquad (7.12)$$

Подставляя (7.11) и (7.12) соответственно в левую и правую части (6.4), получаем

$$2DS = k_0\cdot 4\pi\sigma S,$$

откуда

$$D_{\text{пл}} = k_0\cdot 2\pi\sigma = \text{const} \qquad (7.13)$$

и соответственно

$$E_{\text{пл}} = k_0\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (7.14)$$

В системе Гаусса $\varepsilon_0 = 1, k_0 = 1$ и

$$E_{\text{пл}} = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}. \qquad (7.14а)$$

В системе СИ $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$, $k_0 = 1/4\pi$, и благодаря этому в окончательном выражении

$$E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (7.14б)$$

отсутствует множитель, содержащий 4π (поле не обладает сферической симметрией).

Из (7.13) следует, что по обе стороны плоскости вектор индукции **D** во всех точках одинаков по величине и направлению, т. е. образует однородное поле (**D** = const).

Для отрицательно заряженной плоскости $\sigma < 0$ и линии индукции справа и слева входят в плоскость, кончаясь на отрицательных зарядах. В случае равномерно заряженной плоскости с конечными размерами L выражение (7.13) будет справедливым для точек поля, находящихся на расстоянии x от плоскости, достаточно малом по сравнению с L, и не слишком близких к ее краям. У краев же пластины и на расстояниях, сравнимых с размерами последней, электрическое поле перестает быть однородным.

Пример 3. *Поле между двумя плоскостями, равномерно с одинаковой плотностью заряженными разноименными зарядами (плоский конденсатор).*

Рассмотрим систему двух бесконечных плоскостей (пластин), расположенных параллельно друг другу и равномерно заряженных зарядами противоположного знака с одинаковой поверхностной плотностью. Поверхностную плотность заряда на пластинах обозначим соответственно через $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 1.25). Линии индукции $\mathbf{D}_+$, создаваемые положительной пластиной, идут в обе стороны от пластины, как показано на рис. 1.25 простым пунктиром. Абсолютная величина вектора индукции равна $k_0 \cdot 2\pi\sigma$. Поле, создаваемое отрицательной пластиной, $\mathbf{D}_-$, также однородно и имеет ту же абсолютную величину $k \cdot 2\pi\sigma$, но линии индукции его направлены к пластине, как показано на том же рисунке штрих-пунктиром.

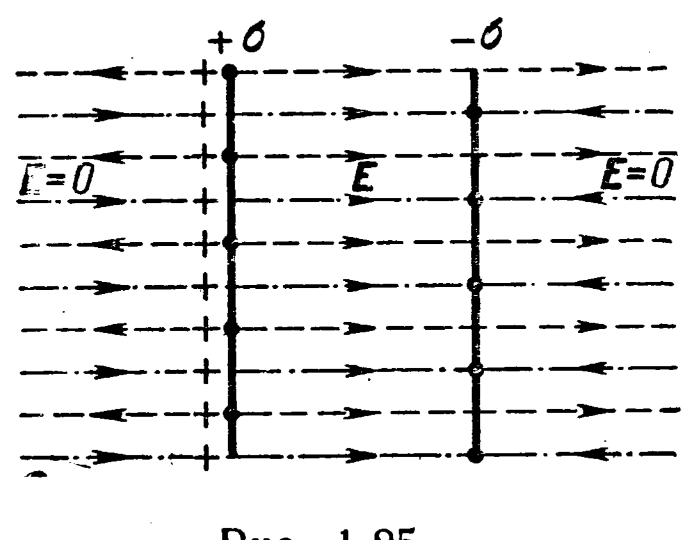


Рис. 1.25.

Результирующее поле, создаваемое обеими плоскостями, определится по принципу наложения (5.5). Как видно из чертежа, вне конденсатора линии индукции от обеих пластин направлены противоположно друг другу и взаимно компенсируются, т. е. поле отсутствует:

$$D_{\text{внешн}} = 0 \quad \text{и} \quad E_{\text{внешн}} = 0. \tag{7.15}$$

Внутри же конденсатора оба поля направлены одинаково и

$$D_{\text{внутр}} = k_0 \cdot 2\pi\sigma + k_0 \cdot 2\pi\sigma = k_0 \cdot 4\pi\sigma. \tag{7.16}$$

Отсюда напряженность поля в любой точке между пластинами

$$E_{\text{внутр}} = \frac{D_{\text{внутр}}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \tag{7.17}$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами. В пустоте напряженность поля между пластинами равна

$$E_0 = \frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi\sigma. \tag{7.18}$$

Из (7.15) и (7.17) следует, что поле безгранично протяженного плоского конденсатора целиком сосредоточено между его пластинами и однородно. Полученный результат можно приближенно применять и для конденсаторов конечных размеров, причем ошибка в расчете внутреннего поля будет тем меньше, чем меньше расстояние между пластинами d по сравнению с линейными размерами самих пластин. На рис. 1.26 изображена примерная картина линий поля в реальном плоском конденсаторе конечных размеров.

Суммарное поле $E_{внутр}$ действует на любой посторонний заряд q', помещенный между пластинами. На заряды же, расположенные на каждой из пластин, действует вдвое меньшее поле (7.14), создаваемое только другой пластиной конденсатора. Поле положительной пластины направлено от нее и действует на отрицательные заряды второй пластины с силой, направленной против поля, т. е. с силой притяжения. Поскольку эти заряды связаны с пластиной, то на всю пластину площади S действует суммарная сила притяжения

$$F = qE = \sigma S k_0 \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0\varepsilon} S. \qquad (7.19)$$

Такая же сила притяжения действует и на положительную пластину; между пластинами конденсатора возникает взаимное притяжение с силой на единицу площади

$$f = \frac{F}{S} = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (7.20)$$

Рис. 1.26.

Подобные механические силы, возникающие между заряженными макроскопическими телами, носят название пондеромоторных сил. Эти силы действуют на проводники и диэлектрики, помещаемые в электрическое поле, и заставляют их перемещаться в этом поле и деформироваться. Общий метод вычисления пондеромоторных сил будет указан ниже, в § 13. Измеряя пондеромоторные силы, например, с помощью пружинных весов, мы получаем возможность определения величин электрических зарядов и полей механическим путем. На этом принципе работают так называемые абсолютные электрометры.

Пример 4. *Поле равномерно заряженного шара.*

Сферу радиуса R, изображенную выше на рис. 1.23, *а*, зарядим равномерно по всему объему. Объемную плотность заряда обозначим

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \qquad (7.21)$$

Учитывая те же условия симметрии, как и в примере 1, можно написать, что для сферы произвольного радиуса r с центром, совпадающим с центром нашего шара, поток вектора электростатической индукции будет

$$N = D(r)\, 4\pi r^2. \qquad (7.22)$$

При $r > R$ суммарный заряд, заключенный внутри сферы, равен полному заряду шара q и на основании теоремы Гаусса, так же

как и в примере 1,

$$D_{\text{вне шара}} = k_0 \frac{q}{r^2}. \qquad (7.23)$$

При $r < R$ суммарный заряд, заключенный внутри сферы, будет равен

$$\sum q_i = \varrho \frac{4}{3} \pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3}. \qquad (7.24)$$

По теореме Гаусса

$$D(r)\, 4\pi r^2 = k_0\, 4\pi q \frac{r^3}{R^3}$$

и

$$D_{\text{внутри шара}} = \frac{k_0 q r}{R^3}. \qquad (7.25)$$

Если внутри шара $\varepsilon = 1$, а вне шара $\varepsilon \neq 1$, то для напряженности электрического поля имеем

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{внутри шара}} &= \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 R^3} r \quad (\text{при} \quad r \leqslant R), \\ E_{\text{вне шара}} &= \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2} \quad (\text{при} \quad r \geqslant R). \end{aligned}\right\} \qquad (7.26)$$

В центре шара при $r = 0$ напряженность электрического поля равна нулю. С ростом r величина E линейно возрастает до некоторого максимального значения $E_{max} = \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 R^2}$ на поверхности шара. На границе с диэлектриком напряженность электрического поля изменяется скачком и вне шара постепенно убывает от значения $E'_{max} = \frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon R^2}$ до нуля. График зависимости E от r вне и внутри шара согласно (7.26) при $\varepsilon = 1$, т. е. в отсутствии скачка, изображен на рис. 1.27.

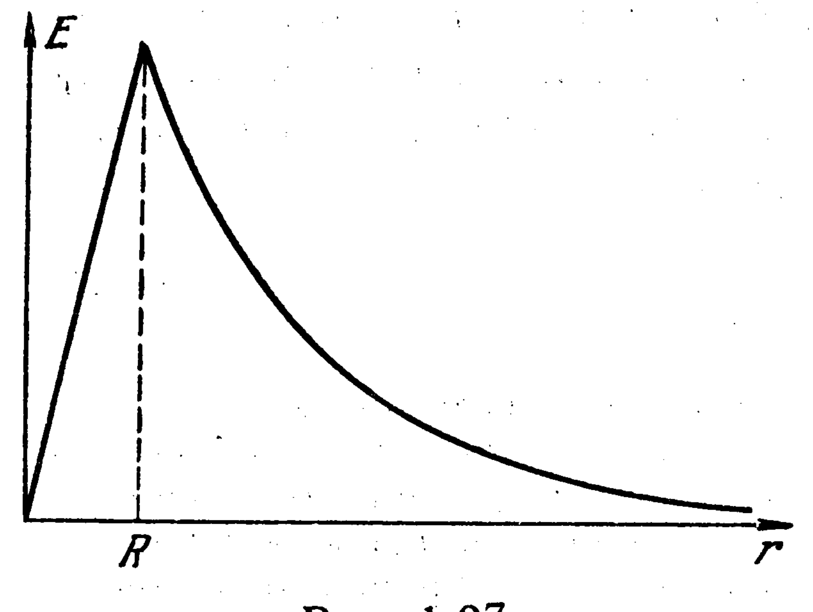


Рис. 1.27.

Расчет напряженности электрического поля внутри шара можно было провести и иным способом. Если разбить весь шар на элементарные объемы dv, то каждый из них будет обладать зарядом ϱdv и создавать в некоторой точке M внутри шара, находящейся от него на расстоянии $\mathbf{x}$, элементарную напряженность поля

$$d\mathbf{E}_M = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{\varrho dv}{x^2} \frac{\mathbf{x}}{x}. \qquad (7.27)$$

Суммируя эти поля от всех объемчиков, расположенных на различных расстояниях $\mathbf{x}$ от точки M, можно найти полное поле в этой точке

$$\mathbf{E}_M = \int d\mathbf{E}_M. \qquad (7.28)$$

Результат вычислений по формуле (7.28) полностью совпадает с расчетом $E_{\text{внутри шара}}$ по формуле (7.26).

При вычислении по формуле (7.28) мы складываем поля от всех элементарных зарядов ϱdv, в том числе и от заряда, расположенного в точке M.

Рассмотренные в настоящем параграфе примеры демонстрируют практическую важность использования теоремы Гаусса для вычисления электрических полей, обладающих симметрией. Применяя указанный метод, читатель сможет сам рассчитать поле сферического или цилиндрического конденсатора. Приведем без вывода решение для последнего случая.

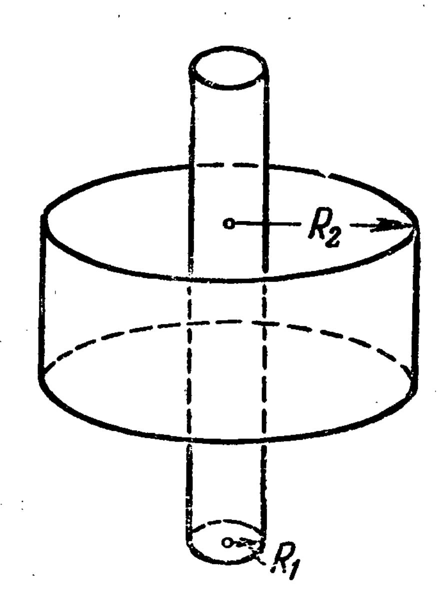


Рис. 1.28.

Пусть два коаксиальных бесконечно длинных цилиндра радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ (рис. 1.28) равномерно заряжены по всей поверхности электричеством противоположных знаков. Поверхностная плотность заряда на обоих цилиндрах, чтобы на единицу высоты каждого цилиндра приходился одинаковый по абсолютной величине заряд q_1, должна быть различной. Выбирая замкнутые поверхности в виде коаксиальных цилиндров различных радиусов r и применяя теорему Гаусса, можно доказать, что все электрическое поле сосредоточено между цилиндрами, направлено перпендикулярно их поверхностям и убывает обратно пропорционально расстоянию r от их оси по формуле

$$E_{\text{цил. конд.}} = k_0 \frac{2q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon r}. \tag{7.29}$$

В радиолампах и ионизационных счетчиках радиоактивных излучений противоположно заряженные электроды (катод и анод) выполняются обычно в виде цилиндрической нити и коаксиального с ней внешнего цилиндра. Такой же характер имеет электрическое поле в коаксиальном кабеле, где полость между центральной жилой и цилиндрической броней заполняется диэлектриком. При радиусе внешнего цилиндра, малом по сравнению с его длиной, образованный обоими цилиндрами цилиндрический конденсатор можно считать практически бесконечно длинным и для расчета электрических полей использовать полученный выше результат (7.29).

§ 8. Потенциал электростатического поля

На точечный электрический заряд q', находящийся в электрическом поле $\mathbf{E}$, действует сила $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$. При перемещении заряда в поле эта сила совершает работу. Можно доказать для самого общего случая, что *величина работы по перемещению заряда q' в электростатическом поле зависит лишь от его начального и конечного положений и не зависит от пути движения.*

Мы докажем это важное положение сначала для частного случая электрического поля точечного заряда, а затем обобщим полученный результат на случай поля, отвечающего произвольному распределению зарядов. На рис. 1.29 изображены линии поля, создаваемого точечным зарядом q, и траектория перемещения пробного заряда q'. Выделим бесконечно малый отрезок этой траектории $d\mathbf{l}$. При перемещении заряда q' на отрезке $d\mathbf{l}$ на него действует сила

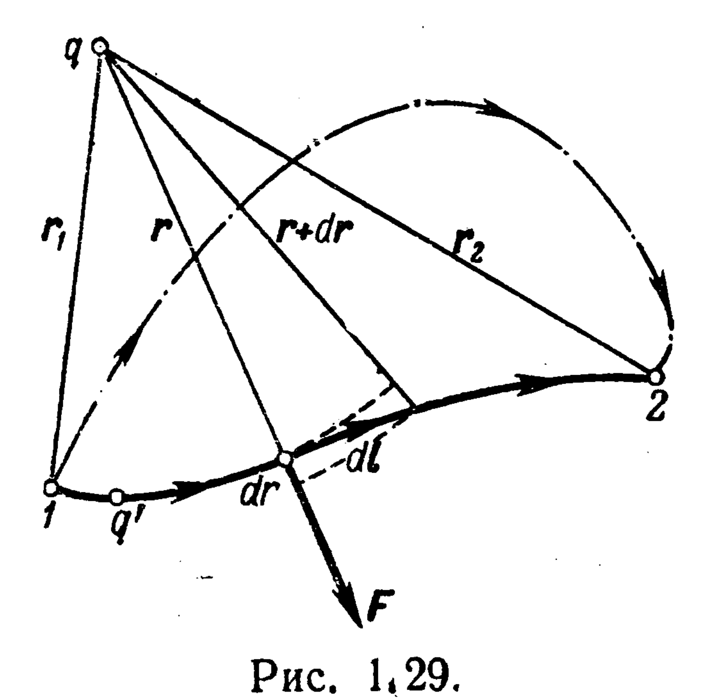


Рис. 1.29.

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E} = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

и совершается элементарная работа

$$dA = F\,dl \cos(\widehat{\mathbf{F}, d\mathbf{l}}) = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\,dl \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}}).$$

Из чертежа видно, что величина $dl \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}})$ есть проекция перемещения $d\mathbf{l}$ на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ и численно равна приращению длины радиус-вектора:

$$dl \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{l}}) = dr. \tag{8.1}$$

Поэтому окончательно имеем

$$dA = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\,dr. \tag{8.2}$$

Для нахождения полной работы, совершаемой полем при перемещении пробного заряда q' из положения *1* в положение *2*, следует выражение (8.2) для элементарной работы проинтегрировать по всему пути:

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{8.3}$$

Из (8.3) следует, что то же выражение для работы получится и при перемещении пробного заряда между указанными двумя точками и по любому другому пути, изображенному на рис. 1.29 пунктиром. Таким образом, работа перемещения пробного заряда q' в поле, создаваемом одиночным точечным зарядом q, действительно не зависит от пути перехода из начального положения в конечное и является функцией начального (r_1) и конечного (r_2) расстояний между зарядами q и q'. Силовое поле, обладающее таким свойством, называется п о т е н ц и а л ь н ы м полем.

Введем следующую функцию расстояния r между зарядами:

$$W(r)=k_0\frac{qq'}{\varepsilon_0\varepsilon r}+C, \tag{8.4}$$

где C — произвольная постоянная. Сопоставляя (8.4) и (8.3), видим, что разность значений этой функции в положениях *1* и *2* дает работу, производимую электрическими силами при перемещении заряда q' из точки *1* в точку *2*. Действительно,

$$W(r_1)-W(r_2)=\left[k_0\frac{qq'}{\varepsilon_0\varepsilon r_1}+C\right]-\left[k_0\frac{qq'}{\varepsilon_0\varepsilon r_2}+C\right]=k_0\frac{qq'}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{8.5}$$

и

$$A_{1,2}=W_1-W_2. \tag{8.6}$$

В рассматриваемом случае как выражение для работы $A_{1,2}$, так и вид функции $W(r)$ симметричны относительно обоих зарядов q и q'. Эта симметрия характерна для точечных зарядов и связана с тем, что вектор **F** представляет собой силу взаимодействия между обоими зарядами.

Анализируя соотношение (8.6) и сопоставляя его с аналогичными соотношениями в механике, мы приходим к заключению, что функция $W(r)$ должна рассматриваться как потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов q и q', находящихся на расстоянии r друг от друга. Формула (8.6) тогда означает, что работа электрических сил при перемещении заряда q' произведена за счет уменьшения потенциальной энергии взаимодействия q и q'. Поскольку q играет в данном случае роль источника поля, а движется в этом поле заряд q', функцию $W(r)$ можно называть потенциальной энергией заряда q' в данном электрическом поле, созданном зарядом q.

Здесь, как и в механике, потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной C. Это связано с тем, что физический смысл имеет, собственно говоря, лишь разность потенциальных энергий в двух точках пространства, выражающая работу, производимую при переходе из одной точки в другую. При нахождении же этой разности произвольная постоянная исключается, как видно из (8.5).

В рассмотренном выше (рис. 1.29) примере будем перемещать пробный заряд q' из точки *1* за пределы поля, т. е. в бесконечность, где напряженность электрического поля $E_{\text{т.з.}}$ равна нулю. Такую бесконечно удаленную точку ($r_2=\infty$) можно выбрать за начало отсчета потенциальной энергии и положить потенциальную энергию в этой точке равной нулю:

$$W_\infty=0. \tag{8.7}$$

Для этого необходимо в общем выражении (8.4) положить произвольную постоянную $C=0$.

Из формул (8.4)—(8.7) тогда следует:

$$A_{1,\infty}=W_1-W_\infty=W_1=q'\frac{k_0q}{\varepsilon_0\varepsilon r_1} \qquad (8.8)$$

и потенциальная энергия заряда q' в точке r_1 численно равна работе, которую надо затратить, чтобы удалить q' из данной точки поля в бесконечность. Для одноименных зарядов $qq'>0$ и $W_1>0$, т. е. энергия их взаимодействия положительна, и при раздвижении этих зарядов на бесконечность силы отталкивания между ними могут совершить положительную работу $A_{1,\infty}>0$. Для разноименных зарядов $qq'<0$, т. е. энергия взаимодействия отрицательна, и для раздвижения этих зарядов на бесконечность придется затратить внешнюю работу $-A_{1,\infty}$ против электростатических сил.

Следует твердо помнить, что потенциальная энергия есть энергия взаимная, причем оба взаимодействующих заряда входят в выражение для потенциальной энергии их взаимодействия совершенно симметрично. К выражению (8.8) для взаимной потенциальной энергии зарядов можно прийти, считая, что заряд q' находится в электрическом поле заряда q, либо что заряд q находится в электрическом поле заряда q'.

Перейдем теперь к общему случаю произвольного распределения зарядов—«источников поля». Как было установлено выше (принцип наложения), суммарное поле, создаваемое системой зарядов, равно сумме полей точечных зарядов, образующих систему. Следовательно, сила, действующая на пробный заряд q', равна геометрической сумме сил, а работа при его перемещении в электрическом поле всех зарядов системы равна алгебраической сумме работ перемещения в поле каждого из зарядов. Поскольку эта работа для каждого из полей не зависит от формы пути, то она не зависит от формы пути для суммарного поля произвольной (статической) системы зарядов. Следовательно, работа по перемещению пробного заряда в произвольном электрическом поле выражается формулой

$$A_{1,2}=\int_1^2 F\,dl\cos(\widehat{\mathbf{F},d\mathbf{l}})=q'\int_1^2 E\,dl\cos(\widehat{\mathbf{E},d\mathbf{l}})=W_1-W_2, \qquad (8.9)$$

аналогичной выражению (8.6). Здесь под W_1 и W_2 следует понимать значения потенциальной энергии пробного заряда в точках *1* и *2* суммарного поля.

Функция W в общем случае является суммой выражений типа (8.8) с соответственными значениями расстояний r_i от пробного заряда q' до каждого из источников поля *).

*) Некоторые формальные затруднения с определением и нормировкой W возникают в идеализированных примерах с бесконечно протяженными элек-

Из (8.9), далее, видно, что работа и энергия прямо пропорциональны величине пробного заряда q'. Отношение

$$\frac{W}{q'}=\varphi, \tag{8.10}$$

зависящее от положения пробного заряда, но уже не зависящее от численной величины последнего, характеризует свойства поля в данной его точке и называется **электрическим потенциалом** или просто потенциалом этой точки.

Сохраняя введенное выше условие (8.7) для начала отсчета энергии, находим, что

$$\varphi_\infty=\frac{W_\infty}{q'}=0, \tag{8.11}$$

т. е. потенциал в бесконечно удаленных точках поля равен нулю. Из (8.7), (8.8) и (8.10), далее, следует, что

$$\varphi_1=\frac{W_1}{q'}=\frac{W_1-W_\infty}{q'}=\frac{A_{1,\infty}}{q'}=\int_1^\infty E\,dl\cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}), \tag{8.12}$$

т. е. ***потенциал электрического поля численно измеряется работой, совершаемой полем при перемещении единичного положительного пробного заряда*** ($q'=+1$) ***по любому пути из данной точки в бесконечность*** *).

Из (8.9) и (8.11) вытекает, что

$$A_{1,2}=q'(\varphi_1-\varphi_2), \tag{8.13}$$

т. е. работа по перемещению заряда в электростатическом поле измеряется произведением величины переносимого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути и не зависит от формы пути.

Размерность потенциала в гауссовой системе равна

$$[\varphi]=\frac{[A]}{[q]}=\textit{см}^{1/2}\cdot\textit{г}^{1/2}\cdot\textit{сек}^{-1}.$$

Полагая в (8.13) $q'=1$СГС ед. заряда, $A_{1,2}=1$ *эрг*, мы получим $\varphi_1-\varphi_2=1$ СГС ед. потенциала, иначе говоря, за единицу разности потенциалов в гауссовой системе принимается разность потенциалов между двумя такими точками поля, при перемещении между

трическими зарядами. Так, в рассмотренном в § 7 примере 2 безграничной заряженной плоскости бесконечно удаленные точки, лежащие справа и слева от плоскости и в самой плоскости, не равноценны друг другу. В подобных случаях иногда бывает удобно выбирать иную нормировку константы в выражении для потенциальной энергии и полагать $W=0$ в какой-нибудь условной точке поля.

*) Или в ту точку поля, для которой потенциал условно принят равным нулю, как указывалось в предыдущей сноске.

которыми 1СГС единицы положительного заряда совершается работа в 1*эрг*. В системе СИ, аналогично полагая в (8.13) $q'=1$ *к* и $A_{1,2}=1$ *дж*, получим $\varphi_1-\varphi_2=1$ *в*, т. е. 1 вольт есть разность потенциалов между такими двумя точками поля, при перемещении между которыми заряда в 1 кулон совершается работа в 1джоуль. Так как 1*дж* $=10^7$ *эрг*, а 1 *к* $\approx 3\cdot 10^9$СГС ед. заряда, то

$$1\ в=\frac{1\ дж}{1\ к}=\frac{10^7\ эрг}{3\cdot 10^9\ \text{СГСЭ ед. заряда}}=\frac{1}{300}\ \text{СГС ед. потенциала.}$$

Потенциал φ является столь же важной характеристикой электрического поля, как и вектор напряженности **E**.

Для графического изображения распределения потенциала в электростатическом поле пользуются системой так называемых поверхностей равного потенциала (эквипотенциальных поверхностей). Каждая такая поверхность представляет собой совокупность всех точек поля, имеющих одно и то же значение потенциала

$$\varphi=\text{const}. \tag{8.14}$$

Эти поверхности проводятся в пространстве так, чтобы численное значение потенциала на двух соседних поверхностях отличалось повсюду на одинаковую величину $\Delta\varphi$ (например, на 1 вольт).

В качестве примера рассмотрим потенциал поля точечного заряда q. Выше мы установили (см. (8.8)), что помещенный в это поле на расстоянии r от источника пробный заряд q' обладает потенциальной энергией $W=q'\frac{k_0 q}{\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Разделив обе части этого равенства на q', мы получим искомое выражение для потенциала точечного заряда:

$$\frac{W}{q'}=\varphi_{т.з.}=k_0\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{8.15}$$

В системе Гаусса

$$\varphi_{т.з.}=\frac{q}{\varepsilon r}\ \text{СГС ед. потенциала,} \tag{8.15а}$$

и в системе СИ

$$\varphi_{т.з.}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}\ \text{вольт.} \tag{8.15б}$$

Этот потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию r от источника поля. Из (8.15) следует, что

$$\varphi_{т.з.}=\text{const}\quad\text{при}\quad r=\text{const},$$

т. е. поверхности равного потенциала будут концентрическими сферами, описанными вокруг источника поля на возрастающих расстояниях друг от друга, как это изображено на рис 1.30.

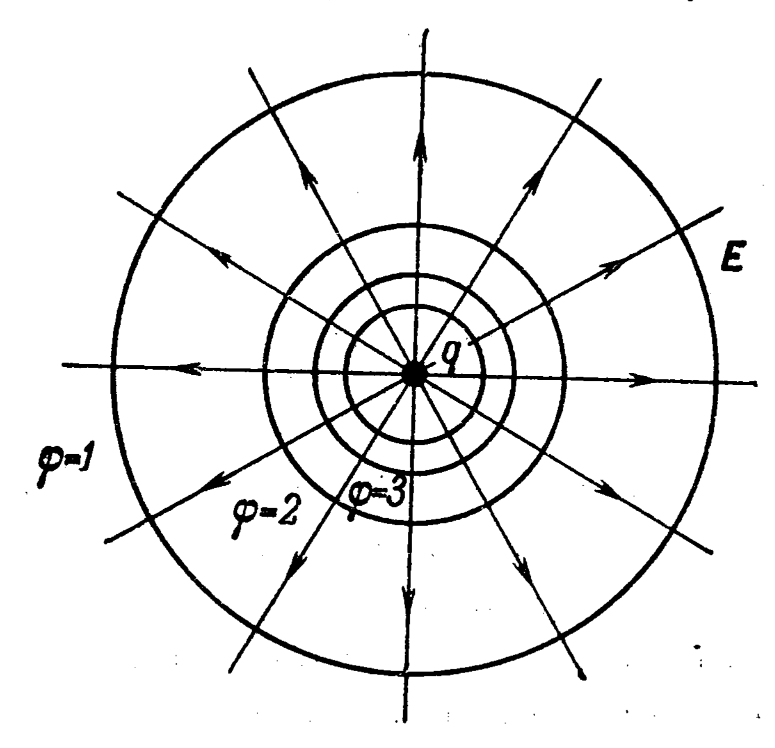


Рис. 1.30.

Проведем на том же рис. 1.30 линии напряженности поля. Согласно (2.2) эти линии исходят из точечного заряда и направлены вдоль радиусов, т.е. перпендикулярны к поверхностям равного потенциала. Эта взаимная перпендикулярность линий поля и эквипотенциальных поверхностей остается справедливой и для сколь угодно сложных электростатических полей. Действительно, проведем в произвольном поле поверхность равного потенциала $\varphi=\text{const}$ и рассмотрим две ее бесконечно близкие точки 1 и 2 (см. рис. 1.31). Переместим из 1 в 2 вдоль поверхности пробный заряд q'. Тогда согласно (8.13)

$$A_{1,2}=q'(\varphi_1-\varphi_2)=q'(\varphi-\varphi)=0, \tag{8.16}$$

т. е. ***работа перемещения пробного заряда вдоль поверхности равного потенциала равна нулю.***

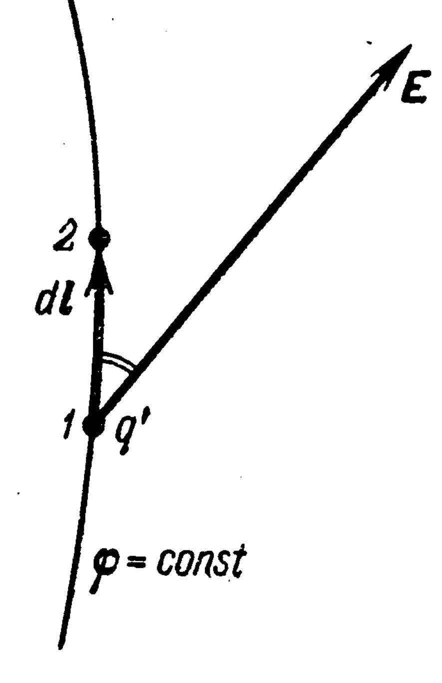


Рис. 1.31.

С другой стороны, выразим ту же работу через напряженность поля:

$$A_{1,2}=F\,dl\cos(\widehat{\mathbf{F},\,d\mathbf{l}})=q'E\,dl\cos(\widehat{\mathbf{E},\,d\mathbf{l}}). \tag{8.17}$$

Сравнивая (8.16) и (8.17), видим, что так как q' и $d\mathbf{l}$ произвольны и не равны нулю, то, следовательно,

$$\cos(\widehat{\mathbf{E},\,d\mathbf{l}})=0 \tag{8.18}$$

— ***вектор напряженности поля* E *перпендикулярен к поверхности равного потенциала в точке их пересечения.***

Проведем теперь две бесконечно близкие эквипотенциальные поверхности $\varphi=\text{const}$ и $\varphi+d\varphi=\text{const}$ (рис. 1.32). Как было доказано выше, вектор напряженности поля **E** направлен по нормали **n** к поверхности φ. Эта нормаль из точки 1 пересекает эквипотенциальную поверхность $\varphi+d\varphi=\text{const}$ в точке 2. Отрезок 1—2 имеет длину dn и представляет кратчайшее расстояние от точки 1 до второй эквипотенциальной поверхности. При перемещении пробного заряда q' из

точки *1* перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности в точку *2* будет совершена работа dA, равная

$$dA = F\,dn\cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{n}}) = q'E\,dn. \qquad (8.19)$$

Выражая с помощью (8.13) ту же работу через потенциалы, получим

$$dA = q'\,[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q'd\varphi. \qquad (8.20)$$

Сравнивая (8.19) с (8.20), получим окончательно:

$$E = -\frac{d\varphi}{dn}. \qquad (8.21)$$

Величина $\frac{d\varphi}{dn}$, характеризующая быстроту изменения потенциала в пространстве, носит название градиента потенциала. Градиент есть вектор, направленный по нормали к поверхности. Знак минус в формуле (8.21) показывает, что вектор напряженности электрического поля численно равен градиенту потенциала, но направлен в противоположную сторону, т. е. в сторону падения потенциала.

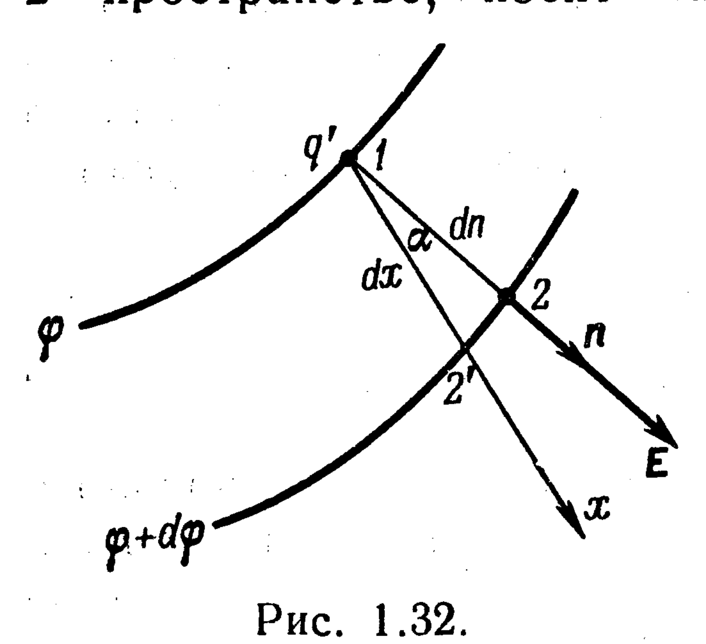


Рис. 1.32.

Если мы проведем из точки *1* координатную ось, например ось x, то ее направление составит с нормалью некоторый угол α; эта ось пересечет поверхность $\varphi + d\varphi$ в некоторой точке *2'*. Вычисляя работу на перемещении dx, получим

$$q'E_x dx = -q'd\varphi, \qquad (8.22)$$

где $E_x = E\cos\alpha$ — проекция вектора E на направление оси x. Отсюда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (8.23)$$

Результат этот очень важен: выбранная нами ось x может быть повернута в любом направлении. Поэтому формула (8.23) может читаться так: ***составляющая вектора напряженности электрического поля в данной точке по любому направлению равна производной от потенциала по этому направлению в той же точке, взятой с отрицательным знаком.***

Пользуясь (8.23), можно, зная потенциал поля φ, найти вектор напряженности поля $\mathbf{E}$, определив все три его составляющие E_x, E_y и E_z.

Действительно, для составляющих поля E_y и E_z имеем

$$\left.\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

Выразим вектор **E** через его составляющие:

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z. \tag{8.25}$$

Подставляя сюда значения составляющих (8.24), имеем

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{8.26}$$

Следовательно, электрическое поле можно описать равным образом с помощью вектора напряженности **E** или скалярного потенциала φ, выражающихся друг через друга с помощью соотношений (8.12) и (8.26).

Из (8.21) следует, что в системе СИ единица напряженности электрического поля имеет размерность вольт/метр. 1 *в/м* есть напряженность такого электрического поля, потенциал которого убывает на 1 вольт при перемещении на 1 метр перпендикулярно эквипотенциальной поверхности:

$$1\,в/м = \frac{\frac{1}{300}}{100} = 3{,}33\cdot 10^{-5} \text{ СГС ед. напряженности.}$$

Из (8.21) вытекает также, что в общем случае произвольного поля в тех его точках, где напряженность E больше, будут расположены гуще не только линии вектора **E**, но и перпендикулярные к ним эквипотенциальные поверхности. Действительно, вблизи этих точек расстояния dn, на которых потенциал изменяется на одинаковую величину $d\varphi$, будут соответственно меньше, чем в точках с меньшими значениями отношения $\frac{d\varphi}{dn}$.

Для рассмотренного в предыдущем параграфе шара, равномерно заряженного по поверхности, поле вне шара имеет такое же значение, как у точечного заряда, сосредоточенного в центре шара. Отсюда можно заключить, что потенциал вне шара будет также выражаться формулой (8.15), справедливой для точечного заряда. Внутри же шара $E=0$, а следовательно, $\frac{d\varphi}{dn}=0$, и потенциал во всех этих точках постоянен ($\varphi=\text{const}$) и равен потенциалу на поверхности (при $r=R$). Таким образом, в этом случае

$$\varphi = k_0\,\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon r} \quad \text{при } r > R \tag{8.27}$$

и

$$\varphi = k_0\,\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon R} \quad \text{при } r \leqslant R. \tag{8.28}$$

График изменения E и φ вне и внутри подобной равномерно заряженной сферы изображен на рис. 1.33.

Если известна напряженность поля во всех точках, то распределение потенциала φ можно найти интегрированием равенства (8.21). Рассмотрим пример подобного интегрирования.

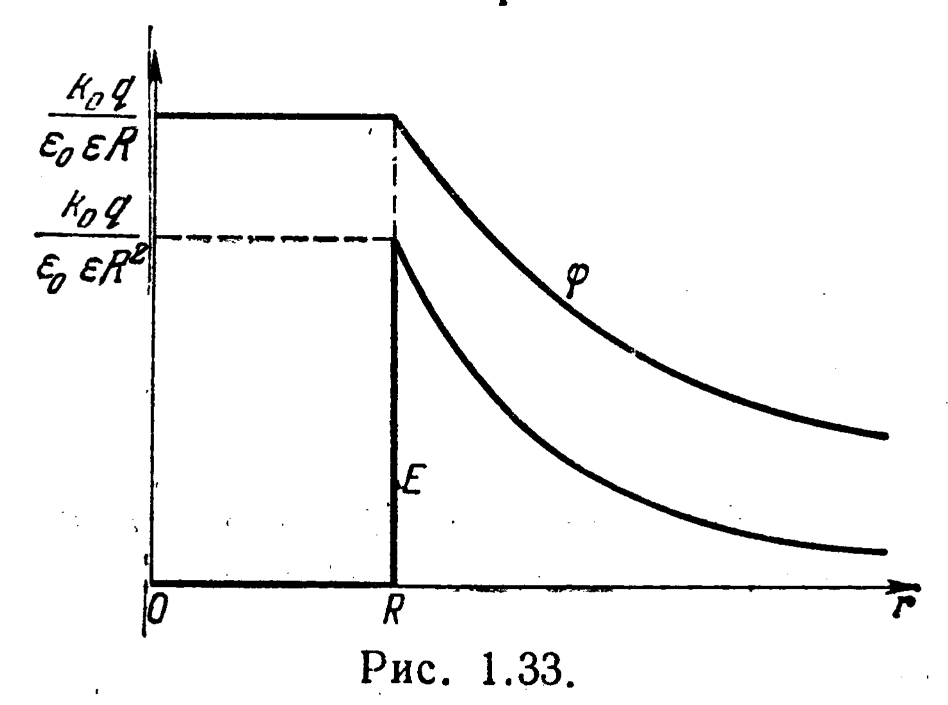


Рис. 1.33.

Напряженность поля вне бесконечного плоского конденсатора, изображенного схематически на рис. 1.26, равна нулю. Следовательно, согласно (8.21) электрические потенциалы справа и слева от пластин будут постоянными. Однако численные значения этих постоянных φ_1 и φ_2 будут различны из-за наличия внутри конденсатора электрического поля, определяемого формулой (7.17).

Проведем ось x перпендикулярно к пластинам вправо и начало координат ($x=0$) поместим на левой положительно заряженной пластине. Перенесем пробный заряд $q'=+1$ вдоль оси от левой

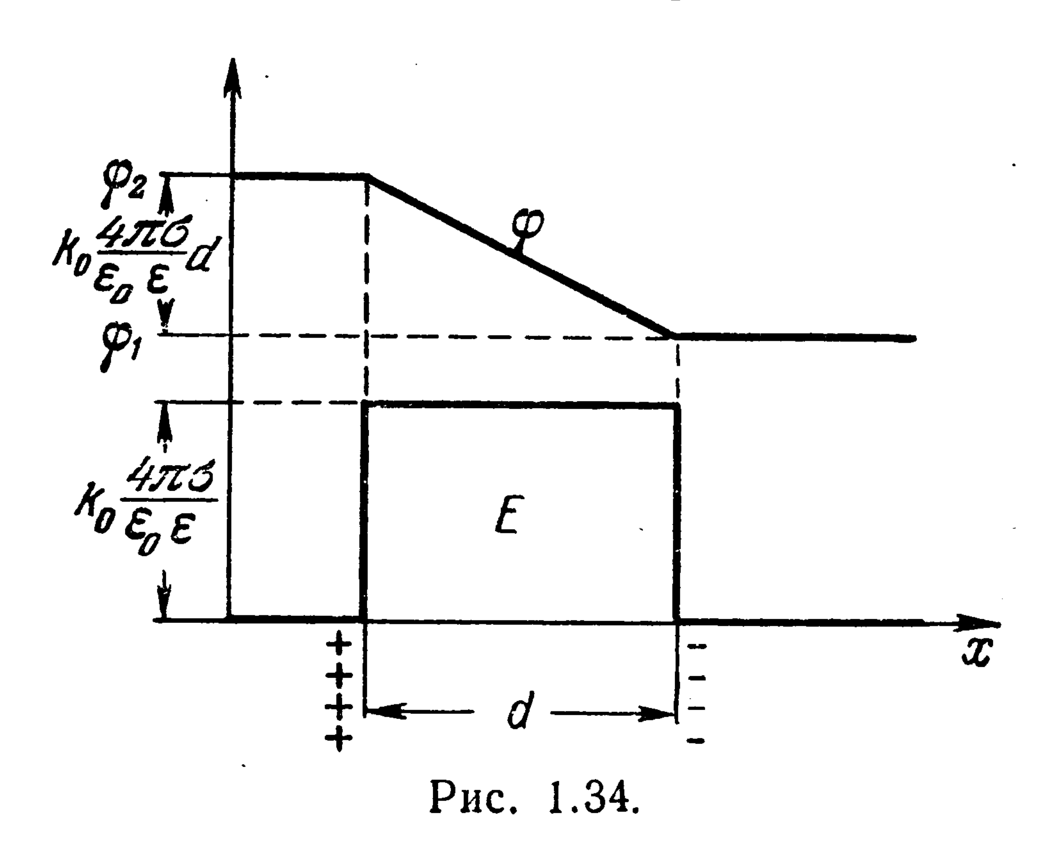


Рис. 1.34.

пластины с потенциалом φ_1 на некоторое расстояние x внутрь конденсатора в точку, потенциал которой обозначим через $\varphi(x)$. Согласно (8.9) и (8.12) работа по переносу этого заряда определит разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi(x) = \int_{x=0}^{x} E_x\, dx = \int_{0}^{x} E\, dx = Ex, \tag{8.29}$$

и, следовательно, потенциал в точке x равен

$$\varphi(x)=\varphi_1-Ex=\varphi_1-\frac{k_0 4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}x. \qquad (8.30)$$

Обозначим толщину конденсатора через d. Тогда потенциал правой обкладки будет равен

$$\varphi_2=\varphi_1-\frac{k_0 4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}d \qquad (8.31)$$

и разность потенциалов внутри конденсатора составит

$$\varphi_1-\varphi_2=\frac{k_0 4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}d. \qquad (8.32)$$

В данном случае начало отсчета φ может быть выбрано в любом месте, и для упрощения расчета можно положить равным нулю любое из значений φ_1 или φ_2.

График изменения потенциала и напряженности электрического поля вне и внутри плоского конденсатора изображен на рис. 1.34.

ГЛАВА III

ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ

§ 9. Проводники в электростатическом поле

Наэлектризуем какое-либо тело, т. е. сообщим ему некоторый заряд q. Тогда, как показывает опыт, в зависимости от строения и свойств тела этот заряд или перераспределится по телу, или же останется в том месте, где произведена электризация. Те тела, в которых электрический заряд может свободно перемещаться по всему телу, называются проводниками электричества. Тела же, в которых заряды не могут перемещаться из одной части в другую, называются изоляторами, или диэлектриками. Проводниками являются все металлы, а также электролиты и ионизованные газы. Такие вещества, как слюда, стекло, эбонит, фарфор, чистая вода, являются диэлектриками.

Указанное деление является до некоторой степени условным и зависит от длительности наблюдения. В быстропеременных полях (например, для рентгеновых лучей, в которых электрическое поле меняет свое направление на противоположное за период $T \approx 10^{-18}$ — 10^{-20} *сек*) металлы будут вести себя, как диэлектрики, поскольку заряд за время изменения электрического поля не успеет переместиться по телу на сколько-нибудь заметное расстояние. Известна, далее, большая группа тел, обладающих способностью переносить заряд, но значительно слабее, чем в металлах; эти тела называются полупроводниками. Наконец, даже в таком типичном диэлектрике, как стекло, при достаточно длительном наблюдении (месяцы, годы) можно обнаружить постепенное перераспределение заряда по всему телу.

Огромная количественная разница в проводимости тел обусловливает резкие качественные различия в их поведении и оправдывает введенное выше деление тел на проводники и диэлектрики в электростатике, т. е. для статических полей, практически не изменяющихся в течение наблюдения. Кроме того, следует указать, что разница в проводимости различных тел в свою очередь обусловлена качест-

венной разницей в строении этих тел, в распределении и подвижности составляющих их микроскопических электрических зарядов (электронов, ионов, атомных ядер).

Исторически деление тел на проводники и диэлектрики относится ко времени начала изучения электризации тел при трении. Долгое время считалось, что электризоваться при трении могут только тела, в настоящее время называемые диэлектриками. Только в начале прошлого века первым русским электротехником В. В. Петровым была экспериментально показана возможность электризации металлов трением («стеганием»). Трудность электризации металлических тел трением, очевидно, была связана с тем, что заряд, выделявшийся в местах натирания, распределялся по всему телу и соединенным с ним телам, в частности и по телу экспериментатора.

Вопросы строения проводников и механизма перемещения зарядов в них будут разбираться подробнее в следующем разделе, посвященном законам электрического тока. Пока же мы определим проводники как ***тела, в которых электрические заряды способны перемещаться под действием сколь угодно слабого электростатического поля.*** При электризации проводника сообщенный ему заряд будет перераспределяться до тех пор, пока в любой точке внутри проводника напряженность электрического поля, создаваемого данным распределением зарядов, не станет равной нулю:

$$E_{\text{пров}} = 0. \tag{9.1}$$

Из (8.21) тогда следует, что

$$\varphi_{\text{пров}} = \text{const}, \tag{9.2}$$

т.е. электрический потенциал всех точек внутри и на поверхности проводника одинаков. Сообщенный проводнику избыточный заряд вследствие взаимного отталкивания составляющих его микрозарядов должен, очевидно, распределиться по поверхности проводника. Это распределение зависит от формы проводника и должно быть таким, чтобы создаваемое им внутри проводника поле удовлетворяло условиям стационарности (9.1) и (9.2). Из постоянства потенциала вдоль поверхности следует, что ***линии электрического поля в изоляторах, окружающих проводник, должны быть перпендикулярны к поверхности проводника***, как это показано на рис. 1.35.

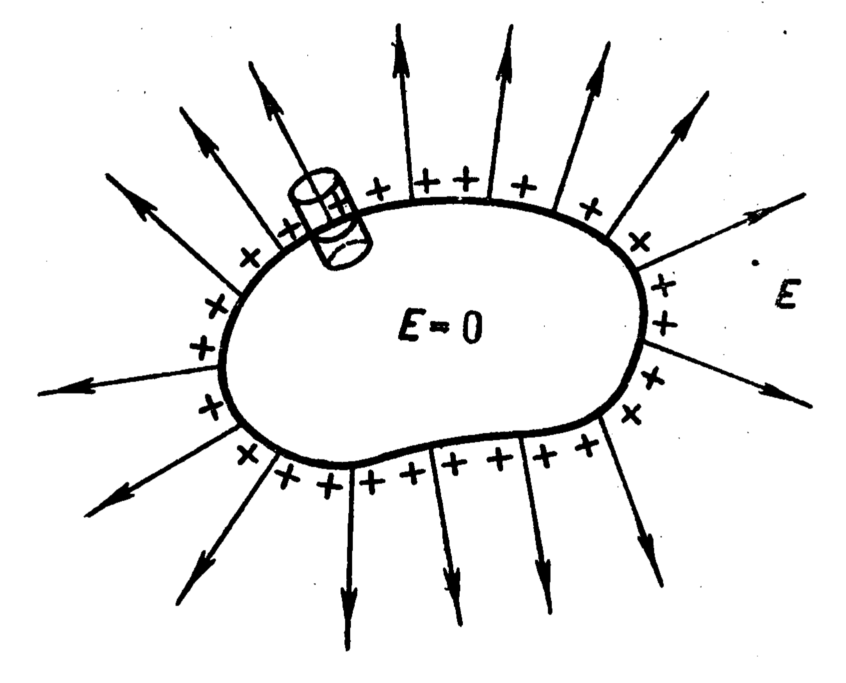


Рис. 1.35

Построив (рис. 1.35) бесконечно малый цилиндр, пересекающий границу проводник—изолятор, и применив к этому цилиндру теорему

Гаусса, можно показать, что на границе

$$\left.\begin{aligned} D = D_n = k_0 4\pi\sigma \\ \text{и} \qquad E = E_n = k_0 \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

где σ — поверхностная плотность заряда на проводнике.

В проводниках могут свободно перемещаться не только заряды, принесенные извне, но и микроскопические заряды, из которых состоят атомы и молекулы проводника (электроны, ионы). Поэтому при помещении незаряженного проводника во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0$ свободные микроскопические заряды будут перемещаться к его поверхности, положительные — по полю, а отрицательные — против поля (см. рис. 1.36, *а*). На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, а на другом — избыток отрицательного до тех пор, пока создаваемое этими зарядами дополнительное поле $\mathbf{E}_{доп}$ не скомпенсирует внешнее поле $\mathbf{E}_0$ во всех точках внутри проводника. При этом суммарное поле

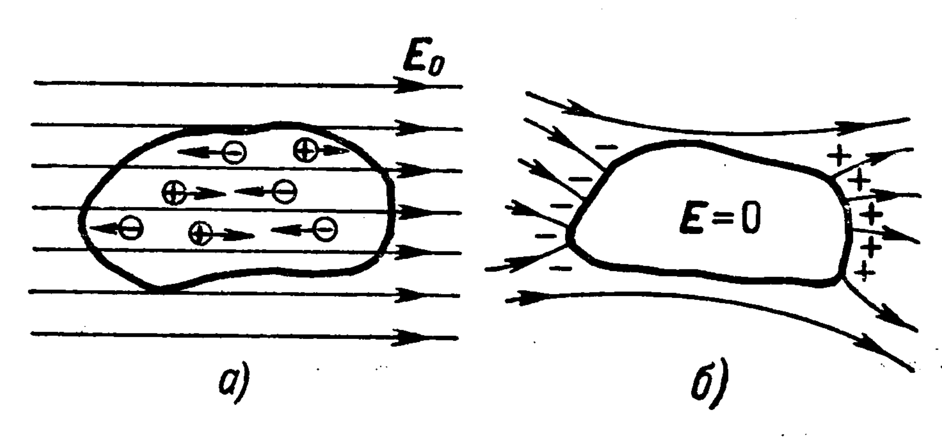


Рис. 1.36.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{доп} \qquad (9.4)$$

внутри проводника и на его поверхности будет удовлетворять условиям (9.1)—(9.3), а вблизи проводника будет заметно отличаться от своего первоначального значения $\mathbf{E}_0$ (рис. 1.36, *б*). Заряды на противоположных краях проводника называются **индуктированными**, или **наведенными**.

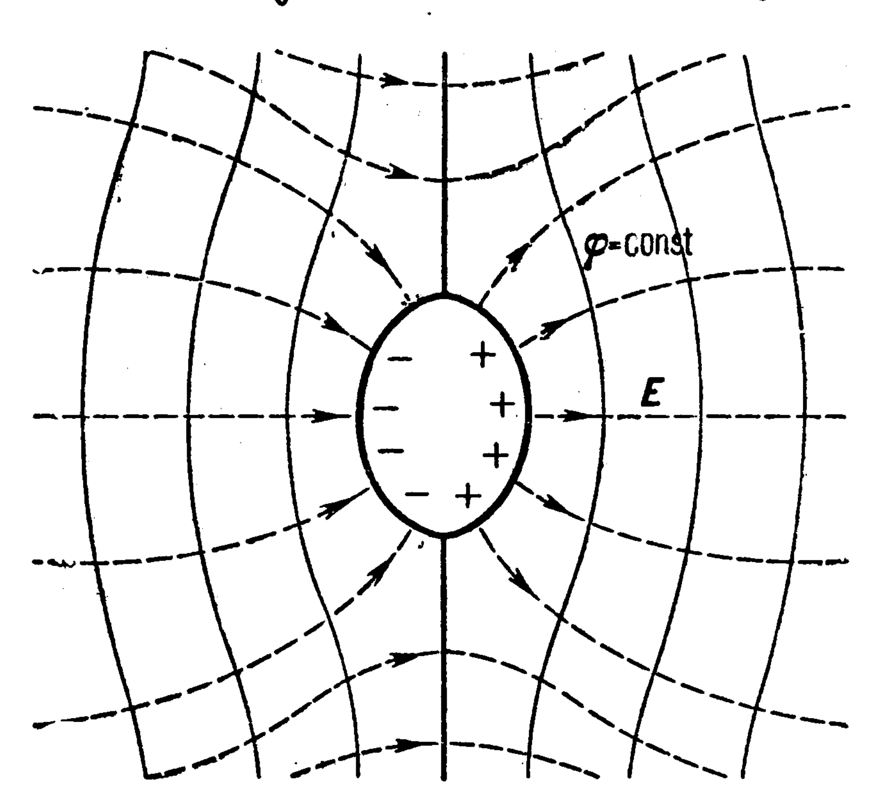


Рис. 1.37.

Линии суммарного поля $\mathbf{E}$ и вектора $\mathbf{D}$ будут частично кончаться на индуктированных отрицательных зарядах и вновь начинаться (в таком же количестве) на индуктированных положительных зарядах. Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ будут огибать проводник, а одна из них, потенциал которой равен потенциалу проводника, будет пересечена последним (рис. 1.37).

Следует помнить, что в электростатике поверхность любого проводника, а следовательно, и системы соединенных проводников образует одну эквипотенциальную поверхность.

Возникновение индуктированных зарядов на проводнике, помещенном в электрическое поле, используется для зарядки проводников при помощи так называемых электростатических индукционных машин. Если отвести индуктированный заряд одного

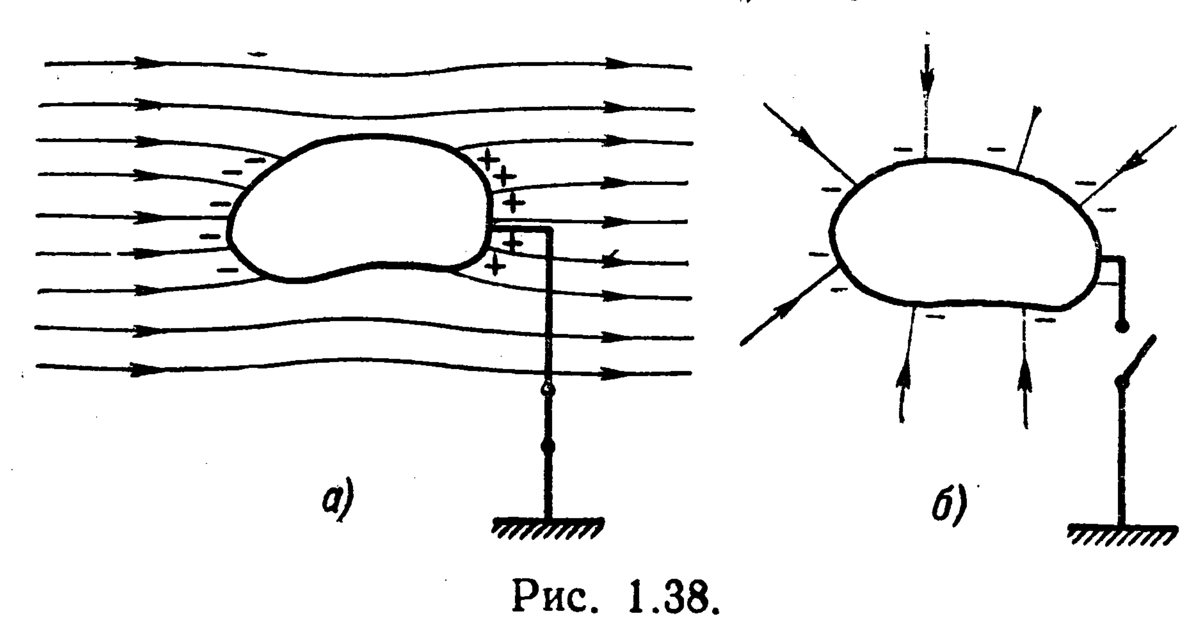


Рис. 1.38.

знака на другой проводник (например, в землю) и отключить последний, то первый проводник останется заряженным электричеством противоположного знака (рис. 1.38, *а* и *б*).

Отсутствие поля внутри проводника, помещенного в электрическое поле, широко применяется в технике для электростатической защиты от внешних электрических полей (экранировки) различных электрических приборов и проводов.

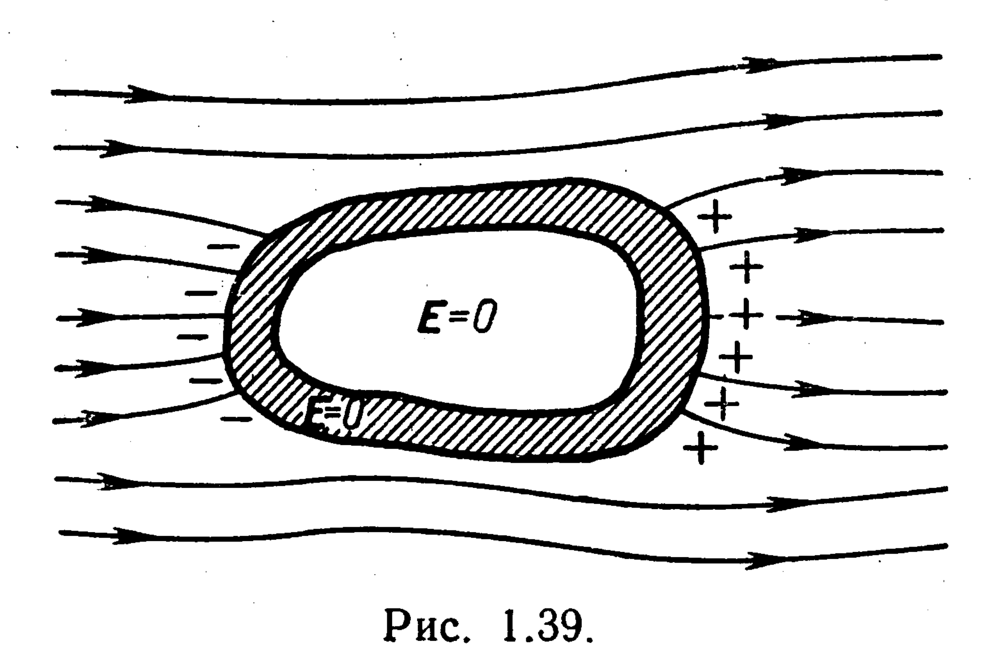


Рис. 1.39.

Очевидно, поскольку внутри проводника $\mathbf{E}=0$ и $\varphi=\text{const}$, наличие полостей внутри проводника никак не скажется на распределении зарядов и значениях $\mathbf{E}$ и φ. Следовательно, в замкнутой полости внутри проводника (рис. 1.39) всегда $\mathbf{E}=0$ и $\varphi=\text{const}$. Если прибор должен быть защищен от воздействия внешнего электрического поля, то его можно поместить в подобной замкнутой

полости внутри проводника. Заметим, что, как правило, достаточной электростатической защитой являются не только сплошные металлические стенки полости, но и замкнутые экраны из густой металлической сетки.

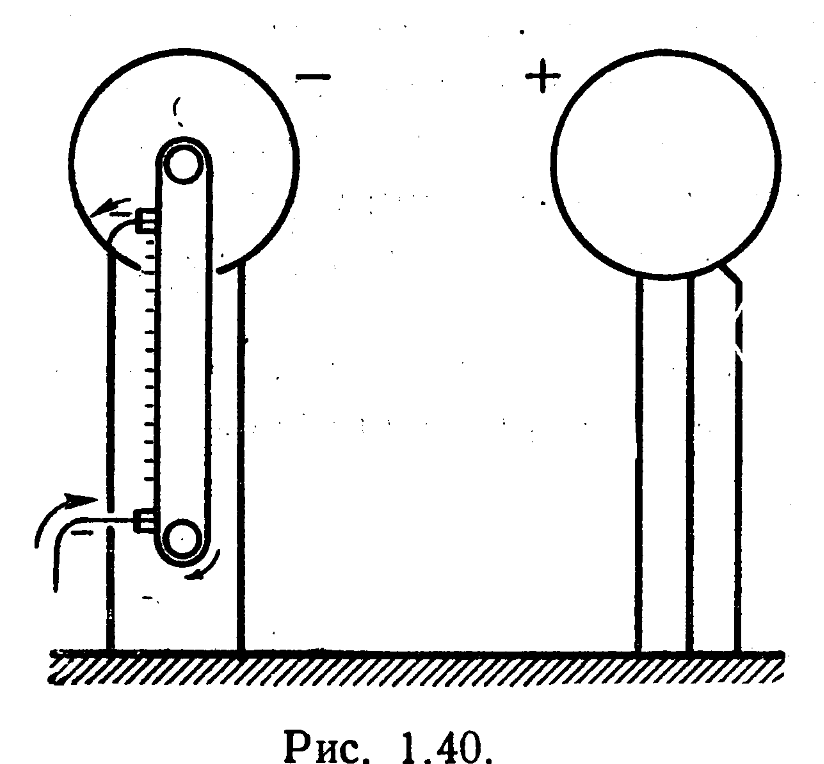


Рис. 1.40.

Если поместить на внутреннюю поверхность полого проводника электрический заряд, то этот заряд немедленно перейдет на наружную поверхность проводника, повышая потенциал последнего. Этим пользуются в электростатических генераторах, применяемых в ядерной технике. На рис. 1.40 изображен схематический разрез генератора Ван-де-Граафа. Электрический заряд передается бесконечной непроводящей ленте, переносящей его внутрь большой металлической сферы. Там заряд снимается и переходит на наружную поверхность проводника. Таким образом удается постепенно сообщить сфере очень большой заряд и достигнуть разности потенциалов в несколько миллионов вольт.

§ 10. Диэлектрики в электростатическом поле

В идеальном диэлектрике нет свободных зарядов, способных под действием электрического поля перемещаться через весь диэлектрик. Атомы и молекулы диэлектрика содержат равные количества положительных и отрицательных микроскопических зарядов и в целом электрически нейтральны. Как указывалось выше, в § 4, электрические поля, определяющие взаимодействие микроскопических зарядов, имеют внутри атомов величину порядка

$$10^{11}\ н/к = 10^{11}\ дж/к \cdot м = 10^{11}\ в/м$$

и во много раз превышают величину максимальных достижимых на практике макроскопических полей ($\sim 10^7\ в/м$). Этим объясняется высокая устойчивость атомов и молекул во внешних электрических полях и относительно слабое воздействие этих полей на стационарное распределение зарядов внутри атома.

Характер этого воздействия зависит от конкретного строения тела. В зависимости от строения мы можем разделить все диэлектрические вещества на три большие группы.

1. К первой группе принадлежат диэлектрики, у которых «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов совпадают. Таковы, например, парафин, бензол и ряд других углеводородов,

газообразные водород, азот и др. Молекулы таких диэлектриков в отсутствие внешнего электрического поля не обладают дипольным моментом (рис. 1.41, *а*). Во внешнем поле «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов молекулы смещаются в противоположные стороны на некоторое расстояние l, малое по сравнению с размерами молекулы (рис. 1.41, *б*). Каждая молекула при этом приобретает дипольный электрический момент

$$p = ql, \tag{10.1}$$

величина которого в первом приближении прямо пропорциональна приложенному полю **E**. При снятии внешнего поля молекулы возвращаются в первоначальное состояние и дипольный момент обращается в нуль. Подобные диполи называются «упругими».

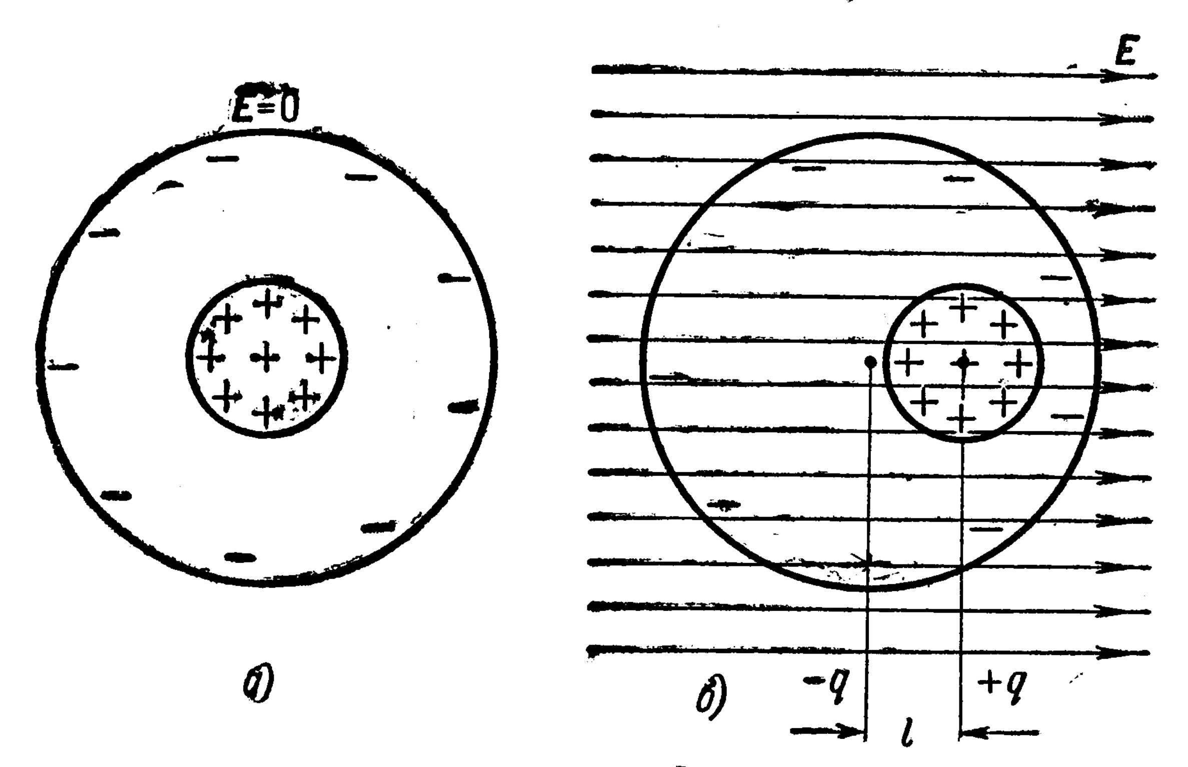


Рис. 1.41.

2. Вторую группу диэлектриков составляют такие вещества, как вода, нитробензол и др., молекулы которых имеют асимметричное строение. При этом «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов молекулы не совпадают друг с другом и молекула представляет собой «жесткий» диполь даже в отсутствие внешнего поля.

Численная величина дипольного момента таких полярных молекул обычно имеет порядок

$$p = ql \approx 10^{-19}\,\text{к} \cdot 10^{-10}\,\text{м} = 10^{-29}\,\text{к} \cdot \text{м},$$

или, что то же самое,

$$p \approx 10^{-29}\ \text{СГС}.$$

При отсутствии внешнего поля ($\mathbf{E} = 0$) дипольные моменты отдельных молекул вследствие теплового движения в каждый данный момент времени ориентированы в пространстве хаотично. Среднее

значение проекции вектора **p** на любое направление при этом тождественно равно нулю ($\bar{p}_x=0$), и диэлектрик в целом дипольным моментом не обладает.

При помещении такого диэлектрика в однородное внешнее поле на каждый жесткий диполь будут действовать электрические силы, стремящиеся повернуть его вдоль поля. Вращательный момент возникающей пары сил (рис. 1.42) будет равен

$$M_{\text{вр}}=Fh=qEl\sin\alpha=qlE\sin\alpha=pE\sin(\widehat{\mathbf{p},\mathbf{E}}). \qquad (10.2)$$

С другой стороны, хаотическое тепловое движение препятствует ориентации диполей по полю и вновь располагает жесткие диполи под самыми различными углами α к направлению поля. В результате этих противоположных воздействий среднее значение проекции дипольного момента молекулы на направление поля $\bar{p}_{\text{E}}=p\,\overline{\cos\alpha}$ станет не равным нулю. Величина p_{E} будет в первом приближении прямо пропорциональна напряженности поля E и обратно пропорциональна абсолютной температуре T. Весь диэлектрик в целом будет обладать дипольным моментом, направленным вдоль внешнего поля **E**.

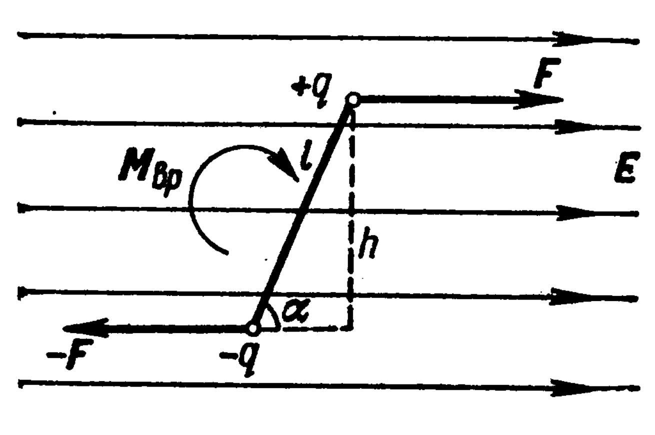


Рис. 1.42.

3. К третьей группе относятся кристаллические диэлектрики, имеющие ионное строение (хлористый натрий, хлористый калий и др.). При внесении их в электрическое поле происходит некоторое небольшое смещение положительных ионов кристаллической решетки по полю, а отрицательных—против поля. Такой диэлектрик в целом также будет обладать дипольным моментом, направленным вдоль внешнего поля и пропорциональным величине последнего.

Как мы видим, во всех перечисленных группах диэлектриков при внесении их во внешнее электрическое поле происходит изменение состояния, называемое поляризацией диэлектрика, которое заключается в том, что весь объем диэлектрика приобретает электрический момент.

Эта поляризация во всех случаях приводит к уменьшению напряженности поля, создаваемого внешними зарядами в диэлектрике. Выше, в § 4, это ослабление электрического поля в диэлектрике мы характеризовали величиной диэлектрической проницаемости ε. Если сила взаимодействия между зарядами в пустоте равна F_0, а в диэлектрической среде F, то согласно закону Кулона

$$F=\frac{F_0}{\varepsilon},$$

следовательно, напряженность поля в диэлектрике

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (10.3)$$

Очевидно, что значение величины ε зависит от строения и свойств молекул диэлектрика, а также от способности диэлектрика поляризоваться во внешнем электрическом поле.

Для установления количественных закономерностей поляризации мы рассмотрим случай простейшей геометрической конфигурации — диэлектрическую пластинку, заполняющую плоский конденсатор и находящуюся, следовательно, в практически однородном внешнем электрическом поле $\mathbf{E}_0$ (см. рис. 1.43). В результате поляризации пластинка приобретет дипольный момент $\mathbf{P}_v$, являющийся суммой дипольных моментов $\mathbf{p}_i$ всех молекул диэлектрика в данном объеме:

$$\mathbf{P}_v=\sum_i \mathbf{p}_i. \quad (10.4)$$

Дипольный момент единицы объема, называемый **вектором поляризации**, очевидно, будет равен

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{P}_v}{V}=\frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{Sd}, \quad (10.5)$$

где d — толщина пластинки, S — площадь ее грани и $V=Sd$ — ее объем.

Вектор $\mathbf{P}$ направлен вдоль электрического поля $\mathbf{E}$, в котором находится диэлектрик. Для не слишком сильных полей в соответствии с опытом можно принять, что величина вектора поляризации пропорциональна величине напряженности поля, т. е.

$$P \sim E. \quad (10.6)$$

В системе единиц Гаусса вектор поляризации имеет размерность $\frac{[\text{заряд}]\cdot[\text{длина}]}{[\text{объем}]}=\frac{[\text{заряд}]}{[\text{длина}]^2}$, совпадающую с размерностью напряженности поля, и коэффициент пропорциональности безразмерен. В системе СИ размерности $E\left(\frac{н}{к}\right)$ и $P\left(\frac{к}{м^2}=\frac{к^2}{н\cdot м^2}\frac{н}{к}\right)$ различны. Поэтому соотношение (10.6) принято писать в виде

$$P=\varkappa\varepsilon_0 E, \quad (10.7)$$

где безразмерный множитель ϰ называется **диэлектрической восприимчивостью** данного вещества и зависит от его строения.

В результате возникновения объемной поляризации на гранях диэлектрика, обращенных к пластинам конденсатора, концы молекулярных диполей окажутся некомпенсированными соседними

диполями, как это имеет место внутри диэлектрика. Поэтому, как изображено на рис. 1.43, на правой грани, обращенной к отрицательной пластине конденсатора, окажется избыток положительного заряда с некоторой поверхностной плотностью $+\sigma'$. На противоположной грани диэлектрика, обращенной к положительной пластине конденсатора, окажется избыток отрицательного заряда с такой же по абсолютной величине поверхностной плотностью $-\sigma'$. Эти так называемые поляризационные, или связанные*), заряды не могут быть переданы соприкосновением другому телу без разрушения молекул диэлектрика, так как они обусловлены самими поляризованными молекулами.

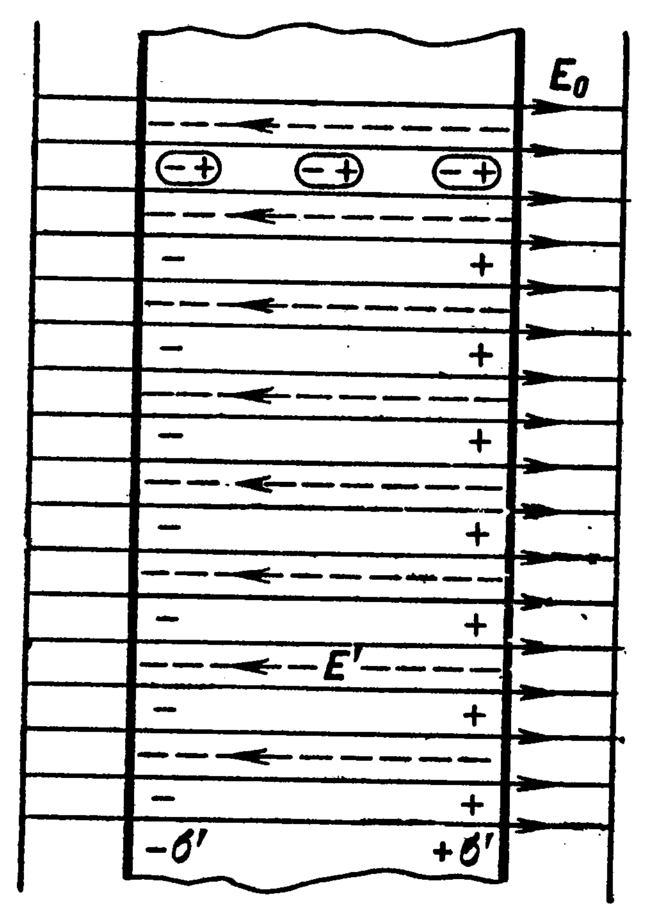


Рис. 1.43.

Образование поляризационных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля $\mathbf{E}'$. Как видно из рис. 1.43, внутри диэлектрика это дополнительное поле $\mathbf{E}'$ направлено против внешнего поля $\mathbf{E}_0$ и ослабляет последнее. Поэтому результирующее электрическое поле E внутри диэлектрика равно

$$E=E_0-E'. \qquad (10.8)$$

Дополнительное поле E' может быть рассчитано как поле, созданное двумя плоскими гранями диэлектрика, равномерно покрытыми поляризационными зарядами с поверхностной плотностью $\pm\sigma'$. Тогда согласно (7.18) $E'=\frac{k_0}{\varepsilon_0}4\pi\sigma'$ и

$$E=E_0-\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi\sigma'. \qquad (10.9)$$

Для выяснения величины поверхностной плотности поляризационных зарядов σ' свяжем последнюю с величиной вектора поляризации P. Согласно (10.5) полный дипольный момент пластинки диэлектрика равен

$$P_v=PV=PSd. \qquad (10.10)$$

С другой стороны, тот же дипольный момент по определению (4.7) должен равняться произведению величины поляризационного заряда каждой грани $q'=\sigma'S$ на расстояние между зарядами, т. е. на толщину пластинки d:

$$P_v=\sigma'Sd. \qquad (10.11)$$

---

*) Иногда их называют еще фиктивными.

Сравнивая (10.10) и (10.11), мы видим, что *поверхностная плотность поляризационных зарядов σ' численно равна величине вектора поляризации диэлектрика P.* Подставляя это значение σ' в (10.9) и используя соотношение (10.7), получим

$$E = E_0 - \frac{k_0}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi P = E_0 - 4\pi k_0 \varkappa E. \qquad (10.12)$$

Из (10.12) можно найти искомую величину результирующего электрического поля E внутри диэлектрика:

$$E = \frac{E_0}{1 + 4\pi k_0 \varkappa}. \qquad (10.13)$$

Сопоставляя (10.13) с (10.3), мы можем выразить относительную диэлектрическую проницаемость среды через электрическую восприимчивость диэлектрика:

$$\varepsilon = 1 + k_0 \cdot 4\pi\varkappa. \qquad (10.14)$$

В системе Гаусса $k_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$ и

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa_{\text{гс}}. \qquad (10.14а)$$

В системе СИ $k_0 = 1/4\pi$ и

$$\varepsilon = 1 + \varkappa_{\text{СИ}}. \qquad (10.14б)$$

Ввиду так называемой рационализации записи электростатических формул в системе СИ численное значение диэлектрической восприимчивости $\varkappa$ в ней будет в 4π раз больше, чем в системе СГС.

Из рассмотренного выше механизма поляризации диэлектриков следует, что вектор поляризации **P** всегда направлен вдоль реального поля **E**. Следовательно, электрическая восприимчивость $\varkappa$ всегда положительна ($\varkappa > 0$) и $\varepsilon > 1$. В газах поляризация отдельных молекул происходит независимо друг от друга и $\varkappa$ прямо пропорциональна плотности газа. У диэлектриков с жесткими диполями ориентационная поляризация и восприимчивость, как уже указывалось выше, обратно пропорциональны абсолютной температуре.

Особую группу диэлектриков составляют так называемые сегнетоэлектрики, нашедшие в последнее время широкое практическое применение. Свое название они получили по имени типичного представителя этой группы — сегнетовой соли (двойной натриево-калиевой соли виннокаменной кислоты), поляризационные характеристики которой были подробно изучены советскими физиками И. В. Курчатовым, П. П. Кобеко и др.

В кристаллах сегнетоэлектриков самопроизвольно возникают макроскопические области, в которых дипольные моменты отдельных молекул ориентированы одинаково и при отсутствии внешнего электрического поля. При этом в каждой соседней области эта

ориентация различна, и кристалл в целом дипольным моментом не обладает (рис. 1.44).

При внесении сегнетоэлектрика во внешнее электрическое поле начинают ориентироваться по полю сразу целые поляризованные области. Поэтому даже в слабых электрических полях такой диэлектрик обладает высокой диэлектрической проницаемостью ε, достигающей нескольких тысяч.

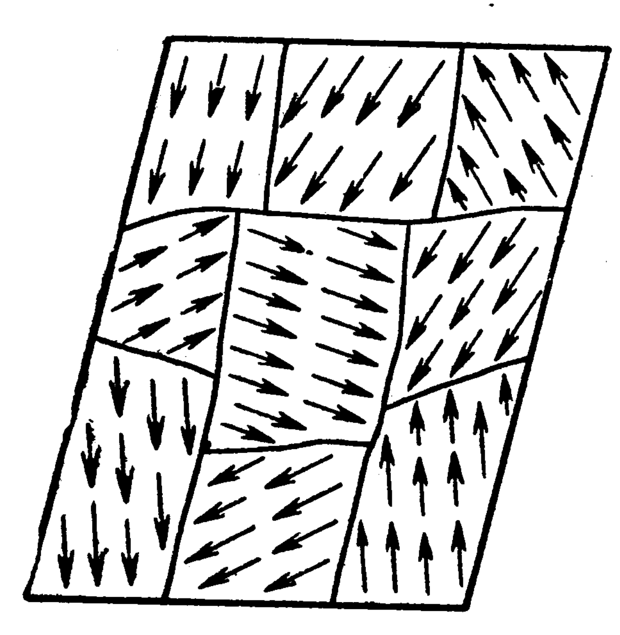


Рис. 1.44.

При нагревании сегнетоэлектрика области самопроизвольной поляризации при некоторой температуре разрушаются и диэлектрическая проницаемость ε падает до обычных значений порядка нескольких десятков. У сегнетовой соли эта критическая температура сравнительно низка, около $+25°$ С. От подобного недостатка свободен изученный советским физиком Б. М. Вулом новый сегнетоэлектрик — титанат бария, обладающий высокой диэлектрической проницаемостью в широком интервале температур. Оказалось, что титанат бария является представителем целой группы новых сегнетоэлектриков, имеющих близкое строение и обладающих рядом технически важных свойств.

Деформация электронных орбит в атомах при помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле, т. е. образование упругих диполей, происходит во всех случаях. Однако благодаря большой устойчивости внутриатомных движений эти деформации весьма малы, не изменяют существенным образом строения всего диэлектрика, а обусловленная ими электрическая поляризация при наличии жестких диполей является лишь небольшой добавкой к ориентационной поляризации последних (повороту по полю).

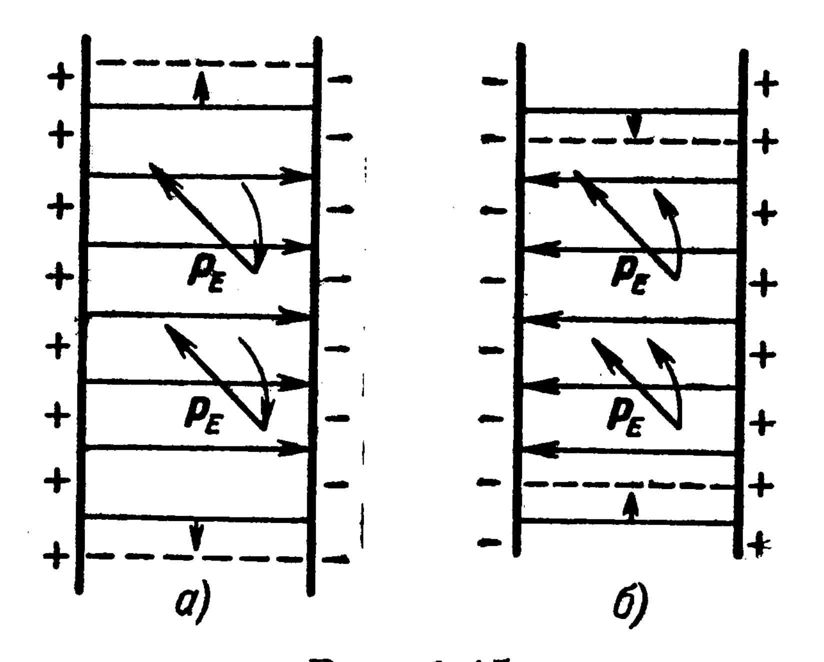


Рис. 1.45.

В некоторых твердых диэлектриках, построенных определенным образом из полярных молекул (жестких диполей), было обнаружено интересное явление, получившее название пьезоэлектричества. Если кристалл такого вещества подвергнуть упругой деформации, например растяжению (рис. 1.45, *а*) или сжатию (рис. 1.45, *б*), то составляющие его молекулярные диполи могут определенным образом поворачиваться и изменять поляризацию кристалла. При

этом на противоположных гранях кристалла появляются связанные заряды, создающие электрическое поле и разность потенциалов между этими гранями. При переходе от растяжения к сжатию и обратно меняется знак поляризации и возникающей разности потенциалов.

В подобных кристаллах обязательно наблюдается и обратный пьезоэлектрический эффект: если к кристаллу приложить внешнюю разность потенциалов, то, как, например, изображено на рис. 1.46, вследствие поворота диполей будут наблюдаться деформации растяжения или сжатия.

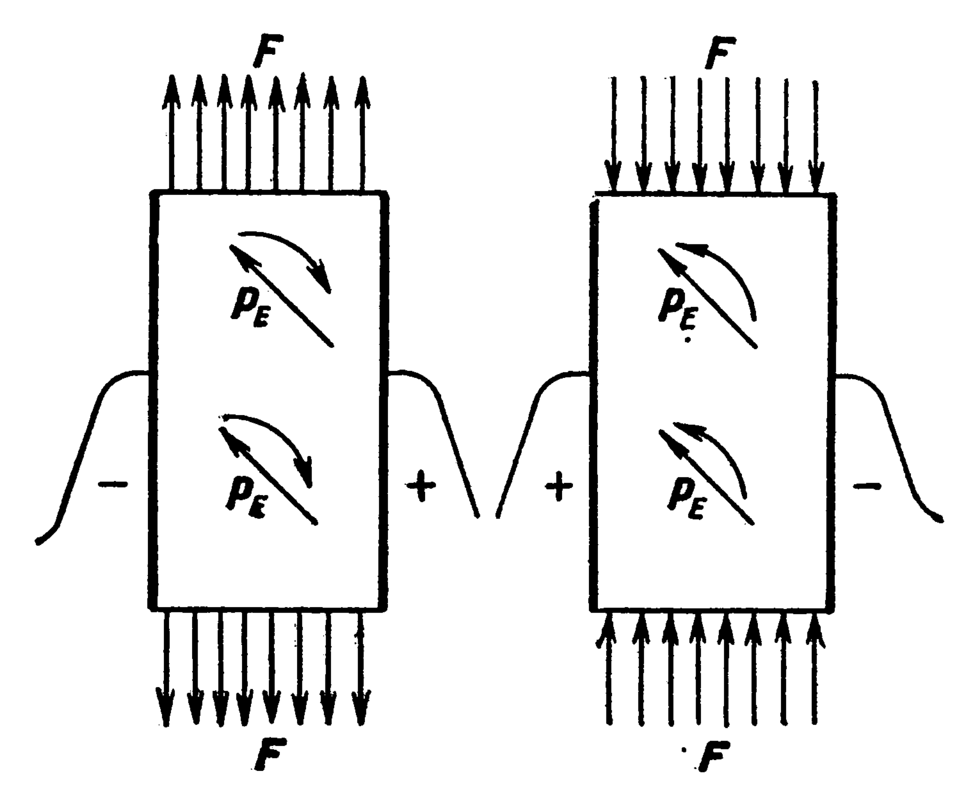


Рис. 1.46.

На рис. 1.45 и 1.46 изображены случаи, когда кристалл вырезан так, что электрическое поле и деформация взаимно перпендикулярны. Можно создать такую ориентацию кристаллических осей, что электрическое поле и деформация будут параллельны друг другу. Кроме того, в третьей группе диэлектриков (стр. 66), имеющих ионное строение, есть такие, у которых положительные и отрицательные ионы в электрическом поле решетки смещаются в противоположных направлениях, создавая общую деформацию всего кристалла.

Изменение размеров тел под действием внешнего электрического поля в общем случае называется электрострикцией. При взаимном смещении противоположно заряженных элементов тела во внешнем поле электрострикция будет происходить независимо от направления поля.

Пьезоэлектрические и электрострикционные свойства кристаллов кварца, сегнетовой соли, титаната бария и некоторых других диэлектриков широко используются в так называемых электроакустических приборах для преобразования механических (звуковых и

ультразвуковых) колебаний в электрические и обратно. Пьезоэлектрические датчики позволяют регистрировать деформации, толчки, преобразовывая их в электрические импульсы, которые передаются на большие расстояния к записывающим электрическим приборам.

Русский ученый Эпинус в 1757 г. обнаружил еще одно интересное свойство некоторых твердых диэлектриков. Оказалось, что в кристалле турмалина молекулярные диполи все направлены вдоль одной из его кристаллографических осей. Такой кристалл в целом всегда поляризован даже в отсутствие внешнего электрического поля, до некоторой степени аналогично тому, как кусок железа сохраняет свое намагничивание в отсутствие внешнего магнитного поля.

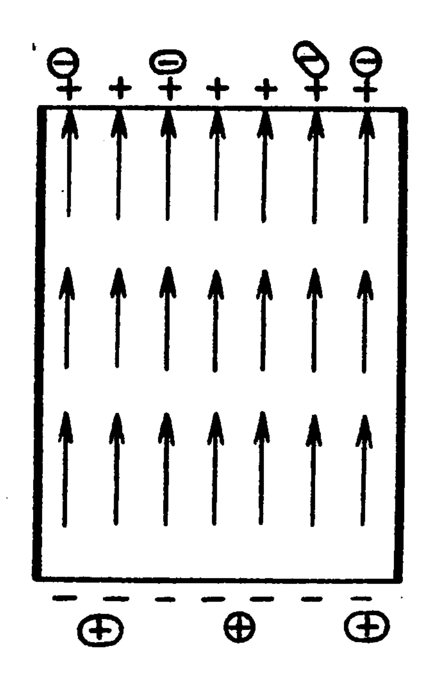


Рис. 1.47.

Поляризационные заряды, находящиеся на противоположных гранях кристалла турмалина, притягивают находящиеся в воздухе в небольших количествах заряженные пылинки и ионы. Прилипая к граням кристалла (рис. 1.47), эти пылинки и ионы постепенно нейтрализуют поляризационные заряды и уничтожают поле поляризованного кристалла.

Однако если такой кристалл нагреть, то вследствие теплового расширения поляризация единицы объема — вектор **P** — уменьшится и компенсация поляризационного заряда адсорбированными ионами и пылинками нарушится. Это изменение поляризации $\Delta\mathbf{P}(T)$ можно обнаружить по создаваемому им электрическому полю. Подобное явление зависимости естественной поляризации кристаллов от температуры называется *пироэлектричеством*.

Пироэлектрическими свойствами обладают лишь некоторые вещества, кристаллизующиеся в так называемой триклинной кристаллографической системе, обладающей весьма низкой пространственной симметрией.

§ 11. Поле в неоднородной среде и на границах раздела диэлектриков

В предыдущем параграфе мы рассмотрели пример плоскопараллельной пластины из диэлектрика, помещенной в однородное внешнее поле $\mathbf{E}_0$ (см. рис. 1.43). Эта пластина поляризовалась и приобретала дипольный момент единицы объема **P**. Дополнительное поле, создаваемое поляризованной пластиной, можно было рассчитывать, как поле плоского конденсатора с поверхностной плотностью заряда $\sigma' = \pm P$.

В соответствии с (7.15) и (7.18) напряженность поля равна нулю вне диэлектрической пластины, а внутри нее, учитывая направление

этого поля,

$$\mathbf{E}' = -\frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi \mathbf{P}. \tag{11.1}$$

Полная напряженность поля в диэлектрике

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi \mathbf{P}. \tag{11.2}$$

Следует отметить, что выражение (11.2) для полной напряженности поля остается справедливым и в вакууме вне диэлектрика. В этих точках пространства поляризация отсутствует ($\mathbf{P}=0$) и автоматически $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0$.

При не слишком сильных полях в соответствии с (10.7) вектор поляризации пропорционален напряженности поля и

$$\mathbf{P} = \varkappa \varepsilon_0 \mathbf{E}. \tag{11.3}$$

Из (11.2) и (11.3), окончательно находим, что

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + 4\pi k_0 \varkappa \varepsilon_0} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon}. \tag{11.2a}$$

По определению вектора электростатической индукции (5.3) имеем

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon}. \tag{11.4}$$

Сопоставляя (11.4) с (11.2), мы можем окончательно записать:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} + \frac{k_0}{\varepsilon_0} 4\pi \mathbf{P} \right). \tag{11.5}$$

Вне диэлектрика

$$\mathbf{P} = 0 \text{ и } \mathbf{D}_{\text{вак}} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \tag{11.6}$$

Определение вспомогательного вектора $\mathbf{D}$ (11.5) является более общим, чем (5.3). При нелинейной зависимости $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$ уравнение (11.3) становится чисто формальным, так как тогда диэлектрическую восприимчивость $\varkappa$ и связанную с ней относительную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = 1 + k_0 \cdot 4\pi\varkappa \tag{11.7}$$

следует считать сложными функциями величины напряженности поля E. Соотношение же (11.5) остается справедливым при любом сколь угодно сложном законе зависимости $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$.

Внесем в электрическое поле $\mathbf{E}_0$, созданное внешними зарядами, кусок диэлектрика не в виде плоскопараллельной пластинки, а имеющий более сложную форму. Тогда дополнительное поле $\mathbf{E}'$, создаваемое диэлектриком, уже не будет сосредоточено внутри него, как в случае плоскопараллельной пластинки, и выйдет наружу.

Суммарное поле

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}' \tag{11.8}$$

изменится не только внутри диэлектрика, но и снаружи его. Источниками этого суммарного поля являются не только внешние, но и поляризационные заряды. Поэтому линии вектора напряженности поля будут начинаться и кончаться не только на внешних, но и на поляризационных зарядах, а на границах диэлектрика, где сосредоточены последние, число линий вектора **E** будет скачкообразно меняться.

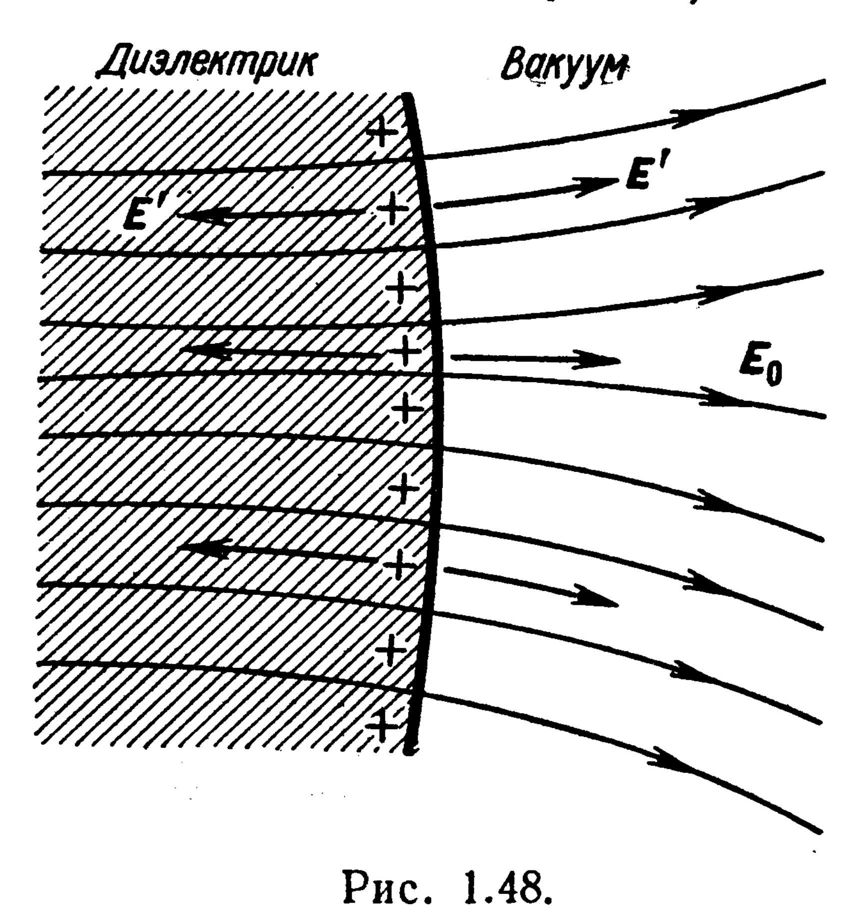


Рис. 1.48.

Рассмотрим небольшой участок поверхности диэлектрика на границе его с вакуумом. Вектор поляризации диэлектрика на этом участке обозначим через **P**. Поверхностная плотность поляризационных зарядов σ' будет равна, как и в случае пластинки, величине P. Расчленим, как показано на рис. 1.48, суммарное поле **E** на поле **E**$'$, создаваемое поверхностными поляризационными зарядами, и поле **E**$_0$, создаваемое всеми остальными зарядами (как внешними, так и расположенными на противоположном конце диэлектрика).

На расстояниях, малых от поверхности, можно считать ее плоской и вычислять **E**$'$ для бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью $\sigma'=P$. Линии этого поля будут перпендикулярны к поверхности и по обе стороны от нее направлены в противоположные стороны. В соответствии с (7.14) справа, в вакууме, $E'=\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 2\pi\sigma'=\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 2\pi P$, а слева, в диэлектрике, $E'=-\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 2\pi P$.

Поэтому суммарное поле в диэлектрике $E_{\text{диэл}}$ у самой границы раздела будет меньше, чем суммарное поле в вакууме $E_{\text{вак}}$ с противоположной стороны этой границы, на величину $\frac{k_0}{\varepsilon_0}4\pi P_{\text{диэл}}$, т. е.

$$E_{\text{вак}}=E_{\text{диэл}}+\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi P_{\text{диэл}}. \tag{11.9}$$

Умножим обе части этого равенства на электрическую постоянную ε_0. Тогда получим:

$$\varepsilon_0 E_{\text{вак}}=\varepsilon_0\left(E_{\text{диэл}}+\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi P_{\text{диэл}}\right). \tag{11.10}$$

В вакууме поляризация отсутствует, $\varepsilon=1$ и в соответствии с (11.5) и (5.3)

$$\varepsilon_0 E_{\text{вак}} = D_{\text{вак}}. \tag{11.11}$$

В диэлектрике согласно (11.5)

$$\varepsilon_0\left(E_{\text{диэл}}+\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi P_{\text{диэл}}\right)=\varepsilon_0\left(1+\frac{k_0}{\varepsilon_0}\cdot 4\pi\varkappa\varepsilon_0\right)E_{\text{диэл}}= \\ =\varepsilon_0\varepsilon E_{\text{диэл}}=D_{\text{диэл}}. \tag{11.12}$$

Из (11.9) следует, что на границе диэлектрика, вследствие наличия поляризационных зарядов,

$$E_{\text{вак}} \neq E_{\text{диэл}}, \tag{11.13}$$

но

$$D_{\text{вак}} = D_{\text{диэл}}. \tag{11.14}$$

При выводе соотношений (11.9) и (11.14) мы предполагали, что линии поля и направление вектора поляризации перпендикулярны к границе раздела. В общем случае, когда линии поля не перпендикулярны к границе раздела, соотношение (11.14) остается справедливым лишь для нормальных составляющих вектора **D**:

$$D_{n,\,\text{вак}} = D_{n,\,\text{диэл}}. \tag{11.15}$$

На границе двух диэлектриков с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 при наличии внешнего поля возникают поляризационные заряды разного знака с различными поверхностными плотностями $+\sigma_1'$ и $-\sigma_2'$ (см. рис. 1.49). Дополнительное поле, создаваемое этими зарядами, перпендикулярно поверхности, поэтому нормальные составляющие полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в обеих средах у границы раздела различны, а касательные составляющие одинаковы, т. е.

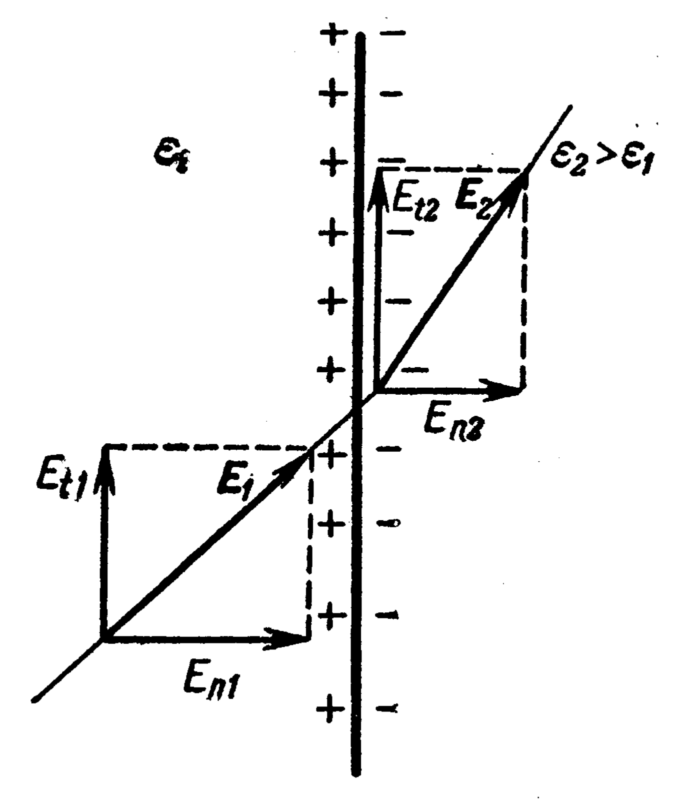


Рис. 1.49.

$$E_{t1} = E_{t2}, \tag{11.16}$$

как это изображено на чертеже.

Векторы электростатической индукции в обеих средах соответственно равны

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1\mathbf{E}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2\mathbf{E}_2. \tag{11.17}$$

Аналогично рассмотренному выше случаю границы диэлектрик — вакуум нормальная составляющая вектора индукции на границе

двух диэлектриков остается непрерывной:

$$D_{n1}=D_{n2}. \qquad (11.18)$$

Из (11.17) и (11.18) следует, что

$$\varepsilon_1 E_{n1}=\varepsilon_2 E_{n2}. \qquad (11.19)$$

На рис. 1.49 изображен случай, когда $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. При этом $E_{n2} < E_{n1}$ и линии вектора **E** при переходе через границу раздела преломляются, отклоняясь от перпендикуляра к границе раздела.

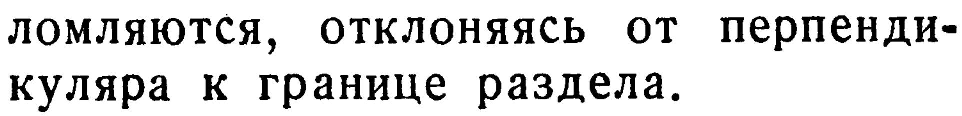


Рис. 1.50.

Из (11.16) и (11.17) следует, что

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} \qquad (11.20)$$

при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и $D_{t2} > D_{t1}$. При переходе через границу раздела из диэлектрика с меньшим значением ε в диэлектрик с большим значением ε нормальная составляющая вектора **D** остается неизменной, а касательная увеличивается, так что линии индукции преломляются под таким же углом, как и линии напряженности поля (см. рис. 1.50).

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектриков изменяется не только вектор напряженности электрического поля **E**, но и вектор электростатической индукции **D**. Однако поток индукции через произвольную площадку ΔS на границе раздела, равный по определению (5.11)

$$\Delta N=D_n\Delta S, \qquad (11.21)$$

с обеих сторон поверхности на основании (11.18) остается неизменным. Следовательно, число линий индукции, переходящих через границу, не меняется. Поэтому теорема Гаусса (6.4) остается справедливой для вектора **D** в самом общем случае при наличии в поле диэлектриков любой формы и размеров.

§ 12. Электрическая емкость проводников

Зарядим уединенный проводник, сообщив ему некоторый заряд q. Этот заряд распределится по поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника равнялась нулю (см. § 9). Для нахождения электрического поля, создаваемого заряженным проводником в про-

извольной точке M вне его (см. рис. 1.51), применим принцип наложения (2.7). Тогда получим

$$\mathbf{E}_M=\sum_i \mathbf{E}_i=\sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \qquad (12.1)$$

т. е. вектор напряженности электрического поля в точке M равен геометрической сумме полей, создаваемых в этой точке каждым из элементарных точечных зарядов q_i, на которые можно разбить весь заряд проводника.

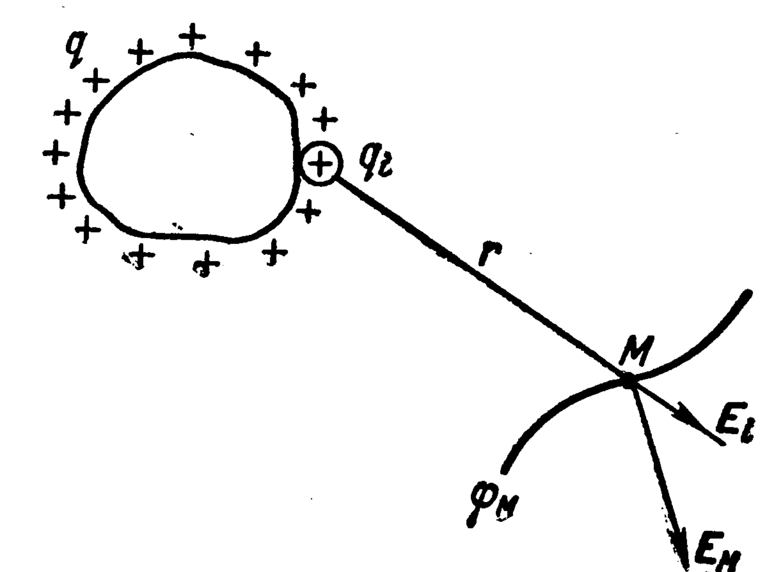


Рис. 1.51.

Аналогичным образом вычисляется и электрический потенциал в точке M:

$$\varphi_M=\sum_i \varphi_i=\sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i}, \qquad (12.2)$$

т. е. как алгебраическая сумма потенциалов, создаваемых каждым из элементарных точечных зарядов.

Поместим теперь на тот же проводник заряд q', в n раз больший первоначального, $q'=nq$. Чтобы поле внутри проводника вновь равнялось нулю, заряд q' должен распределиться по поверхности проводника подобно заряду q, т. е. все q'_i будут также в n раз больше соответствующих величин q_i.

Вычисляя потенциал в точке M, получим

$$\varphi'_M=\sum_i k_0 \frac{q'_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i}=\sum_i k_0 \frac{n q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i}=n \sum_i k_0 \frac{q_i}{\varepsilon_0 \varepsilon r_i}=n \varphi_M, \qquad (12.3)$$

т. е. потенциал в каждой точке поля возрастает прямо пропорционально заряду проводника. Это утверждение, конечно, справедливо и для всех точек внутри и на поверхности проводника, потенциал которых одинаков (см. § 9). Обозначая потенциал самого проводника через φ, получим

$$q \sim \varphi. \qquad (12.4)$$

Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности, перепишем (12.4) в виде

$$q=C\varphi \text{ или } C=\frac{q}{\varphi}. \qquad (12.5)$$

Коэффициент C называется **электрической емкостью** проводника. Изменим заряд проводника на Δq. Тогда его потенциал

возрастает на $\Delta\varphi$, так что

$$q+\Delta q=C(\varphi+\Delta\varphi). \quad (12.6)$$

Из (12.5) и (12.6) получаем, что

$$\Delta q=C\,\Delta\varphi, \quad (12.7)$$

и, следовательно,

$$\text{при } \Delta\varphi=1 \quad C=\Delta q. \quad (12.8)$$

Таким образом, *электроемкость проводника численно равна величине заряда, который нужно сообщить данному проводнику для увеличения его потенциала на единицу.*

Из формулы (12.5) можно определить размерность и установить единицы измерения электроемкости. В системе СГС

$$[C]=\frac{[q]}{[\varphi]}=\frac{г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot сек^{-1}}{г^{1/2}\cdot см^{1/2}\cdot сек^{-1}}=см,$$

т. е. электроемкость имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах.

В системе СИ за единицу электроемкости принимают емкость такого проводника, при сообщении которому заряда в 1 кулон его потенциал изменяется на 1 вольт. Эта единица называется фарадой (*ф* или F):

$$1ф=\frac{1\,к}{1\,в}=\frac{3\cdot 10^{9}\text{ СГС ед. заряда}}{\frac{1}{300}\text{ СГС ед. потенциала}}=$$
$$=9\cdot 10^{11}\text{ СГС ед. емкости } (см).$$

Так как фарада представляет собой крупную единицу, то на практике обычно пользуются ее миллионной долей, называемой микрофарадой: $1мкф=1\mu F=10^{-6}F=9\cdot 10^{5}см$, или даже еще в миллион раз меньшей единицей, называемой микромикрофарадой или пикофарадой: $1пф=1мкмкф=1\mu\mu F=1pF=10^{-12}F=$ $=0{,}9$ *см.*

Подсчитаем электроемкость уединенного сферического проводника. Из соображений симметрии очевидно, что сообщенный ему заряд распределится равномерно по поверхности проводника. Используя полученное для этого случая выше, в § 7 и § 8, решение, можно на основании (8.28) написать выражение для потенциала шара:

$$\varphi=k_0\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon R}, \quad (12.9)$$

где R — радиус шара, q — его заряд и ε — диэлектрическая проницаемость окружающей проводник среды. Подставляя выражение

(12.9) в общую формулу для электроемкости (12.5), получаем

$$C_{\text{шара}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon R}{k_0}. \qquad (12.10)$$

Электроемкость шара прямо пропорциональна его радиусу и диэлектрической проницаемости окружающей среды. В системе СГС

$$C_{\text{шара}} = \varepsilon R \ \textit{см}. \qquad (12.10а)$$

В системе СИ

$$C_{\text{шара}} = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R \ \textit{ф}. \qquad (12.10б)$$

В формуле (12.10б) радиус шара измеряется в метрах и, следовательно, диэлектрическая проницаемость ε и ε_0 в этой системе измеряется в $\textit{ф/м} = \textit{к/в}\cdot\textit{м} = \textit{к}^2/\textit{дж}\cdot\textit{м} = \textit{к}^2/\textit{н}\cdot\textit{м}^2$, что совпадает с размерностью этой величины (2.10).

Земной шар является уединенным сферическим проводником с радиусом $R = 6400$ *км*. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды практически равна единице. По формулам (12.10) электроемкость Земли равна

$$C_з = 6{,}4\cdot 10^8 \ \textit{см} \approx 700 \ \textit{мкф}.$$

Уединенные проводники имеют обычно электроемкость C значительно меньше электроемкости Земли. Сообщая проводнику заряд q, мы повышаем его потенциал до значения φ.

Заземлим такой проводник, т. е. соединим его с Землей, потенциал которой будем условно считать равным нулю ($\varphi_з = 0$). Вследствие разности потенциалов заряд с проводника будет перетекать в Землю до тех пор, пока в обоих телах не установится один и тот же потенциал:

$$\varphi' = \frac{q'}{C} = \frac{q''}{C_з}, \qquad (12.11)$$

где q' — заряд, оставшийся на проводнике, а $q'' = q - q'$ — заряд, отданный Земле.

Из (12.11) следует, что

$$\frac{q'}{q''} = \frac{C}{C_з} \ll 1, \quad q' \ll q'' \approx q \quad \text{и} \quad \varphi' \ll \varphi, \qquad (12.12)$$

т. е. при заземлении проводника малой емкости практически весь его заряд перейдет в Землю, потенциал этого проводника будет равен потенциалу Земли, а последний изменится на практически ничтожную величину φ'. Таким образом, заземляя различные проводники, мы приводим их к одному и тому же потенциалу Земли, который условно принимаем за начало отсчета, т. е. $\varphi_з = 0$.

Вопрос о том, каков же «на самом деле» потенциал Земли, если за нуль считать потенциал точек, бесконечно удаленных от

поверхности Земли, не является при этом существенным. Вследствие непрерывно падающих на Землю потоков космических лучей (в основном положительно заряженных протонов) и корпускулярного излучения Солнца (в основном отрицательных электронов) суммарный заряд Земли $q_з$ может быть отличен от нуля и постепенно изменяться со временем. Лишь систематические измерения электрического поля за пределами атмосферы с помощью спутников Земли смогут определить $q_з$ и соответственно $\varphi_з = q_з/C_з$. Кроме того, существует определенная разность потенциалов между земным шаром и окружающей его атмосферой, обеспечивающая напряженность поля в непосредственной близости к поверхности Земли порядка 100 *в/м*. Однако наличие практически постоянного или медленно изменяющегося земного электрического поля не дает возможности наблюдателю, находящемуся на земной поверхности, определить абсолютный потенциал Земли (по отношению к бесконечно удаленным точкам). Измеряя же лишь разности потенциалов, мы можем выбирать начало отсчета φ произвольно и полагать, как указывалось выше, условно $\varphi_з = 0$.

Из приведенных соотношений и примеров следует, что *электроемкость уединенного проводника зависит от его геометрических размеров, формы и диэлектрических свойств окружающей среды и не зависит от величины заряда проводника.*

Если проводник не является уединенным, т. е. вблизи него находятся другие проводники, то, заряжаясь, он будет наводить на поверхности соседних проводников заряды обоих знаков (см. § 9). Эти индуктированные заряды будут создавать дополнительное поле и изменять потенциал заряжаемого проводника. В результате увеличение его потенциала $\Delta\varphi$ при сообщении некоторого заряда Δq будет зависеть от размеров и расположения окружающих проводников. Отношение $C = \Delta q/\Delta\varphi$ для электроемкости проводника зависит, следовательно, не только от формы и размеров заряжаемого проводника, но и от его расположения относительно остальных проводников.

Как было показано в §§ 9 и 10, дополнительные поля $\mathbf{E}'$ индуктируемых и поляризационных зарядов всегда направлены п р о т и в поля источника $\mathbf{E}_0$. Поэтому при внесении в среду, окружающую заряженный проводник, других проводников и диэлектриков поле рассматриваемого проводника ослабляется, а его потенциал падает. В соответствии с (12.5) электроемкость проводника при этом возрастает по сравнению с емкостью того же проводника в вакууме в отсутствие других проводников и диэлектриков. Идя по этому пути, можно создавать приборы большой емкости, называемые к о н д е н с а т о р а м и (накопителями заряда).

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных прослойкой диэлектрика. Приближая вторую обкладку к первой

и помещая между ними вещество с высокой диэлектрической проницаемостью ε, можно создать конденсаторы большой емкости и накапливать на их обкладках большие заряды при незначительной разности потенциалов и малых объемах системы. Практически очень важно, что электрическое поле конденсатора сосредоточивается почти целиком в узком зазоре между его обкладками, так что его электроемкость не зависит от наличия других проводников и диэлектриков вблизи конденсатора.

При приложении к конденсатору некоторой разности потенциалов его обкладки заряжаются равными по величине зарядами противоположных знаков. *Под электроемкостью конденсатора $C_к$ понимается отношение заряда одной из его обкладок q к разности потенциалов $\varphi_2-\varphi_1=U$ между обкладками:*

$$C_к=\frac{q}{\varphi_2-\varphi_1}=\frac{q}{U}. \qquad (12.13)$$

Простейшей конструкцией конденсатора является плоский конденсатор, состоящий из двух проводящих плоских пластин (см. рис. 1.52), пространство между которыми заполнено диэлектриком с проницаемостью ε.

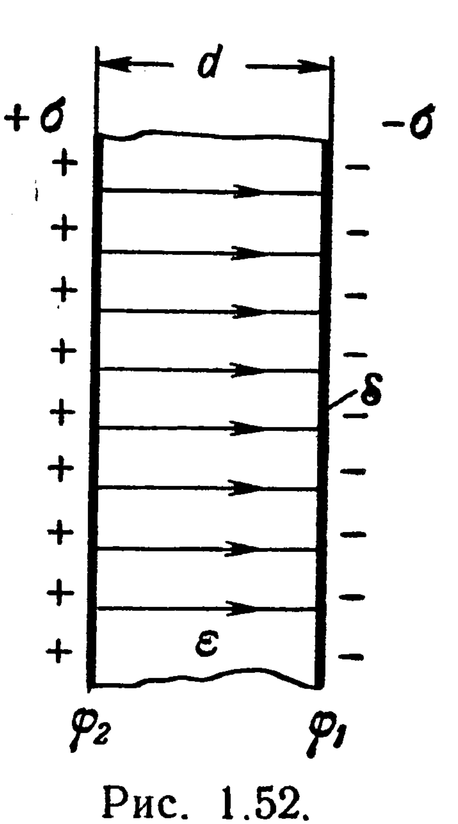


Рис. 1.52.

Когда линейные размеры l пластин велики по сравнению с расстоянием d между пластинами ($d \ll l$), можно пренебрегать краевыми эффектами и считать электрическое поле E внутри конденсатора практически однородным, а заряд q — распределенным по пластинам равномерно с поверхностной плотностью

$$\sigma=\frac{q}{S}. \qquad (12.14)$$

В этом случае напряженность электрического поля между пластинами согласно (7.17) равна

$$E=k_0\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}=k_0\frac{4\pi q}{\varepsilon_0\varepsilon\cdot S}. \qquad (12.15)$$

С другой стороны, пользуясь соотношением (8.21) между напряженностью поля и градиентом потенциала, для нашего случая однородного поля имеем

$$E=-\frac{d\varphi}{dn}=-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{d}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{d}=\frac{U}{d}. \qquad (12.16)$$

Сравнивая оба эти выражения для напряженности поля, получим

$$\frac{U}{d}=k_0\frac{4\pi q}{\varepsilon_0\varepsilon\cdot S}$$

или окончательно

$$C_{\text{пл.к}} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{k_0 \cdot 4\pi d}. \qquad (12.17)$$

В системе Гаусса $\varepsilon_0 = 1$, $k_0 = 1$ и

$$C_{\text{пл.к}} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \text{ см}. \qquad (12.17а)$$

В системе СИ $k_0 = \frac{1}{4\pi}$ и

$$C_{\text{пл.к}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \text{ ф}. \qquad (12.17б)$$

Как видно из (12.17), электроемкость плоского конденсатора зависит от его геометрических размеров (площади пластин S), от взаимного расположения проводников, т. е. от расстояния до соседней пластины d, и от диэлектрической проницаемости диэлектрика ε. Для увеличения емкости конденсатора следует увеличивать площадь пластин, уменьшать расстояние между ними и подбирать диэлектрическую прослойку с максимальным значением ε. Выбор диэлектрика, однако, ограничивает возможность уменьшения расстояния между пластинами d.

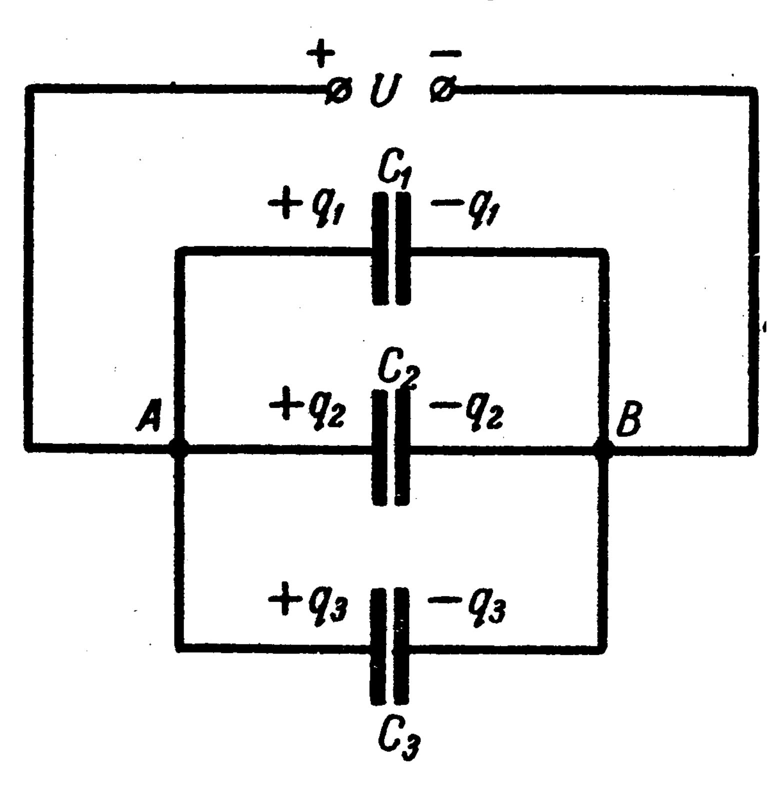


Рис. 1.53.

При сближении пластин конденсатора возрастает напряженность электрического поля $E = U/d$ в диэлектрической прослойке. В очень сильных полях (порядка 10^7 *в/м*) диэлектрик перестает быть изолятором. Для каждого диэлектрика имеется определенное максимально допустимое значение напряженности электрического поля $E_{\text{проб}}$, выше которого ток в диэлектрике сразу достигает очень больших значений и вызывает его разрушение, как говорят, **пробой** диэлектрика. Для предотвращения пробоя расстояние между пластинами не следует делать меньше некоторого минимального значения

$$d_{\text{мин}} = \frac{U}{E_{\text{проб}}}, \qquad (12.18)$$

а при постоянном расстоянии между пластинами к конденсатору нельзя прикладывать разность потенциалов, превышающую некоторое максимальное значение

$$U_{\text{макс}} = d \cdot E_{\text{проб}}, \qquad (12.19)$$

называемое **пробивным напряжением** данного конденсатора.

Для увеличения емкости конденсаторов C без сильного увеличения их линейных размеров конденсаторы соединяют параллельно в батарею. Для расчета емкости батареи при **параллельном соединении конденсаторов** рассмотрим схему такого соединения, изображенную на рис. 1.53. Пусть емкости соединяемых конденсаторов равны C_1, C_2, ..., C_n, а их заряды соответственно q_1, q_2, ..., q_n. Разность потенциалов U, приложенная между точками A и B, одинакова для всех конденсаторов. Тогда, согласно (12.13), заряд каждого конденсатора равен:

$$q_1=C_1U, \quad q_2=C_2U, \ldots, q_n=C_nU. \tag{12.20}$$

Складывая эти равенства и замечая, что полный заряд системы $q=q_1+q_2+\ldots+q_n$, получим

$$q=q_1+q_2+\ldots+q_n=(C_1+C_2+\ldots+C_n)\,U. \tag{12.21}$$

Полная электроемкость батареи конденсаторов $C_б$ равна отношению полного заряда системы q к приложенной разности потенциалов U:

$$C_б=\frac{q}{U}=C_1+C_2+\ldots+C_n=\sum_i C_i. \tag{12.22}$$

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей включенных в батарею конденсаторов.

Для предотвращения пробоя системы прибегают к **последовательному соединению конденсаторов** (рис. 1.54). Если к концам батареи приложить разность потенциалов U, то крайние пластины системы зарядятся разноименными зарядами $\pm q$. Вследствие электростатической индукции на всех промежуточных пластинах наведутся заряды, также численно равные $\pm q$, как это показано на схеме.

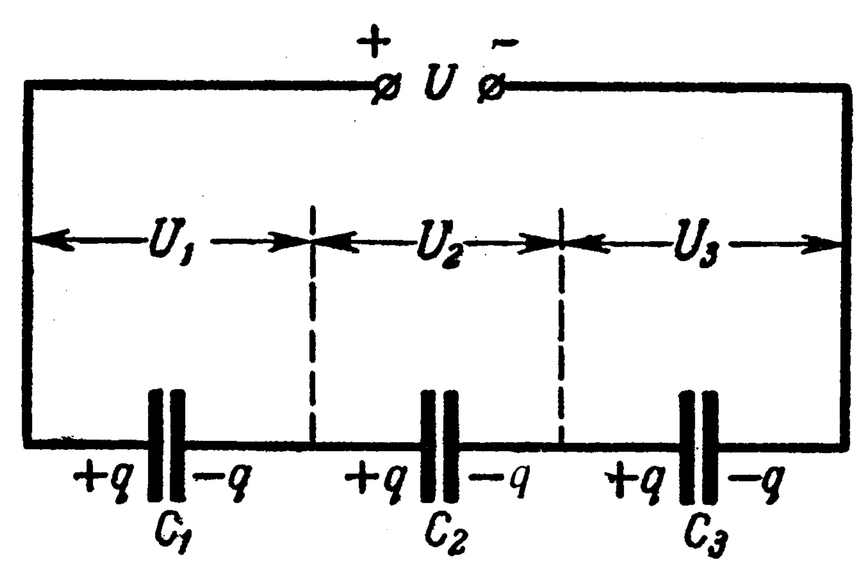


Рис. 1.54.

При этом полная разность потенциалов $U=\sum U_i$ распределится между конденсаторами соответственно их емкостям:

$$U_1=\frac{q}{C_1}, \quad U_2=\frac{q}{C_2}, \quad \ldots, \quad U_n=\frac{q}{C_n}. \tag{12.23}$$

Складывая все эти равенства, получим

$$U=U_1+U_2+\ldots+U_n=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}\right). \tag{12.24}$$

Отношение $U/q=1/C_б$ есть величина, обратная электроемкости всей системы, и иногда называется ее потенциальным коэффициентом. Из (12.24) следует, что

$$\frac{1}{C_б}=\frac{U}{q}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}=\sum_i \frac{1}{C_i}, \qquad (12.25)$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости всей батареи равна сумме обратных величин емкостей соединенных в батарее конденсаторов. Легко также видеть, что

$$\frac{1}{C_б}=\sum_i \frac{1}{C_i}>\frac{1}{C_i} \quad \text{и} \quad C_б<C_i$$

— *при последовательном соединении конденсаторов электроемкость батареи меньше электроемкости каждого из конденсаторов.*

Однако при этом падение потенциала на каждом из конденсаторов $U_i<U$, и можно, не опасаясь пробоя, соединять в батарею конденсаторы с меньшими расстояниями d и большими емкостями.

§ 13. Энергия электрического поля

Сообщим уединенному проводнику некоторый заряд q. Тогда вокруг него возникнет электрическое поле и потенциал проводника примет значение $\varphi=q/C$. Чтобы увеличить заряд проводника на dq, придется принести этот заряд из бесконечности к поверхности проводника и затратить на это работу, равную

$$dA=(\varphi-\varphi_\infty)\,dq=\varphi\,dq=\frac{1}{C}q\,dq, \qquad (13.1)$$

если считать $\varphi_\infty=0$.

Эта работа совершается внешними силами, перемещающими заряд против сил электрического поля проводника. При обратном перемещении заряда dq с поверхности проводника в бесконечно удаленную точку силы электрического поля совершат точно такую же по величине работу dA. Следовательно, заряженный проводник обладает потенциальной энергией W, за счет которой совершается работа его разрядки.

При увеличении заряда проводника на dq его потенциальная энергия возрастает на величину dW, равную работе dA, совершенной внешними силами

$$dW=dA=\frac{1}{C}q\,dq. \qquad (13.2)$$

Потенциальную энергию незаряженного проводника ($q=0$ и $\varphi=0$), не создающего вокруг себя электрического поля, будем считать

равной нулю. Тогда энергия W проводника, заряд которого достиг некоторой величины q, может быть найдена интегрированием выражения (13.2):

$$W=\int_0^W dW=\int_0^q \frac{1}{C} q\,dq=\frac{1}{C}\int_0^q q\,dq=\frac{1}{C}\frac{q^2}{2}. \qquad (13.3)$$

Используя зависимость (12.5), связывающую заряд проводника с его потенциалом, можно получить окончательное выражение для энергии заряженного проводника в виде

$$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}q\varphi=\frac{1}{2}C\varphi^2. \qquad (13.4)$$

Как мы видели в § 9, внутри заряженного проводника электрическое поле отсутствует. В процессе зарядки проводника электрическое поле возникает в пространстве, окружающем проводник. Поэтому мы будем считать, что электростатическая энергия заряженного проводника локализована в окружающем его электрическом поле и распределена в последнем с различной объемной плотностью в соответствии с различной величиной напряженности поля E на разных расстояниях от проводника.

Для нахождения связи между объемной плотностью энергии (энергией единицы объема) электрического поля и его напряженностью рассмотрим простейший случай однородного поля между пластинами плоского конденсатора.

Процесс зарядки такого конденсатора можно представить как последовательное перемещение бесконечно малых порций заряда dq с одной пластины на другую, в результате чего одна из пластин будет заряжаться положительно, а другая — отрицательно и между ними будет возникать постепенно возрастающая разность потенциалов $U=q/C_к$. Повторяя ход вывода, приведенного выше для уединенного проводника, легко получить выражение для полной электростатической энергии заряженного конденсатора:

$$W_к=\frac{q^2}{2C_к}=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}C_кU^2, \qquad (13.5)$$

совершенно аналогичное выражению (13.4).

Подставляя в (13.5) значения электроемкости и разности потенциалов в плоском конденсаторе (12.17) и (12.16), после преобразований получим

$$W_{пл\cdot к}=\frac{1}{2}C_кU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{k_0\cdot 4\pi d}E^2d^2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{k_0\cdot 8\pi}Sd=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{k_0\cdot 8\pi}V. \qquad (13.6)$$

Здесь E — напряженность электрического поля внутри конденсатора, а $V=Sd$ — его объем. Отсюда энергия единицы объема, или объемная

плотность энергии электрического поля

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{E^2}{k_0 \cdot 8\pi}, \tag{13.7}$$

оказывается прямо пропорциональной квадрату напряженности электрического поля.

В системе СГС

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}. \tag{13.7а}$$

В системе СИ

$$W_0 = \frac{\varepsilon E^2}{2} \frac{\text{дж}}{\text{м}^3}. \tag{13.7б}$$

Соотношение (13.7) выведено нами в простейшем случае однородного поля. Оно остается справедливым и для любых неоднородных полей, в которых напряженность поля E и плотность энергии W_0 меняются от точки к точке.

Согласно закону пропорциональности массы и энергии (т. I, гл. II, § 9), если электростатическое поле обладает энергией, то каждый элемент его объема обладает массой. Масса единицы объема электростатического поля равна

$$\varrho = \frac{W_0}{c^2}, \tag{13.8}$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость распространения света в пустоте. При напряженности электрического поля в 3000 *в/см* = 10 СГС ед. напряженности из (13.7а) и (13.8) находим плотность массы такого поля:

$$\varrho = \frac{10^2}{8\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} \approx 4 \cdot 10^{-21} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Видно, что она очень мала даже по сравнению с плотностью весьма разреженного газа (при $p = 10^{-6}$ *мм* рт. ст. имеем $\varrho_{\text{газа}} \approx 10^{-12}$ *г/см*^{3}).

С другими свойствами электрического и магнитного полей, более детально подтверждающими современные взгляды, что эти поля представляют собой особую форму материи, непрерывно распределенной в пространстве, мы познакомимся в дальнейших разделах курса.

Из выражения для энергии W системы заряженных тел можно определить величину механических (пондеромоторных) сил F, действующих между этими телами. Пусть энергия системы заряженных и поляризованных тел W зависит от какого-либо параметра x, например от размеров или координат одного из тел. Изменим этот параметр на величину dx, например, переместив данное тело. Тогда действующая в системе сила F_x совершит работу

$$dA = F_x\, dx \tag{13.9}$$

за счет уменьшения потенциальной энергии системы, т. е.

$$F_x\,dx = -\,dW, \quad F_x = -\frac{dW}{dx}. \tag{13.10}$$

Рассмотрим конкретный пример плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием между ними x. Энергия этого конденсатора согласно (13.5) и (12.17) равна

$$W = \frac{q^2}{2C_к} = k_0 \cdot 2\pi \frac{q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon S} x = k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} Sx \tag{13.11}$$

и при постоянных зарядах на пластинах ($q = \mathrm{const}$) прямо пропорциональна расстоянию между пластинами x. Подставляя в (13.10) значение W и производя дифференцирование, получим искомую силу

$$F_x = -\frac{dW}{dx} = -k_0 \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} S. \tag{13.12}$$

Знак минус указывает, что эта сила направлена против увеличения x, т. е. является силой притяжения. Таким образом, (13.11) приводит к тому же выражению для силы притяжения на единицу площади пластин $f = F_x/S$, что и полученное ранее (7.20).

Поскольку электростатическое поле неразрывно связано с электрическими зарядами, то энергию поля W можно также рассматривать как энергию взаимодействия зарядов. В случае двух точечных зарядов q_i и q_j, находящихся в пустоте на расстоянии r_{ij} друг от друга, согласно (8.8) энергия их взаимодействия равна

$$W_{ij} = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{13.13}$$

Если в пространстве имеется N различных точечных зарядов ($i, j = 1, 2, 3, \ldots, N$), то полная потенциальная энергия системы W будет равна сумме взаимных энергий всех пар зарядов, входящих в систему:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{k_0}{\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \tag{13.14}$$

Множитель $1/2$ в этом выражении нужен потому, что при суммировании по всем i и j от 1 до N каждое взаимодействие учитывается дважды. Например, энергия взаимодействия зарядов q_2 и q_3 входит под знаком суммы в (13.14) два раза: один раз как $\frac{k_0}{\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$ при $i = 2$ и $j = 3$ и второй раз как $\frac{k_0}{\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{32}}$ при $i = 3$ и $j = 2$. В каждом из членов значки i и j разные ($i \neq j$): члены с $i = j$ не учитываются, так как они соответствуют самодействию зарядов, которое для принятых нами точечных зарядов равно бесконечности ($r_{ii} = 0$).

Рассмотрим случай, когда заряд q распределен равномерно по поверхности сферы радиуса R. Для вычисления энергии такой системы проще всего воспользоваться формулой (13.3). Поскольку электроемкость шара C численно равна его радиусу R (в системе СГС), то

$$W_{шара} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{R}. \tag{13.15}$$

С другой стороны, согласно (7.5а) напряженность электрического поля вне заряженной сферы равна

$$E=\frac{q}{r^2}.$$

По (13.7) находим плотность энергии в окружающем пространстве:

$$W_0=\frac{E^2}{8\pi}=\frac{q^2}{8\pi r^4}.$$

Разобьем это пространство на бесконечно тонкие сферические слои радиуса r и толщины dr. Поверхность такого слоя равна $4\pi r^2$, а объем

$$dV=4\pi r^2\,dr.$$

Энергия электрического поля, заключенная в этом объеме, равна

$$dW=W_0\,dV=\frac{q^2}{8\pi r^4}\,4\pi r^2\,dr=\frac{q^2}{2}\frac{dr}{r^2}. \qquad (13.16)$$

Поскольку внутри сферы ($r<R$) поле отсутствует, для нахождения полной энергии поля надо проинтегрировать (13.16) в пределах от $r=R$ до $r=\infty$:

$$W=\int dW=\frac{q^2}{2}\int\limits_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{q^2}{2R}.$$

Полученный результат, естественно, совпадает с формулой (13.15), выведенной другим путем. К тому же выражению мы бы пришли, если бы мысленно разбили заряд q на бесконечно малые порции и подсчитали полную энергию парных взаимодействий по формуле (13.14).

Если заряд q распределен не только на поверхности, но и в объеме сферы, то поле внутри нее уже не равно нулю. Это вызывает увеличение энергии системы сверх (13.15). Если заряд q распределен равномерно по всему объему шара радиуса R, то полная энергия системы равна (вычислений мы не приводим)

$$W_{\text{шара}}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}. \qquad (13.17)$$

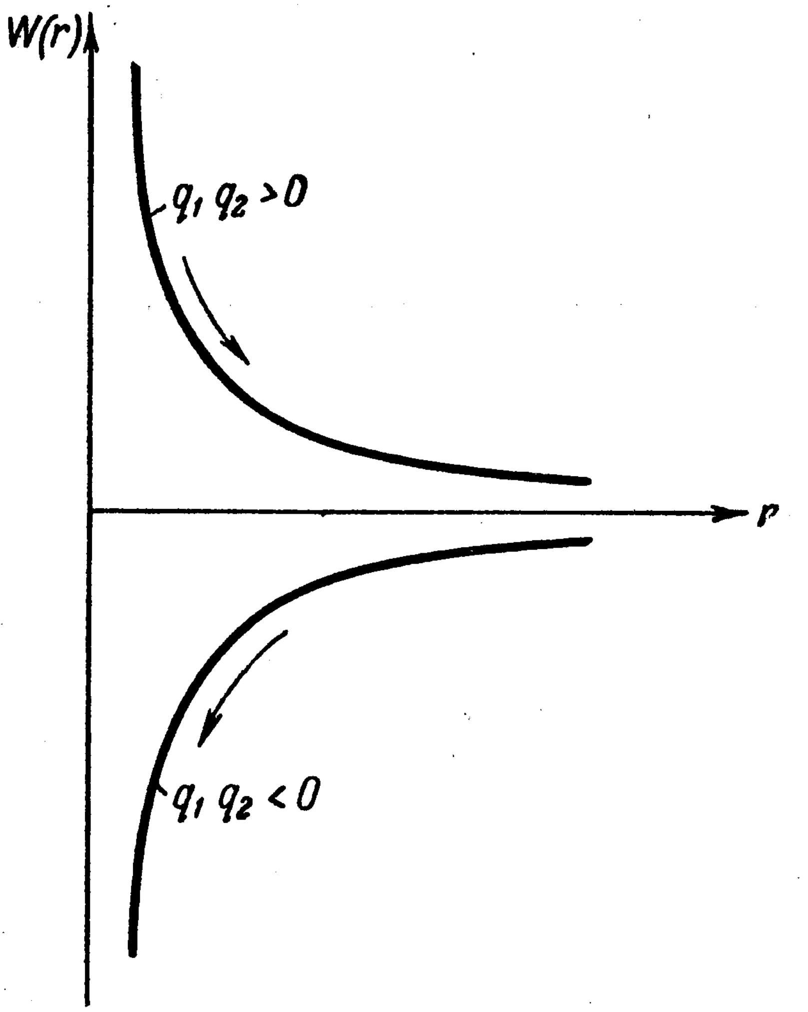


Рис. 1.55.

Используя выражения для энергии взаимодействия точечных зарядов (13.13) и (13.14), можно проанализировать вопрос об устойчивости системы неподвижных электрических зарядов. Мы уже неоднократно отмечали то обстоятельство, что любое вещество построено из электрически заряженных частиц. Естественно возникает вопрос о том, возможны ли такие конфигурации неподвижных друг относительно друга заряженных частиц, которые представляли бы собой атомы, молекулы и т. д. Подчеркнем, что речь идет об устойчивости системы под действием одних только электростатических сил. Полученный результат будет справедлив для любого — дискретного или непрерывного — распределения зарядов.

Неустойчивость системы из двух точечных зарядов очевидна. Одноименные заряды отталкиваются до бесконечности, а разноименные — притягиваются до полного соприкосновения и нейтрализуются. На рис. 1.55 изображен график зависимости потенциальной энергии этой системы от расстояния:

$$W(r)=\frac{q_1q_2}{r},$$

как для одноименных ($q_1q_2>0$), так и разноименных ($q_1q_2<0$) зарядов. В обоих случаях взаимодействие стремится уменьшить потенциальную энергию системы. Для одноименных зарядов $W_{мин}=0$ при $r=\infty$, а для разноименных $W_{мин}=-\infty$ при $r=0$. Условием устойчивого равновесия любой системы является минимум ее потенциальной энергии. Для рассмотренной системы двух точечных зарядов этот минимум наступает лишь при полном разрушении системы (разведении одноименных зарядов на бесконечность или полном слиянии разноименных зарядов).

Рассмотрим систему из трех точечных зарядов. В этом случае возможны конфигурации, при которых все три заряда находятся в равновесии, однако это равновесие будет неустойчивым. Подобное равновесие будет возможным, если: 1) все заряды не одного и того же знака, 2) заряды расположены вдоль одной прямой, 3) величины зарядов находятся в определенном соотношении.

Рис. 1.56.

Проведем через положительный заряд $+q$ прямую линию и расположим на ней на равных расстояниях r по обе стороны заряда $+q$ два одинаковых отрицательных заряда $-q'$. Заряд q тогда будет находиться в равновесии. Чтобы заряд $-q'$ также находился в равновесии, сила притяжения его к заряду q должна уравновешиваться силой отталкивания другого заряда $-q'$, т. е.

$$\frac{qq'}{r^2}=\frac{(q')^2}{(2r)^2},$$

откуда $q'=4q$ (см. рис. 1.56, *а*).

Полная энергия взаимодействия этих зарядов, находящихся в равновесии, будет равна

$$W_1=\frac{(q')^2}{2r}-\frac{qq'}{r}-\frac{qq'}{r}=\frac{16q^2}{2r}-2\frac{4q^2}{r}=0, \qquad (13.18)$$

т. е., как и следовало ожидать, не зависит от r.

Для выяснения, является ли данное положение равновесия устойчивым, рассмотрим изменение величины W при различных смещениях составляющих систему зарядов из равновесного положения.

Дадим центральному заряду $+q$ смещение y, перпендикулярное оси системы (рис. 1.56, *б*). Полная энергия тогда будет равна

$$W(y)=\frac{8q^2}{r}-\frac{8q^2}{\sqrt{r^2+y^2}}>0,$$

т. е. больше, чем в положении равновесия. На заряд $+q$ будет действовать сила, направленная к положению равновесия. По отношению к подобному смещению исходное равновесие оказывается устойчивым.

Дадим теперь центральному заряду $+q$ смещение x вдоль оси системы (рис. 1.56, *в*) и подсчитаем полную энергию в этом случае:

$$W(x)=\frac{8q^2}{r}-\frac{4q^2}{r+x}-\frac{4q^2}{r-x}=\frac{8q^2}{r}-\frac{8q^2r}{r^2-x^2}=-\frac{8q^2x^2}{r(r^2-x^2)}<0.$$

При таком смещении потенциальная энергия уменьшается и по отношению к нему исходное равновесие оказывается неустойчивым. На сместившийся заряд в этом случае действует сила, стремящаяся еще более удалить его от положения равновесия.

Оставим теперь центральный заряд $+q$ на месте и дадим обоим отрицательным зарядам $-4q$ одинаковые смещения Δr в разные стороны (рис. 1.56, *г*). Поскольку W_1 не зависит от r, то $W(\Delta r)=0$, и при таком смещении потенциальная энергия не изменяется вовсе. По отношению к подобному перемещению равновесие системы оказывается безразличным.

Испытывая различные другие изменения конфигурации зарядов, можно убедиться, что среди них имеются такие, при которых изменение потенциальной энергии $\Delta W=W-W_1$ либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю. Однако *если хотя бы при каком-либо одном типе изменения конфигурации потенциальная энергия ее уменьшается* (а такой случай — при $x\neq 0$ — мы уже разобрали), *то это изменение будет возрастать и исходное равновесие в целом неустойчиво.*

Анализируя выражение (13.14) в общем виде, можно доказать так называемую теорему Ирншоу: *устойчивое статическое распределение электрических зарядов невозможно.*

Поскольку любое пространственное распределение зарядов может быть представлено в виде системы бесконечно большого числа бесконечно малых зарядов, то все сказанное относится к любой статической системе. Следовательно, устойчивая статическая система зарядов возможна лишь в том случае, если, кроме электрических сил, в ней действуют еще другие силы неэлектрической природы.

В случае атомных систем между электронами и ядрами, кроме кулоновых сил, действуют еще силы тяготения. Однако эти силы изменяются с расстоянием по такому же закону, а по абсолютной величине ничтожно малы по сравнению с электростатическими.

Таким образом, электроны, входящие в атомы и молекулы, не могут образовать устойчивые статические системы. Атомы и молекулы не могут быть не чем иным, как динамическими системами электрических зарядов. Этот факт является прекрасной иллюстрацией положения диалектического материализма о невозможности существования материи без движения.

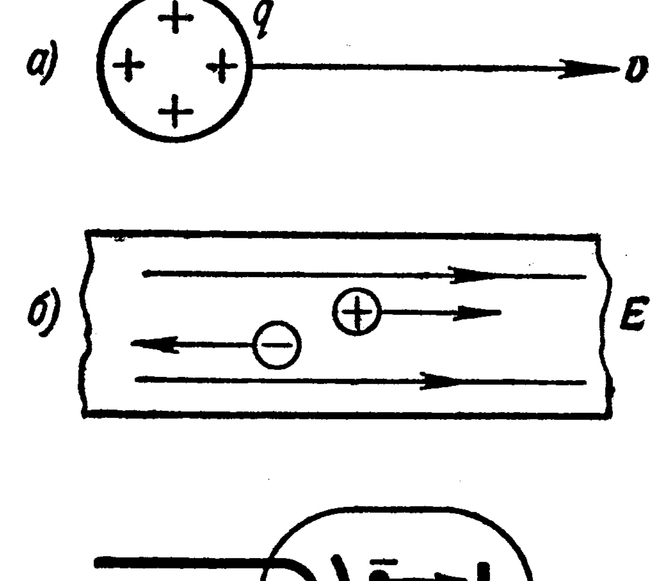
ЧАСТЬ II
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

ГЛАВА IV
ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 14. Электрический ток. Ток проводимости

Электрическим током называется направленное движение электрических зарядов. При этом возможны различные случаи.

Зарядим какое-либо тело, т. е. сообщим ему электрический заряд, и будем перемещать это тело в пространстве. В этом случае электрические заряды будут перемещаться вместе с макроскопическими телами, на которых они находятся (рис. 2.1, *а*). Такой ток называется конвекционным (переносным) током.



Рассмотрим теперь проводник, в котором создано и поддерживается внешнее электрическое поле **E**. Находящиеся внутри проводника свободные электрические заряды будут двигаться: положительные — по полю, а отрицательные — против поля (рис. 2.1, *б*). Случай, когда микроскопические электрические заряды движутся внутри неподвижного макроскопического тела (твердого, жидкого или газообразного), носит название тока проводимости.

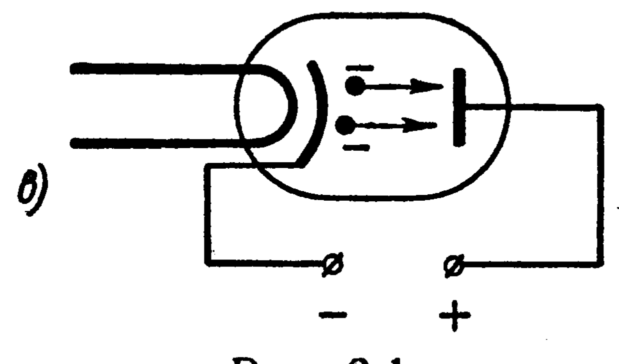


Рис. 2.1.

Третьим случаем является так называемый ток в вакууме, когда микроскопические электрические заряды движутся в пустоте независимо от макроскопических тел. Примером могут служить потоки электронов в электронной лампе (рис. 2.1, *в*).

Изучение законов электрического тока мы начнем с наиболее простого и технически наиболее важного случая тока проводимости, идущего по проводнику. Введем сначала некоторые основные понятия.

Заряженное тело A соединим проводником с землей (рис. 2.2). Тело A будет разряжаться, и через проводник пойдет электрический ток. За промежуток времени dt заряд тела A уменьшится на некоторую величину dq. Отношение

$$i=\frac{dq}{dt} \tag{14.1}$$

называется **током** в проводнике. Термин «сила тока», как устаревший и не соответствующий физическому смыслу описываемого им понятия, ныне не употребляется.

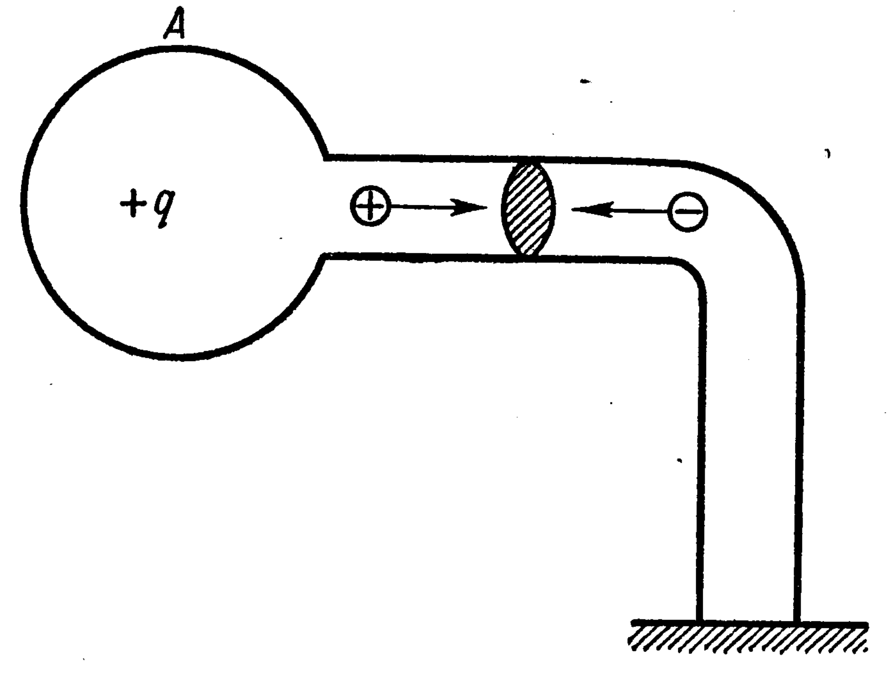


Рис. 2.2.

Если за равные промежутки времени через любое сечение проводника проходят одинаковые количества электричества, то ток

$$I=\frac{dq}{dt}=\text{const}$$

не будет зависеть от времени. Такой ток принято называть **постоянным** и обозначать символом I. Если же ток со временем меняется, т. е. $dq/dt \neq \text{const}$, то он является **переменным** и обозначается буквой i *).

Величина тока в системе СИ измеряется в **амперах**, причем эта величина определяется как добавочная, четвертая единица (см. § 32). Единица заряда — кулон определяется через ампер: это *заряд, протекающий через сечение проводника за* 1 *сек, при токе в нем* 1 *а:*

$$1\ \textit{к}=1\ \textit{а}\cdot 1\ \textit{сек} \approx 3\cdot 10^9\ \text{СГС ед. заряда.}$$

В общем случае при прохождении тока в проводнике перемещаются заряды обоих знаков, движущиеся в противоположных направлениях. В связи с этим понятие о направлении электрического тока является до некоторой степени условным. Исторически сложилось так, что за направление электрического тока условились считать направление движения положительных зарядов, или, что то же самое, направление, обратное движению отрицательных зарядов.

---

*) В электротехнике называют переменными и обозначают буквой **i** обычно только такие токи, величина которых меняется со временем по чисто синусоидальному закону.

Возвращаясь к рис. 2.2, мы можем сказать, что уменьшение заряда тела A на dq происходит как за счет уноса некоторого количества положительных зарядов $dq^+_{\rightarrow}$ вдоль направления тока по проводнику в землю, так и за счет перехода некоторого количества отрицательных зарядов $dq^-_{\leftarrow}$ из земли по проводнику к телу A против направления тока. В общем случае dq будет представлять собой арифметическую сумму двух количеств $dq = dq^+_{\rightarrow} + dq^-_{\leftarrow}$ и

$$i = \frac{dq^+_{\rightarrow} + dq^-_{\leftarrow}}{dt}. \tag{14.2}$$

§ 15. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников

Рассмотрим отрезок однородного цилиндрического проводника длиной l (рис. 2.3). Для того чтобы в этом проводнике шел постоянный ток I, необходимо внутри проводника поддерживать постоянное электрическое поле E. Так как напряженность электрического поля равна градиенту потенциала, взятого с обратным знаком (см. § 8), то

$$E = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{U}{l}, \tag{15.1}$$

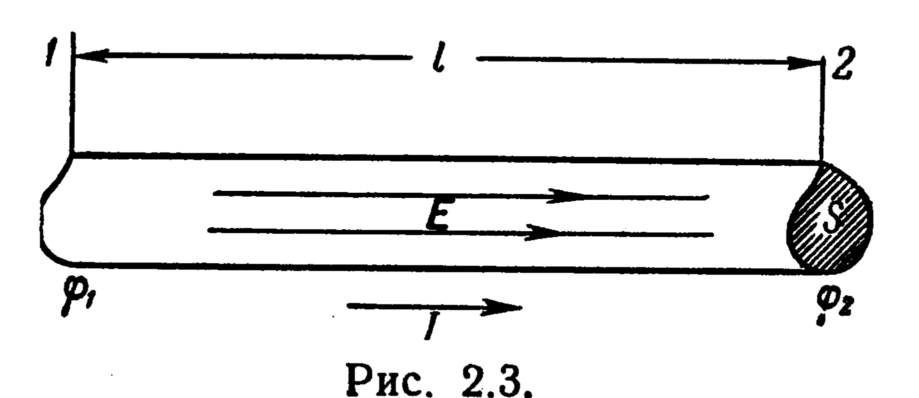


Рис. 2.3.

где φ_1 и φ_2 — электрические потенциалы в начальном и конечном сечении проводника, а

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{15.2}$$

— падение потенциала на выделенном нами участке электрической цепи *1—2*, называемое напряжением, приложенным к проводнику.

При изменении напряжения U меняется и ток I, текущий в проводнике. В 1826 г. Ом экспериментально установил прямую пропорциональность между током и напряжением:

$$I \sim U.$$

Обозначим коэффициент пропорциональности, характеризующий электрическую проводимость проводника, через G; величина R, обратная проводимости проводника, $R = 1/G$ называется его электрическим сопротивлением; тогда

$$I = GU = \frac{1}{R} U. \tag{15.3}$$

Сопротивления разных проводников численно различны. На рис. 2.4 приведены экспериментальные графики *1* и *2* закона Ома (15.3) для двух проводников с различными сопротивлениями. Уравнение (15.3) определяет соотношение между током и напряжением для конечного участка цепи и поэтому иногда называется законом Ома в интегральной форме: *ток, идущий в проводнике, численно равен отношению приложенного напряжения к сопротивлению проводника.*

Закон Ома в интегральной форме позволяет определить единицы сопротивления проводника: если $U=1$ и $I=1$, то $R=1$. В системе СИ единицей сопротивления является ом. Это — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 *в* идет ток в 1 *а*:

$$1\ \textit{ом}=\frac{1\ \textit{в}}{1\ \textit{а}}=\frac{\frac{1}{300}\ \text{СГС ед. напряжения}}{3\cdot 10^9\ \text{СГС ед. тока}}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 10^{11}}\ \text{СГС ед. сопротивления.}$$

Сопротивление проводника R зависит от его геометрических размеров и формы, а также материала, из которого сделан проводник. Для цилиндрических проводников сопротивление прямо пропорционально их длине l и обратно пропорционально площади поперечного сечения S:

$$R=\varrho\frac{l}{S}. \qquad (15.4)$$

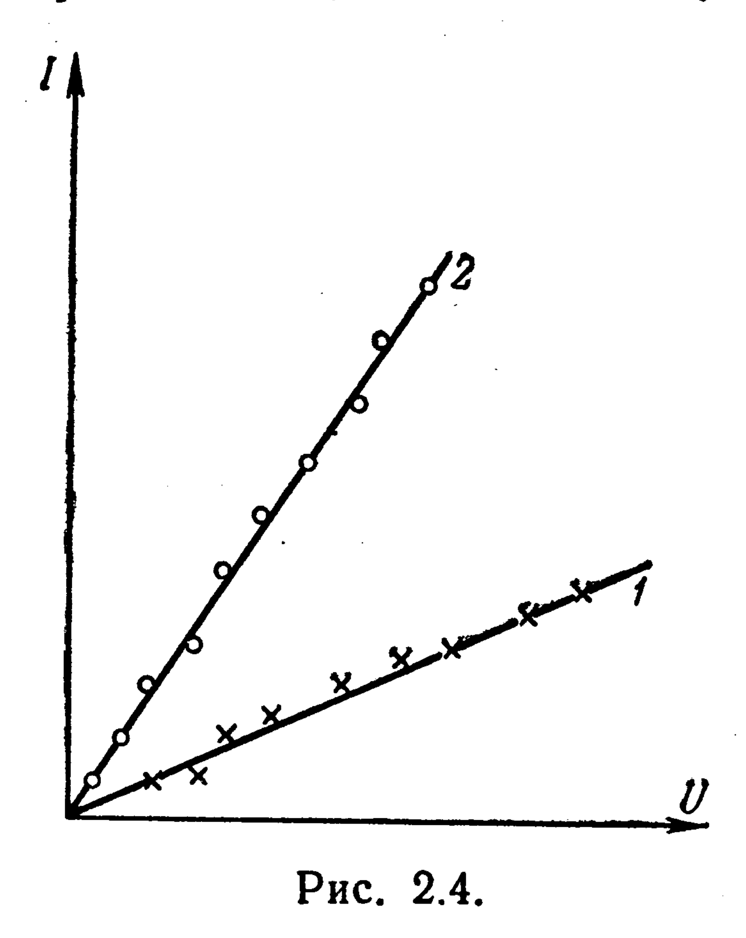


Рис. 2.4.

Коэффициент пропорциональности ϱ называется удельным сопротивлением вещества, из которого сделан проводник. Из соотношения $\varrho=\frac{RS}{l}$ определяются размерность и единицы измерения удельного сопротивления.

В системе СГС ток имеет размерность $[I]=\frac{[q]}{[t]}=г^{1/2}\cdot см^{3/2}\cdot сек^{-2}$, а напряжение $[U]=\frac{[A]}{[q]}=г^{1/2}\cdot см^{1/2}\cdot сек^{-1}$. Отсюда размерность сопротивления $[R]=\frac{[U]}{[I]}=сек\cdot см^{-1}$, а удельное сопротивление $[\varrho]=[R]\frac{[S]}{[L]}=сек$ имеет ту же размерность, что и время.

В системе СИ 1 *ом* = 1 *в*/1 *а* = 1 *дж*/*к*·*а* = 1 *дж*/*а*²·*сек*. Если R измерять в *ом*, l — в *м* и S — в *м*², то ϱ измеряется в *ом*·*м*²/*м* = *ом*·*м*, следовательно, 1 *ом*·*м* есть удельное сопротивление вещества, цилиндрик которого длиной 1 *м* и площадью поперечного сечения 1 *м*² имеет сопротивление 1 *ом*.

Применяемые в технике проводники имеют обычно большую длину и малое поперечное сечение. Поэтому длину проводов измеряют в *м*, а площадь поперечного сечения — в *мм*². Соответственно этому удельное сопротивление измеряется в *ом*·*мм*²/*м* и численно равно сопротивлению провода длиной в 1 *м* и площадью поперечного сечения 1 *мм*², сделанного из данного материала:

$$1\,\frac{ом\cdot мм^2}{м}=\frac{1\ ом\cdot(10^{-3}\ м)^2}{1\ м}=10^{-6}\ ом\cdot м.$$

Наименьшими удельными сопротивлениями обладают серебро и медь. На практике электрические провода обычно изготовляются из меди:

$$\varrho_{Cu}=1{,}7\cdot 10^{-8}\ ом\cdot м=0{,}017\,\frac{ом\cdot мм^2}{м}$$

или алюминия:

$$\varrho_{Al}=2{,}9\cdot 10^{-8}\ ом\cdot м=0{,}029\,\frac{ом\cdot мм^2}{м}.$$

Хотя при равном сопротивлении алюминиевый провод и будет толще медного, но благодаря малому удельному весу алюминия вес его погонного метра будет меньше соответствующего веса медного провода того же сопротивления; поэтому при определенных условиях целесообразно применять алюминиевые провода.

Удельное сопротивление такого типичного изолятора, как стекло, равно $5\cdot 10^{11}$ *ом*·*м*, т. е. примерно в 10^{19} раз больше, чем у меди.

Для сравнения в таблице приведены удельные сопротивления некоторых металлов и сплавов при комнатной температуре.

Удельные сопротивления некоторых металлов и сплавов

Материал	$\varrho\cdot 10^6$ *ом*·*м*	Материал	$\varrho\cdot 10^6$ *ом*·*м*
Серебро	0,016	Железо . . .	0,086
Медь	0,017	Платина . . .	0,107
Золото	0,023	Свинец	0,210
Алюминий . .	0,029	Никелин . . .	0,420
Вольфрам . . .	0,056	Манганин . .	0,430
Цинк	0,060	Константан .	0,500
Никель	0,070	Ртуть	0,958
Латунь	0,080	Нихром . . .	1,100

Подставляя выражение (15.4) в (15.3), преобразуем закон Ома

$$I=\frac{U}{R}=\frac{US}{\varrho l}$$

к виду

$$\frac{I}{S}=\frac{1}{\varrho}\frac{U}{l}. \qquad (15.5)$$

Величина

$$\frac{I}{S}=j \qquad (15.6)$$

носит название **плотности тока** и на практике измеряется в $a/мм^2$. В соответствии с (15.1) $U/l=E$ есть напряженность электрического поля в проводнике.

Величина, обратная удельному сопротивлению,

$$\frac{1}{\varrho}=\gamma, \qquad (15.7)$$

называется **удельной проводимостью** или **электропроводностью** данного вещества. При введенных обозначениях соотношение (15.5) имеет вид

$$j=\gamma E \qquad (15.8)$$

и носит название **закона Ома в дифференциальной форме**.

Для проводников переменного сечения (рис. 2.5) зависимость сопротивления от геометрических размеров уже не будет выражаться столь простым соотношением, как (15.4). Здесь величина тока I в любых двух сечениях проводника будет одинаковой, так как в противном случае между этими сечениями накапливался бы электрический заряд, изменялось электрическое поле и ток перестал бы быть постоянным. Плотность же тока в различных сечениях и даже в разных точках одного и того же сечения может быть различной и по величине и по направлению. В этом случае внутри проводника будет неоднородным и электрическое поле, вектор напряженности которого **E** будет изменять свою величину и направление от точки к точке. Однако соотношение (15.8) между **j** и **E** остается справедливым в любой точке внутри проводника. Учитывая векторный характер величин **j** и **E**, закон Ома в дифференциальной форме (для каждого бесконечно малого участка в проводнике) должен быть записан в виде

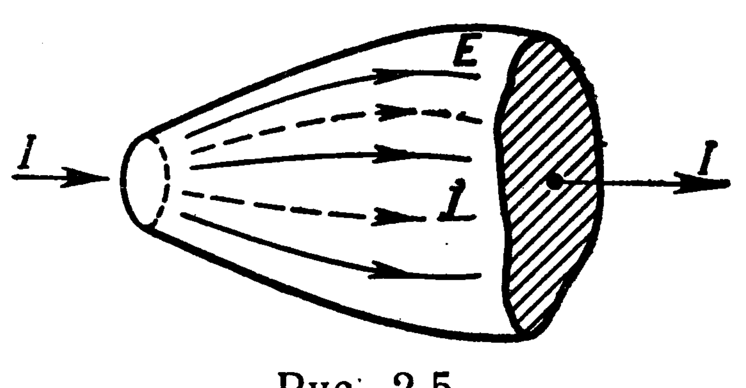


Рис. 2.5.

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}. \qquad (15.9)$$

Сопротивление данного проводника зависит от внешних условий и в первую очередь от температуры и давления. На механизме температурной зависимости сопротивления мы остановимся несколько подробнее в последующих главах при теоретическом выводе закона Ома. Здесь же пока приведем некоторые экспериментальные данные.

Опыт показывает, что в первом приближении *сопротивление металлических проводников линейно возрастает с температурой по закону*

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t). \qquad (15.10)$$

Для чистых металлов температурный коэффициент сопротивления $\alpha \approx 0{,}004 = 4 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$ и близок к $\frac{1}{273}$. На рис. 2.6 приведен примерный график зависимости сопротивления металла от абсолютной температуры T. Как показывают теория (см. ниже, § 21) и опыт, при $T \to 0°$ K сопротивление металла стремится к нулю.

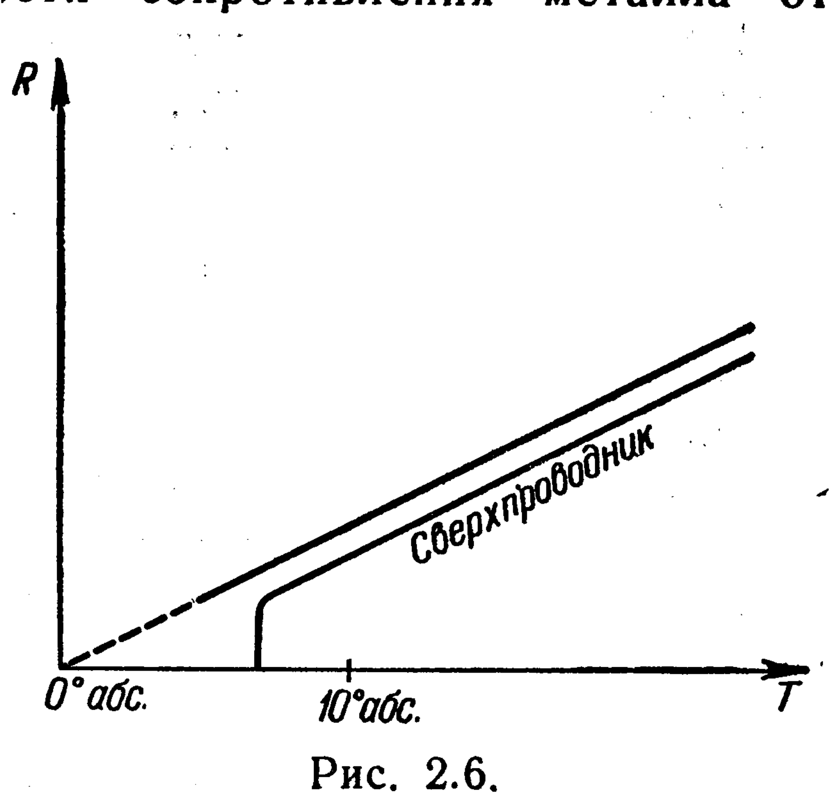


Рис. 2.6.

Для некоторых металлов и сплавов вблизи абсолютного нуля температуры наблюдается (при некоторой характерной для каждого из них температуре) скачкообразное падение сопротивления практически до нуля. Проводник при этом переходит в так называемое сверхпроводящее состояние. Если в замкнутом контуре из сверхпроводника создать электрический ток, то этот ток будет неделями течь в сверхпроводнике, практически не уменьшаясь по величине. Температуры перехода в сверхпроводящее состояние для разных металлов различны и лежат в интервале примерно от 2° K до 10° K.

Температурная зависимость сопротивления металлических проводников широко используется в технике для создания термометров сопротивления. Помещая в печь спираль известного сопротивления R_0 и измеряя ее сопротивление R_t, можно согласно (15.10) определить температуру t печи. С другой стороны, эта температурная зависимость оказывает вредное влияние на работу точных электроизмерительных приборов, меняя сопротивление последних при изменении внешних условий. Так как разница температур зимой и летом в данном месте может достигать 60°, то величина $\alpha \Delta t$ может доходить до $\sim 25\%$.

Для предотвращения вредного влияния изменения сопротивления с температурой приходится предусматривать специальные компенсационные схемы или изготавливать провода из специальных сплавов с низким температурным коэффициентом, как, например, константана, у которого $\alpha \approx 0{,}002 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$, т. е. примерно в 2000 раз ниже, чем у меди.

Если к проводнику прикладывать значительные усилия, то он деформируется и несколько изменяет свои геометрические размеры и структуру. При этом в соответствии с (15.4) несколько изменяется его сопротивление. На этом принципе основаны электрические тензометры, позволяющие измерять значительные и быстро меняющиеся давления.

§ 16. Закон Ома для замкнутой цепи

При наличии в проводнике электрических полей, создаваемых электрическими зарядами, постоянный ток невозможен. Действительно, соединим, например, проводником два тела, несущих заряды противоположного знака $+q$ и $-q$. В проводнике тогда возникнет электрическое поле и потечет ток. В процессе прохождения тока оба тела будут разряжаться, разность потенциалов между ними будет падать и ток уменьшится до нуля. Таким образом, электрическое поле может создать в проводнике лишь кратковременный импульс тока.

Поскольку ток в проводнике нейтрализует помещенные на его концах заряды, то для поддержания постоянных разности потенциалов и тока необходимо все время прикладывать так называемые сторонние силы неэлектрической природы, непрерывно разделяющие электрические заряды и поддерживающие постоянство имеющихся полей.

Природа таких сторонних сил может быть различна. В электрофорной машине происходит непрерывное разделение положительных и отрицательных зарядов за счет механической работы. В гальваническом элементе происходит разделение зарядов за счет энергии химической реакции. В фотоэлементе падающий свет вырывает из поверхности металла отрицательно заряженные частички — электроны. В генераторе на электростанции заряды разделяются действующими на них силами магнитного поля.

Во всех перечисленных и в ряде других случаев на отдельных участках цепи на электрические заряды действуют сторонние силы $\mathbf{F}_{стор}$, перемещающие на этих участках заряды против направления электрического поля $\mathbf{E}$. Обозначим через

$$\mathbf{E}_{стор} = \frac{\mathbf{F}_{стор}}{q'} \qquad (16.1)$$

напряженность поля сторонних сил, т. е. силу, действующую на единичный положительный заряд ($q'=+1$) в проводнике. При наличии сторонних полей закон Ома в дифференциальной форме (15.9) примет более общий вид:

$$\mathbf{j}=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\text{стор}}). \qquad (16.2)$$

Перейдем от дифференциальных соотношений к интегральным. Рассмотрим замкнутую цепь, на участке 1—2 которой включен сторонний источник тока, например гальванический элемент, как это показано на рис. 2.7. Выделим мысленно малый элемент тока длиной dl так, чтобы на этом участке можно было считать площадь поперечного сечения проводника S постоянной, а поля и плотность тока — однородными и направленными перпендикулярно поперечному сечению проводника. Тогда (16.2) перепишется в виде

$$j=\gamma(E+E_{\text{стор}}),$$

или

$$\frac{I}{S}=\gamma\left(-\frac{d\varphi}{dl}+E_{\text{стор}}\right). \qquad (16.3)$$

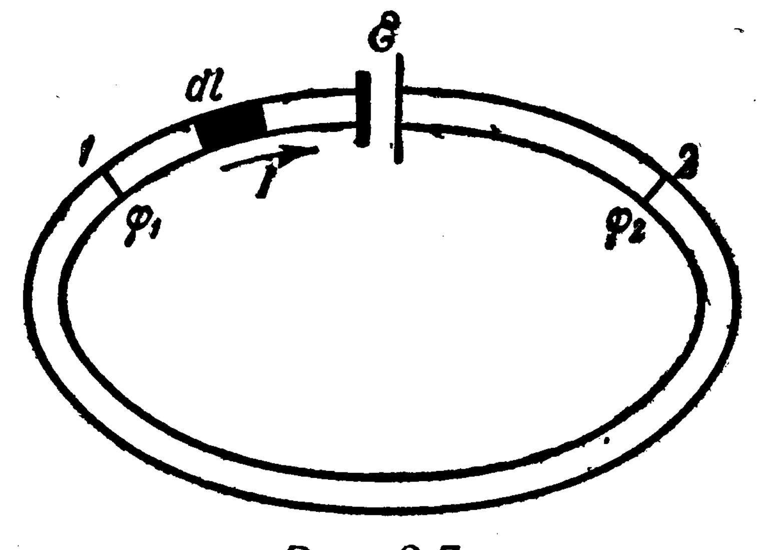


Рис. 2.7.

Умножим обе части равенства (16.3) на $\varrho\, dl = dl/\gamma$ получим*):

$$I\frac{\varrho\, dl}{S}=-d\varphi+E_{\text{стор}}\,dl,$$

и проинтегрируем по участку проводника от 1 до 2:

$$I\int_1^2\frac{\varrho\, dl}{S}=\varphi_1-\varphi_2+\int_1^2 E_{\text{стор}}\,dl. \qquad (16.4)$$

Величина $\varrho\, dl/S=dR$ представляет собой сопротивление бесконечно малого участка проводника, а

$$\int_1^2\frac{\varrho\, dl}{S}=R_{1,2}$$

*) В общем случае нелинейных проводников и неоднородных полей надо брать скалярное произведение ($\mathbf{j}\varrho\, d\mathbf{l}$), в которое войдет еще косинус угла между $\mathbf{j}$ и $d\mathbf{l}$.

— полное сопротивление всего участка цепи. Разность $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{1,2}$ есть падение потенциала на данном участке. Наконец,

$$\int_1^2 E_{\text{стор}}\, dl = \mathscr{E} \qquad (16.5)$$

носит название электродвижущей силы (э. д. с.) источника тока, включенного на этом участке; этот интеграл численно равен работе, совершаемой сторонними силами при переносе ими по цепи единицы положительного заряда.

Таким образом, (16.4) выражает собой закон Ома в интегральной форме для участка цепи, содержащего э. д. с.:

$$IR_{1,2} = U_{1,2} + \mathscr{E}. \qquad (16.6)$$

Если на данном участке источник тока отсутствует ($\mathscr{E} = 0$), то (16.6), естественно, переходит в обычный закон Ома (15.3).

Перемещая сечение *2* все дальше вдоль проводника, мы, наконец, достигнем такого положения, когда *2* совпадает с *1*. В этом случае $\varphi_2 = \varphi_1$ и $U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, т. е. полное падение потенциала в замкнутой цепи равно нулю. При движении вдоль направления тока вне источника тока $E_{\text{стор}} = 0$ и потенциал непрерывно падает, а внутри источника ток течет против направления электрического поля E и потенциал возрастает до своего исходного значения, как это показано на рис. 2.8. Для такой замкнутой цепи закон Ома (16.6) примет вид

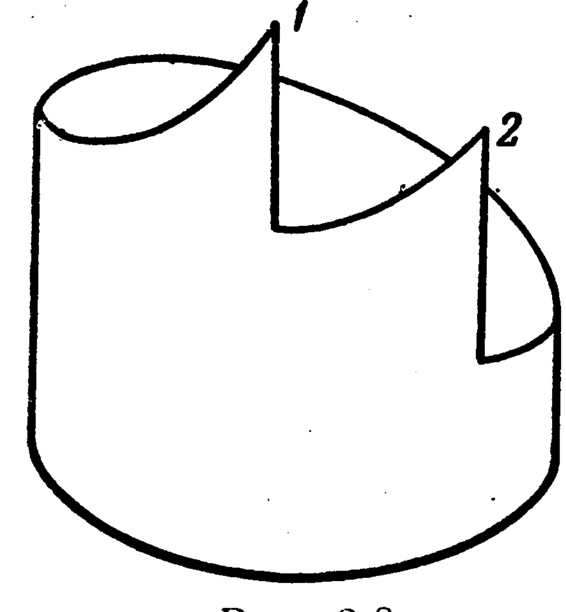


Рис. 2.8.

$$IR_{\text{полн}} = \mathscr{E}, \qquad (16.7)$$

где $R_{\text{полн}}$ есть полное сопротивление всей цепи, а э. д. с.

$$\mathscr{E} = \oint E_{\text{стор}}\, dl \qquad (16.8)$$

численно равна работе переноса единичного положительного заряда через всю цепь.

Практически могут наблюдаться случаи, когда сторонние силы сосредоточены на сравнительно узких участках цепи Δl, например в очень узком слое у электродов гальванического элемента. На таком малом участке Δl среднее значение сторонней силы $\overline{E}_{\text{стор}}$ очень велико, так что произведение $\overline{E}_{\text{стор}}\Delta l$ имеет конечное значение и создает почти вертикальный «скачок» потенциала, как это изображено на рис. 2.8.

Рассмотрим пример источника тока с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, замкнутого на внешнюю цепь (потребителя)

с сопротивлением R. В цепь включены электроизмерительные приборы: амперметр A, измеряющий ток I, и вольтметр V, измеряющий напряжение U у потребителя. В качестве последнего используем реостат R переменного сопротивления (рис. 2.9). Полное сопротивление всей цепи равно сумме сопротивления источника и сопротивления потребителя:

$$R_{\text{полн}} = r + R, \tag{16.9}$$

и закон Ома для всей цепи (16.7) примет вид

$$I(R + r) = \mathscr{E}. \tag{16.10}$$

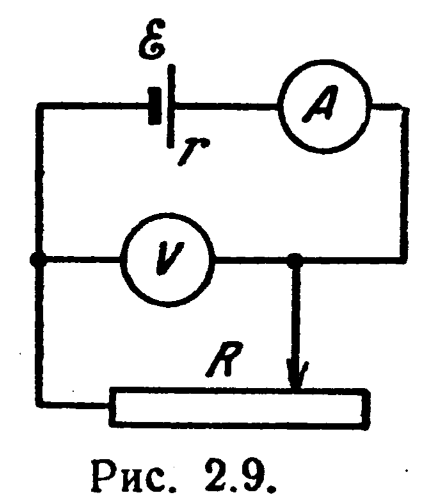


Рис. 2.9.

Поэтому ток зависит от сопротивления внешней цепи R по закону

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \tag{16.11}$$

Поскольку на участке внешней цепи э. д. с. отсутствует, то закон Ома для этого участка (15.3) имеет вид

$$U = IR = \mathscr{E}\frac{R}{R + r} \leqslant \mathscr{E}. \tag{16.12}$$

Формула (16.12) дает зависимость напряжения от сопротивления нагрузки R.

В пределе, когда $R \to 0$, источник тока замкнут накоротко. В этом случае ток максимален:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r} = I_{\text{макс}}, \tag{16.11a}$$

а напряжение во внешней цепи равно нулю:

$$U = 0. \tag{16.12a}$$

В противоположном предельном случае, $R \to \infty$, цепь разомкнута и ток отсутствует:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\infty} = 0, \tag{16.11б}$$

а напряжение максимально:

$$U = \mathscr{E}\frac{1}{1 + \frac{r}{\infty}} = \mathscr{E} \tag{16.12б}$$

и равно э. д. с. источника.

Из (16.12б) вытекает, что электродвижущая сила источника численно равна напряжению на его зажимах при разомкнутой внешней цепи.

§ 17. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

В разветвленных электрических цепях вычисление токов, идущих по отдельным ветвям, представляет известные трудности. Для упрощения этих вычислений удобно воспользоваться двумя правилами Кирхгофа.

Для вывода правил Кирхгофа рассмотрим изображенную на рис. 2.10 произвольную разветвленную цепь, состоящую из ряда соединенных друг с другом проводников с определенными сопротивлениями и ряда источников э. д. с.

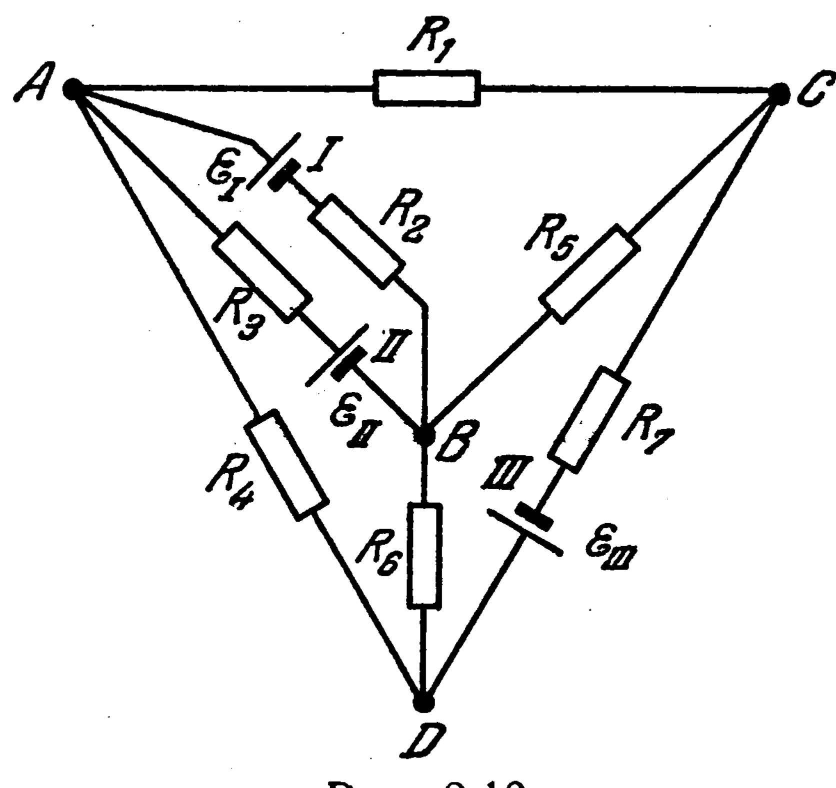


Рис. 2.10.

Назовем **узлами** все точки, в которых сходится не менее **трех** проводников нашей цепи, и обозначим их через A, B, C, D. Обратим внимание на то, что согласно приведенному определению точки I, II, III не являются узлами. На всем участке AIB между узлами A и B, состоящем из последовательно соединенных проводников и источника э. д. с., идет один и тот же ток.

Перенумеруем все участки нашей цепи, расположенные между узлами цепи, последовательными цифрами 1, 2, ..., 7. Суммарные сопротивления проводников и источников тока на каждом участке обозначим соответственно через R_1, R_2, ..., R_7. Величины электродвижущих сил, включенных на некоторых участках цепи, обозначим через $\mathcal{E}_{\text{I}}$, $\mathcal{E}_{\text{II}}$, $\mathcal{E}_{\text{III}}$.

При замыкании цепи через каждый участок пойдет определенный постоянный ток. Перенумеруем эти токи I_1, I_2, ..., I_7, как и сопротивления соответствующих участков. Задача состоит в том, чтобы рассчитать величину и направление каждого из этих токов по известным сопротивлениям участков и э. д. с. источников тока.

Подойдем к решению поставленной задачи алгебраически и охарактеризуем направления идущих через участки цепи токов их знаками. Поскольку до окончательного решения задачи эти знаки заранее не известны, то отметим на рис. 2.10 направления всех токов произвольно. Если при этом направление тока указано правильно, то мы получим в ответе для него положительную величину. Если же ответ окажется отрицательным, то, значит, ток течет в направлении, обратном предположенному.

Договорившись об обозначениях и направлениях токов, приступим к выводу первого правила Кирхгофа. Рассмотрим какой-либо

из узлов цепи, например узел A, изображенный отдельно на рис. 2.11. Из чертежа видно, что токи I_2, I_3 и I_4 направлены к узлу и за время dt приносят в этот узел суммарный заряд $(I_2+I_3+I_4)\,dt$. Ток I_1 направлен от узла и уносит за то же время заряд I_1dt. Полное увеличение заряда в узле A за произвольный промежуток времени dt равно

$$dQ_A=-I_1\,dt+(I_2+I_3+I_4)\,dt=(-I_1+I_2+I_3+I_4)\,dt.$$

В цепи постоянного тока потенциалы всех точек цепи, а значит и узлов, должны оставаться неизменными. Следовательно, в этих узлах не могут накапливаться электрические заряды ни положительного, ни отрицательного знака. В частности, для узла A величина dQ_A должна равняться нулю для любого промежутка времени dt, т. е.

$$-I_1+I_2+I_3+I_4=0. \qquad (17.1)$$

Аналогичные уравнения можем выписать для всех узлов цепи. Таким образом, мы получаем систему уравнений, выражающих **первое правило Кирхгофа**:

алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k=0. \qquad (17.2)$$

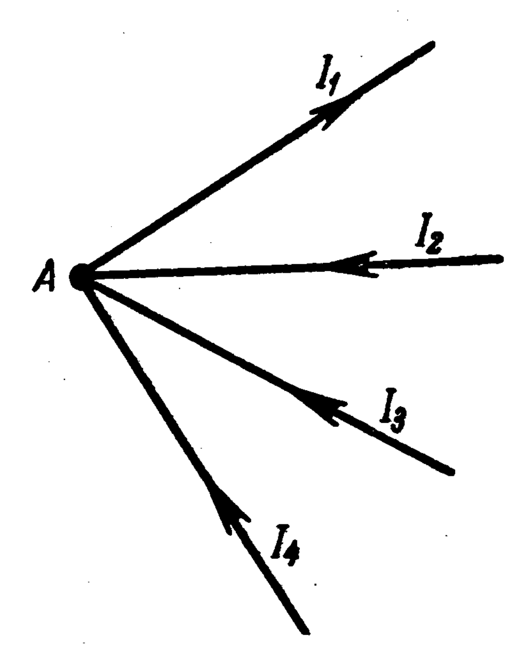


Рис. 2.11.

При этом надо соблюдать следующее правило знаков: токи, приходящие к узлу, считать положительными, а уходящие — отрицательными.

Выпишем соответствующие уравнения для узлов B и C:

$$-I_2-I_3-I_5+I_6=0 \qquad (17.3)$$

и

$$I_1+I_5-I_7=0. \qquad (17.4)$$

Сопоставляя их с (17.1), видим, что в уравнение (17.3) входят величины токов I_5 и I_6, не входившие в (17.1), а в уравнении (17.4) участвует величина тока I_7, не входившая в оба предыдущих уравнения (17.1) и (17.3). Благодаря такой структуре эти три уравнения являются независимыми друг от друга.

Если мы теперь захотим использовать аналогичное уравнение для узла D:

$$-I_4-I_6+I_7=0, \qquad (17.5)$$

то обнаружим, что в этом уравнении нет ни одной новой величины тока, которая бы уже не входила в какое-либо из предыдущих

трех уравнений, и что (17.5) не является новым независимым уравнением. Легко убедиться, что, складывая почленно все четыре уравнения (17.1), (17.3), (17.4) и (17.5), мы получим просто тождество: $0=0$.

Число неизвестных токов равно числу участков цепи. Количество узлов цепи меньше числа участков. Число же независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, меньше числа узлов, а следовательно, и числа неизвестных токов. Поэтому для определения всех неизвестных величин необходимо составить ряд дополнительных уравнений. Для этого служит второе правило Кирхгофа.

Рассмотрим произвольно выбранный замкнутый контур, например, $ABIA$. Обозначим потенциалы узлов A и B (см. рис. 2.10) соответственно через φ_A и φ_B и условимся о положительном направлении обхода, например, по часовой стрелке. В ветви BA ток I_3 идет по направлению обхода и должен считаться положительным. Э. д. с. $\mathcal{E}_{II}$ обусловливает ток в направлении обхода по контуру и также должна считаться положительной. Падение потенциала U_{BA} на участке BA равно разности потенциалов конечной и начальной точек. Полное сопротивление всего участка (включая и внутреннее сопротивление источника тока) обозначено через R_3. Согласно (16.6) закон Ома для этого участка цепи, содержащего э. д. с., имеет вид

$$I_3R_3=\mathcal{E}_{II}+\varphi_B-\varphi_A. \tag{17.6}$$

Во второй ветви AIB ток I_2 идет против направления обхода и э. д. с. $\mathcal{E}_I$ действует в том же направлении. Поэтому обе эти величины должны учитываться с отрицательным знаком. Закон Ома для участка цепи AB имеет вид

$$-I_2R_2=-\mathcal{E}_I+\varphi_A-\varphi_B. \tag{17.7}$$

Складывая почленно равенства (17.6) и (17.7), мы исключим неизвестные потенциалы узлов и получим

$$-I_2R_2+I_3R_3=-\mathcal{E}_I+\mathcal{E}_{II}. \tag{17.8}$$

Это уравнение выражает **второе правило Кирхгофа** для замкнутого контура $ABIA$:

алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления в ветвях замкнутого контура равна алгебраической сумме э. д. с., встречающихся в этом контуре:

$$\sum_k I_kR_k=\sum_i \mathcal{E}_i. \tag{17.9}$$

При этом также следует строго придерживаться правила знаков: токи, идущие вдоль выбранного нами направления обхода (в дан-

ном случае по часовой стрелке), считаются положительными, а идущие против направления обхода — отрицательными. Соответственно этому э. д. с., которые действуют по выбранному направлению обхода в контуре, считаются положительными, а против направления обхода — отрицательными. Уравнение (17.9) является обобщением закона Ома для замкнутой цепи (16.7) и показывает, что при обходе вокруг любого замкнутого контура мы возвращаемся в ту же самую точку с тем же значением потенциала.

Пользуясь вторым правилом Кирхгофа, следует составить аналогичные уравнения для всех независимых замкнутых контуров, входящих в разветвленную цепь. Говоря о независимых контурах, мы имеем ввиду следующее: составим уравнение второго правила Кирхгофа для контура $ABDA$:

$$-I_3R_3-I_6R_6+I_4R_4=-\mathscr{E}_{II}. \quad (17.10)$$

Этот контур содержит, по сравнению с предыдущим контуром $ABIA$, два новых тока I_4 и I_6, и уравнение (17.10) является независимым от (17.8).

Если, однако, мы теперь составим уравнение второго правила Кирхгофа для контура $AIBDA$:

$$-I_2R_2-I_6R_6+I_4R_4=-\mathscr{E}_{I}, \quad (17.11)$$

то увидим, что этот контур не включает ни одного нового элемента (тока или э. д. с.), который бы не входил в предыдущие два контура. Поэтому уравнение (17.11) не является новым, независимым от двух предыдущих — (17.8) и (17.10). Нетрудно убедиться, что оно автоматически получается, если почленно сложить эти два уравнения: (17.8) + (17.10) = (17.11).

Поэтому при составлении уравнений для второго правила Кирхгофа (так же, как и для первого) следует внимательно следить, чтобы каждый новый рассматриваемый контур содержал хотя бы один элемент, который не содержится в предыдущих контурах. Если это условие не будет соблюдено, ошибки не произойдет, но вычисления усложнятся, так как мы получим лишние уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

Совокупность независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа для узлов и по второму — для контуров, оказывается достаточной, чтобы найти все (или интересующие нас) токи в разветвленной цепи. Задача сводится, таким образом, к решению системы линейных уравнений, общее число которых равно числу неизвестных токов.

Применим правила Кирхгофа к цепи, состоящей из сопротивлений R_1, R_2, ..., R_n, включенных параллельно друг другу (рис. 2.12) и замкнутых на общий источник тока с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r.

Первое правило Кирхгофа в применении к узлу A дает

$$I - I_1 - I_2 - \ldots - I_n = 0, \quad \text{или} \quad I = \sum_{k=1}^{k=n} I_k. \tag{17.12}$$

Уравнение для узла B составлять нет необходимости, так как к нему примыкают те же элементы контура.

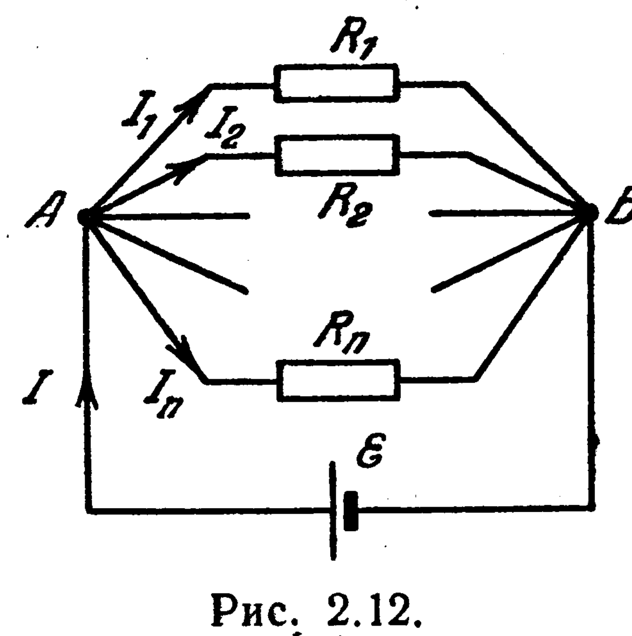


Рис. 2.12.

Для замкнутых контуров, проходящих через каждое отдельное сопротивление и э. д. с., согласно второму правилу Кирхгофа имеем

$$\left.\begin{aligned} I_1R_1 &= \mathscr{E} - Ir, \\ I_2R_2 &= \mathscr{E} - Ir, \\ &\cdots\cdots \\ I_nR_n &= \mathscr{E} - Ir. \end{aligned}\right\} \tag{17.13}$$

Определяя отсюда токи I_1, I_2, ..., I_n и подставляя их в (17.12), получим

$$I = (\mathscr{E} - Ir)\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_k}.$$

Решая полученное уравнение относительно тока I, находим

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{1}{\sum\limits_k \dfrac{1}{R_k}}} = \frac{\mathscr{E}}{R_{\text{полн}}}. \tag{17.14}$$

Как видно из (17.14), полное сопротивление всей цепи $R_{\text{полн}}$ является суммой сопротивления источника r и суммарного сопротивления включенной последовательно с ним системы из соединенных параллельно друг другу проводников R. Последнее определяется из соотношения

$$R = \frac{1}{\sum\limits_k \dfrac{1}{R_k}}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}, \tag{17.15}$$

показывающего, что при параллельном соединении проводников величина, обратная сопротивлению всей системы (т. е. ее проводимость), равна сумме проводимостей всех проводников.

Полное же сопротивление всей цепи находится по правилу сложения сопротивлений для последовательного соединения:

$$R_{\text{полн}} = r + R. \tag{17.16}$$

В качестве второго примера применения правил Кирхгофа рассмотрим схему так называемого измерительного **мостика Уитстона**. Четыре сопротивления R_1, R_2, R_3 и R_4 образуют его **плечи**. В одну диагональ AC моста включена батарея с э. д. с. $\mathscr{E}$ и сопротивлением $R_б$. В другую диагональ BD включен гальванометр с сопротивлением $R_г$ (рис. 2.13).

Уравнения первого правила Кирхгофа для узлов A, B и C имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_б - I_1 - I_3 &= 0, \\ I_1 - I_2 - I_г &= 0, \\ I_2 + I_4 - I_б &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.17)$$

Легко видеть, что уравнение для узла D ничего нового не дает.

Уравнения второго правила Кирхгофа для независимых контуров $ABC\mathscr{E}A$, $ABDA$ и $BCDB$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} I_б R_б + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \mathscr{E}, \\ I_1 R_1 + I_г R_г - I_3 R_3 &= 0, \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_г R_г &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.18)$$

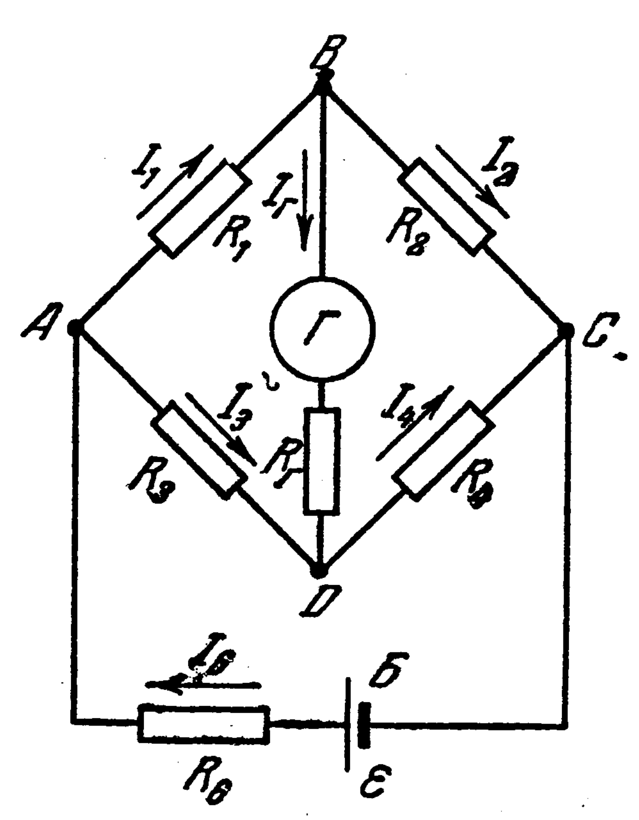


Рис. 2.13.

Из шести уравнений (17.17) и (17.18) можно определить шесть неизвестных. Если заданы все сопротивления и э. д. с., то такими неизвестными будут токи, текущие в цепи. Если какое-либо из сопротивлений, например R_1, неизвестно, то на опыте измеряют ток $I_г$, идущий через гальванометр, и из уравнений (17.17) и (17.18) вычисляют остальные пять неизвестных токов и величину R_1. Такая схема носит название **неравновесного** мостика Уитстона.

Изменяя известные сопротивления R_2, R_3 или R_4, можно добиться такого положения, чтобы ток через гальванометр обратился в нуль ($I_г = 0$). Тогда из уравнений (17.17) находим

$$I_1 = I_2 \text{ и } I_3 = I_4,$$

а из уравнений (17.18) получим

$$I_1 R_1 = I_3 R_3 \text{ и } I_2 R_2 = I_4 R_4.$$

Отсюда легко вывести, что

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}, \quad \text{или} \quad R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \qquad (17.19)$$

Равенство (17.19) показывает, что для определения искомого сопротивления R_1 в случае равновесного моста достаточно знать лишь величину сопротивления R_2 и отношение сопротивлений R_3/R_4. Э. д. с. батареи, питающей мост, и сопротивления батареи и гальванометра существенной роли для определения искомого сопротивления R_1 не играют.

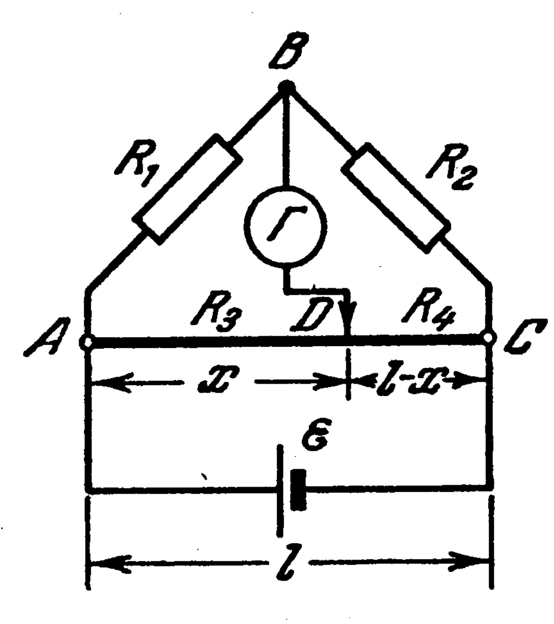


Рис. 2.14.

В часто применяющемся на практике реохордном мостике Уитстона (рис. 2.14) сопротивления R_3 и R_4 представляют собой одну калиброванную проволоку (реохорд). Контакт гальванометра с реохордом (точка D) делается подвижным, и в момент равновесия моста измеряется положение движка на шкале, расположенной параллельно реохорду. В этом случае отношение сопротивлений R_3/R_4 равно отношению длин обоих участков реохорда и

$$R_1 = R_2 \frac{x}{l-x}. \qquad (17.20)$$

В измерительной технике используется и неравновесный мостик Уитстона. В конце § 15 упоминался электрический тензометр. В качестве таких тензометров применяются тонкие константановые проволочки с сопротивлением 50—200 *ом*, наклеенные на изолирующую пленку (рис. 2.15). Для компенсации внешних температурных воздействий в плечи моста (рис. 2.13) включаются два одинаковых тензометра с равными сопротивлениями:

$$R_1 = R_2 = r. \qquad (17.21)$$

Один из тензометров наклеивается на деформирующуюся деталь, а второй остается свободным. Добиваются равенства тока в гальванометре нулю в отсутствие деформации. Из условия (17.19) для равновесного моста и (17.21) находим, что

$$R_3 = R_4 = R. \qquad (17.22)$$

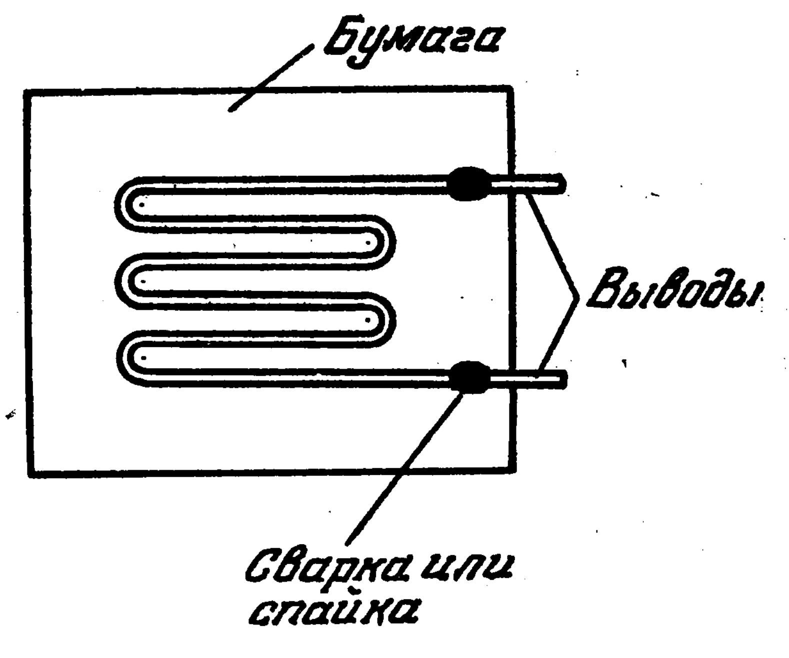


Рис. 2.15.

При деформации детали и приклеенного к ней тензометра сопротивление последнего изменяется на некоторую величину Δr. Тогда

$$R_1 = r + \Delta r \quad \text{и} \quad R_2 = r. \qquad (17.23)$$

Подставляя значения сопротивлений (17.22) и (17.23) в уравнения (17.17) и (17.18) и решая эту систему с точностью до малых второго порядка относительно Δr, после несложных, но громоздких преобразований находим

$$I_г = -\frac{\mathcal{E} R}{(r+R)(R_б r + R_б R + 2rR)} \Delta r. \qquad (17.24)$$

Измеряя ток $I_г$ в диагонали неравновесного моста, можно найти абсолютное (Δr) и относительное ($\Delta r/r$) изменение сопротивления тензометра и отградуировать $I_г$ непосредственно в единицах деформации детали или приложенного к ней напряжения.

Для измерения с помощью тензометров быстропеременных деформаций и напряжений гальванометр в диагонали моста заменяют специальным записывающим электрическим прибором — шлейфовым осциллографом. Ввиду малости возникающих в диагонали напряжений $U_г = I_г R_г$ они предварительно усиливаются.

§ 18. Работа, мощность и тепловое действие тока

Рассмотрим участок цепи, не содержащий э. д. с. (рис. 2.16, *а*). На этом участке приложена разность потенциалов $U_{1,2}$ и идет ток I. За некоторый промежуток времени t через участок пройдет заряд $q = It$. При этом силы электрического поля совершат работу по переносу заряда q от точки с более высоким к точке с более низким потенциалом:

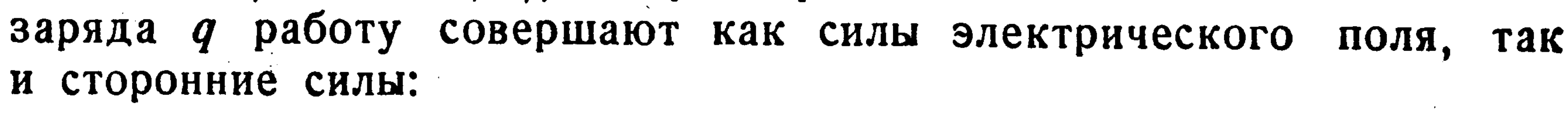
$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)\, q = U_{1,2} It. \qquad (18.1)$$

В соответствии с законом Ома (15.3) эту работу можно выразить через сопротивление участка R:

$$A = IU_{1,2}t = I^2Rt = \frac{U_{1,2}^2}{R}\, t. \qquad (18.2)$$

Рис. 2.16.

Если на участке цепи находится источник тока (рис. 2.16, *б*), то при переносе заряда q работу совершают как силы электрического поля, так и сторонние силы:



$$A = (U_{1,2} + \mathscr{E})\, It. \qquad (18.3)$$

Используя закон Ома (16.6) для такого участка, можно привести (18.3) к виду, аналогичному (18.2):

$$A = (U_{1,2} + \mathscr{E})\, It = I^2R_{1,2}t. \qquad (18.4)$$

В случае замкнутой цепи (2.16, *в*) из двух слагаемых работы

$$A = U_{1,2}It + \mathscr{E}It$$

первое обращается в нуль, так как полное падение потенциала $U_{1,2}$ во всей цепи равно нулю. Поэтому

$$A = \mathscr{E}It = I^2R_{полн}t, \qquad (18.5)$$

где $R_{полн}$ выражается формулой (16.7).

Интересно отметить, что полная работа электрических сил $U_{1,2}It$ в замкнутой цепи равна нулю, так как в одной части цепи ток течет по полю, а в другой части—против поля. Внутри источника тока работают сторонние силы; они разделяют заряды, создают электрическое поле и запасают энергию. Эта энергия расходуется во внешней цепи на поддержание в ней электрического тока. Поэтому в конечном счете в замкнутой цепи совершает работу (18.5) только приложенная э. д. с.

Работа, совершаемая за единицу времени:

$$\frac{A}{t}=P, \qquad (18.6)$$

есть выделяемая мощность. Для участка цепи

$$P=IU_{1,2}+I\mathscr{E}. \qquad (18.7)$$

Для всей цепи

$$P_{\text{полн}}=I\mathscr{E}. \qquad (18.8)$$

Наконец, мощность, выделяемая во внешней цепи,

$$P_{\text{вн}}=IU=I^2R=\frac{U^2}{R}. \qquad (18.9)$$

В системе СГС работа измеряется в эргах, а мощность—в *эрг/сек*. В системе СИ ток измеряется в амперах, напряжение — в вольтах, работа

$$[A]=[IUt]=$$
$$=3\cdot 10^9 \text{СГС ед. тока}\cdot\frac{1}{300}\text{СГС ед. потенциала}\cdot 1\ \textit{сек}=$$
$$=10^7\ \textit{эрг}=1\,\textit{дж}.$$

Соответственно мощность в этой системе измеряется в единицах *дж/сек=вт*.

Для поддержания в цепи постоянного тока необходимо совершать работу A; энергия электрического тока в проводнике непрерывно расходуется и переходит в другие формы энергии. Действительно, опыт показывает, что ***проводник, по которому течет ток, нагревается*** и в нем выделяется некоторое количество тепла Q. Если при этом не возникает никаких других форм энергии (например, нет химических превращений, совершаемых током), то по закону сохранения энергии

$$A=Q. \qquad (18.10)$$

Следовательно, во внешней цепи выделяется в форме тепловой энергии

$$IUt=I^2Rt=\frac{U^2}{R}t\ \textit{дж}.$$

Поскольку 1 *дж*=0,24 *кал*, то

$$Q=0{,}24I^2Rt \text{ кал}, \qquad (18.11а)$$

или

$$Q=0{,}24IUt \text{ кал}, \qquad (18.11б)$$

или же

$$Q=0{,}24\frac{U^2}{R}t \text{ кал}. \qquad (18.11в)$$

Эти соотношения выражают закон Джоуля—Ленца. На рис. 2.17 изображена установка Ленца (1844 г.). Перевернутый стакан закрыт пробкой и заполнен спиртом. Через пробку введены толстые проводники, подводящие ток к находящейся внутри стакана спирали. Сверху через специальное отверстие вставлен термометр T, измеряющий температуру спирта.

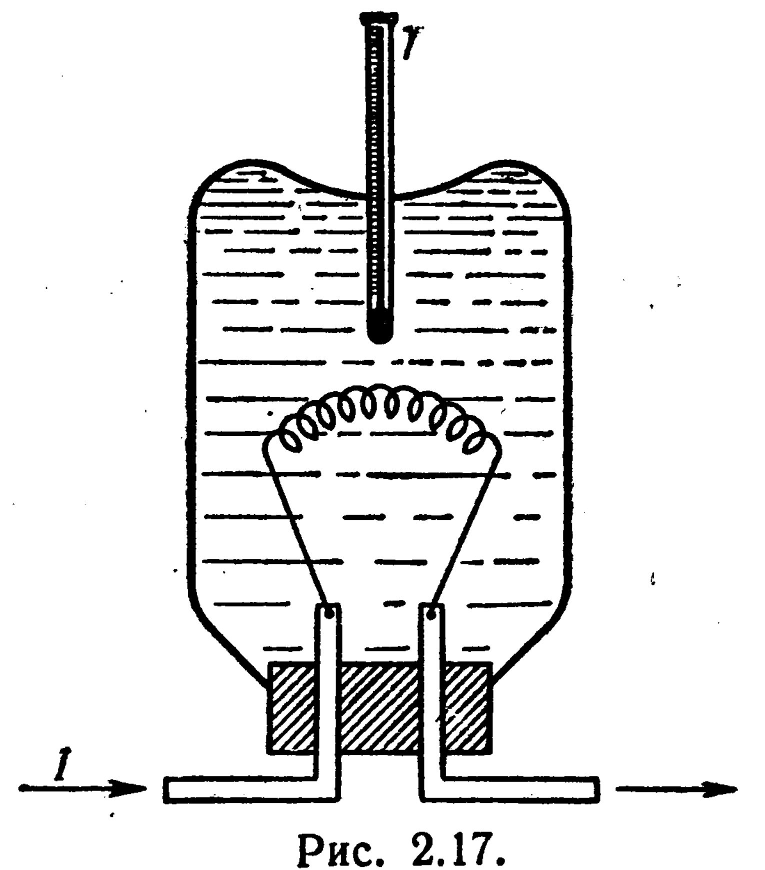


Рис. 2.17.

При пропускании через спираль в течение некоторого времени определенного тока I спирт нагревается от начальной температуры T_1 до температуры T_2. Зная теплоемкость всей массы спирта C, можно определить количество тепла, приобретенное спиртом:

$$Q=C(T_2-T_1). \qquad (18.12)$$

Для компенсации теплообмена спирта с окружающей средой Ленц применил исключительно остроумный и простой метод. Он наливал в свой стакан-калориметр холодный спирт с температурой T_1, на несколько градусов ниже температуры окружающей среды T_0. Пропуская ток и нагревая спирт, Ленц прекращал опыт в тот момент, когда температура спирта T_2 превышала температуру окружающей среды ровно на столько градусов, на сколько она первоначально была ниже, т. е. на

$$T_2-T_0=T_0-T_1.$$

Таким образом, за первую половину опыта, пока спирт был холоднее окружающей среды, он получал от последней некоторое дополнительное количество тепла Q'. Но зато во вторую половину опыта, когда спирт становился теплее окружающей среды, он отдавал последней обратно ровно такое же количество тепла Q'. Следовательно, измеренное Ленцем тепло Q в точности было равно количеству тепла Q, выделенному электрическим током.

В результате исключительно точных для своего времени опытов Ленц доказал, что выделяющееся тепло Q прямо пропорционально квадрату тока I.

Если соединить последовательно два проводника с различными сопротивлениями, то по этим проводникам будет идти одинаковый ток I. Тогда согласно (18.11а) в проводнике с бóльшим сопротивлением будет выделяться большее количество тепла.

Это следует учитывать при включении электронагревательных приборов (электроплиток, утюгов, чайников и т. д.). Сопротивление электропроводки R_0 должно быть значительно меньше, чем сопротивление прибора R. При соблюдении этого условия выделение тепла в проводах будет очень мало, следовательно, опасность их воспламенения будет исключена. Кроме того, напряжение сети U_0 будет практически целиком приложено к прибору, так как падение напряжения на электропроводке IR_0 пренебрежимо мало. Следовательно, для расчета теплоотдачи электроприбора следует пользоваться формулой (18.11в):

$$Q=\frac{U_0^2}{R}\ \text{дж}.$$

В рассмотренном случае $Q\sim 1/R$, так что мощность электроплитки увеличивается при уменьшении R, т. е. при укорочении ее спирали. Отметим еще раз, что это справедливо до тех пор, пока R остается большой величиной по сравнению с сопротивлением электропроводки R_0.

Иначе обстоит дело, если в цепь включено очень малое по сравнению с R_0 и R сопротивление ΔR. Падение напряжения на таком сопротивлении ничтожно, и ток I в цепи определяется лишь сопротивлением проводки R_0 и приборов большого сопротивления R: $I=U_0/(R+R_0)\approx U_0/R$. Следовательно, для расчета количества тепла, выделяемого на ΔR, следует пользоваться формулой (18.11а):

$$\Delta Q=I^2\Delta R\ \text{дж}.$$

В этом случае тепловая мощность $\Delta Q/t$ определяется только током в цепи I.

Выполняя такое сопротивление из тонкой проволочки длины Δl и поперечного сечения S, мы видим, что

$$\Delta Q=I^2\varrho\frac{\Delta l}{S}t,$$

или

$$\frac{\Delta Q}{\Delta l}=I^2\frac{\varrho}{S}t,$$

т. е. количество тепла, выделяющееся на единицу длины проволочки, тем больше, чем меньше ее сечение. При некотором крити-

ческом токе $I_{кр}$ тепла в проволочке выделится так много, что она расплавится и разомкнет последующую цепь. На этом принципе основано действие плавких предохранителей, обычно называемых «пробками», которые ограничивают ток в цепи. Если сечение проволочки предохранителя будет взято слишком большим («жучок»), то предохранитель будет пропускать, не расплавляясь, слишком большие токи, опасные для всей проводки.

Если сопротивление R прибора неизвестно, то, определяя ток через прибор I и напряжение на его контактах U (с помощью амперметра и вольтметра), находят Q по формуле (18.11б).

При соединении ряда приборов необходимо помнить следующее.

а) При параллельном соединении приборов на зажимах всех приборов будет одинаковое напряжение U_0. Следовательно, наибольшую мощность будет, согласно (18.11в), отдавать прибор с **наименьшим сопротивлением.**

б) При последовательном соединении приборов ток I, текущий через них, будет одним и тем же ($I = U_0/(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots)$, где R_1, R_2 и т. д.— сопротивления первого, второго и т. д. приборов). Наибольшую мощность будет отдавать, согласно (18.11а), прибор с **наибольшим сопротивлением.**

Рис. 2.18.

При нагревании тел электрическим током до высокой температуры часть выделяемой им энергии уходит с отдаваемым телом излучением, например светом. Это используется в так называемых электрических **лампах накаливания.** На рис. 2.18 изображена первая лампа накаливания, изготовленная А. Н. Ладыгиным. В стеклянную колбу впаяны два толстых медных электрода малого сопротивления, соединенных между собой угольным стерженьком. При пропускании тока тепло выделяется главным образом в угольном стерженьке, имеющем относительно высокое сопротивление; стерженек накаливается и испускает свет. Часть угля при этом сгорает до тех пор, пока не израсходуется имеющийся в баллоне кислород воздуха. Впоследствии в лампах накаливания угольная нить была заменена вольфрамовой, допускающей более высокую температуру нагрева.

ГЛАВА V
ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ

§ 19. Свободные электроны в металлах

В растворах электролитов находятся свободные ионы, и прохождение электрического тока связано с одновременным переносом вещества к электродам. Какого же рода свободные заряды находятся в металлических проводниках и связаны ли эти заряды с атомами металла? Для ответа на этот вопрос и выяснения природы носителей электрического тока в металлах был поставлен целый ряд специальных опытов.

В опытах Рикке (1901 г.) цилиндры из различных металлов с тщательно пришлифованными основаниями были прижаты друг к другу и через них весьма длительное время пропускался электрический ток (рис. 2.19). По окончании опыта цилиндры были разобраны и проанализированы на взаимное проникновение металлов. При этом были обнаружены лишь следы взаимного проникновения, не превышающие результатов обычной диффузии атомов в твердых телах.

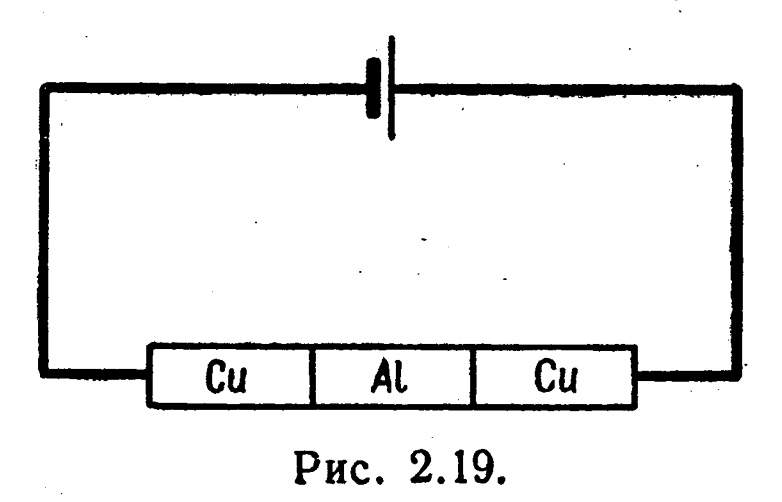


Рис. 2.19.

Таким образом, оказалось, что перенос электрического заряда в металлах не связан с переносом самого вещества металла. Носители электрического тока не связаны с атомами и одинаковы во всех металлах. В металлический проводник, по которому идет постоянный ток, с одного конца входит такое же количество этих носителей тока, какое выходит с другого его конца, и заряд проводника при этом не изменяется.

Наличие в металле свободно перемещающихся зарядов должно проявляться в ряде инерционных эффектов. Если трамвай резко затормозить, то находящиеся внутри пассажиры будут двигаться по инерции вперед и скопятся у передней площадки вагона. Аналогично, если резко затормозить движущийся кусок металла, то

находящиеся в нем свободные заряды, двигаясь по инерции, будут скапливаться у переднего конца его и между концами проводника возникнет определенная разность потенциалов. Так можно определить знак этих зарядов и их относительную подвижность.

Существование подобных электроинерционных эффектов было установлено в 1913 г. Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси с помощью следующего опыта. Катушка, соединенная с телефоном, приводилась в колебательное движение вокруг своей оси (рис. 2.20). Для увеличения амплитуды частота возбуждаемых крутильных колебаний подбиралась совпадающей с собственной частотой упругого

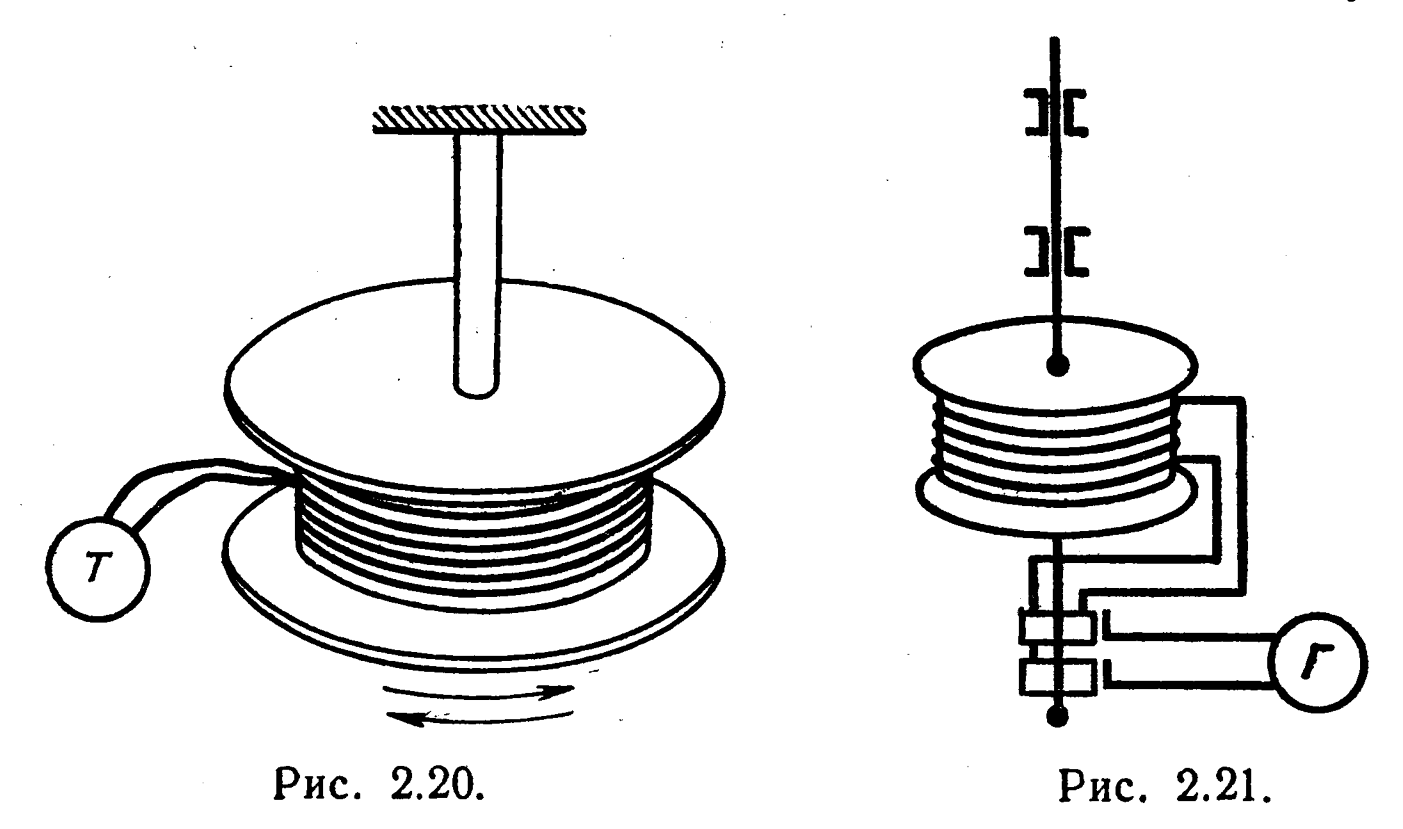


Рис. 2.20. Рис. 2.21.

подвеса. Благодаря инерции свободных зарядов на концах катушки возникала переменная разность потенциалов, и телефон издавал звук.

Количественные измерения относительной инертности носителей электрического тока в материалах были произведены в 1916 г. Стюартом и Толмэном. В их опыте катушка из проводника приводилась в быстрое вращательное движение вокруг своей оси (рис. 2.21). Обозначим окружную скорость вращения катушки через v. С той же скоростью v движутся совместно с катушкой и свободные заряды в проводнике. Затем за сравнительно короткий промежуток времени катушка резко тормозится. Двигаясь по инерции и собираясь на одном конце катушки, свободные носители тока создают переменную разность потенциалов U. Катушка замкнута на баллистический гальванометр, измеряющий импульсы тока, и под действием возникшей э. д. с. в цепи начинает идти переменный ток i. По закону Ома

$$U = iR,$$

где R — полное сопротивление цепи. Возникшая при инерционном разделении зарядов в катушке разность потенциалов создает в проводнике электрическое поле $E = U/L$ (L — полная длина провода

в катушке), которое, тормозя движущиеся заряды, уменьшает их количество движения mv (m — масса носителя тока) до нуля. Обозначим заряд носителя тока через e. Мгновенная сила, действующая на этот заряд, равна $f=eE$. Импульс этой силы $f\,dt$ за бесконечно малый промежуток времени равен изменению количества движения заряда $m\,dv$.

Отсюда

$$m\,dv=f\,dt=eE\,dt=\frac{eU}{L}\,dt=\frac{eR}{L}\,i\,dt=\frac{eR}{L}\,dq,$$

где $dq=i\,dt$ — элементарное количество электричества, протекшее через гальванометр за время dt (элементарный импульс тока). Интегрируя полученное равенство по времени торможения катушки, получим

$$\int_v^0 m\,dv=\frac{Re}{L}\int_0^q dq,$$

где q — полный заряд, протекший через баллистический гальванометр и измеряемый по отбросу последнего. Выполняя указанное интегрирование, получаем

$$\frac{e}{m}=-\frac{Lv}{Rq}. \tag{19.1}$$

Таким образом из опытов Стюарта и Толмэна был определен удельный заряд e/m носителей электрического тока в металлах. Первые измерения дали

$$\frac{e}{m}\approx-4{,}8\cdot10^{17}\,\frac{\text{СГС ед. заряда}}{г}=-1{,}6\cdot10^{11}\ к/кг. \tag{19.2}$$

Незадолго до этого Милликен определил элементарный электрический заряд, который оказался равным $e=\pm4{,}8\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда $=1{,}6\cdot10^{-19}$ $к$. Отсюда можно было оценить, что масса носителей тока в металлах

$$m\approx10^{-27}г=10^{-30}кг \tag{19.3}$$

и примерно в 2000 раз меньше массы самого легкого атома — атома водорода.

Полученные значения удельного заряда и массы практически совпали с соответствующими значениями, измеренными ранее для электронов, движущихся в вакууме.

Таким образом, было окончательно установлено, что *носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны.*

§ 20. Закон Ома с точки зрения электронной теории металлов

Целый ряд фактов и косвенных данных привел физиков к выводу о наличии в металлах свободных электронов еще к началу XX века, задолго до того, как это было доказано прямыми опытами Стюарта и Толмэна. Перенеся на металлы некоторые представления и выводы кинетической теории газов, Лоренц и Друде разработали стройную теорию металлов, объяснявшую и связывавшую целый ряд свойств последних.

Вследствие сильного взаимодействия между атомами металла при соединении последних в кристаллическое твердое тело, самые внешние их электроны перестают быть связанными с отдельными атомами и легко переходят от одного атома к соседнему и далее через всю кристаллическую решетку. В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные электроны, образуя своеобразный электронный газ (рис. 2.22).

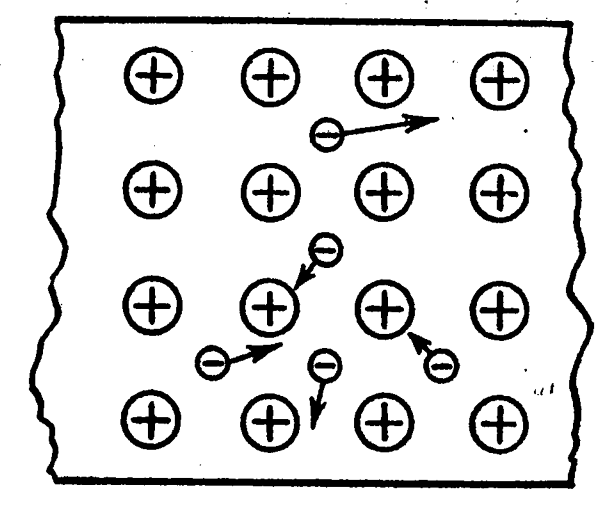


Рис. 2.22.

Считая, что каждый атом одновалентного металла отдает по одному электрону, а двухвалентного — по два, можно определить концентрацию свободных электронов в металлах. По порядку величины она оказывается равной $10^{28} \div 10^{29}$ *электрон/м*^{3}.

При столь большой концентрации электронов их взаимодействие между собой, как и с ионами кристаллической решетки металла, весьма велико. Однако, поскольку *средняя сила*, действующая на электрон со стороны всех остальных электронов и ионов, равна нулю, можно в первом приближении считать каждый электрон свободным, а его взаимодействие с ионами решетки и прочими электронами рассматривать как ряд последовательных соударений. Системе электронов в этом приближении приписывается лишь кинетическая энергия.

Вспомним теперь, что именно этим отличается описанный в томе I (часть II) идеальный газ. Поэтому Лоренц и Друде попытались построить теорию металлов, исходя из представления о том, что «электронный газ» в металлах есть идеальный газ, подчиняющийся законам статистики Максвелла — Больцмана. Мы остановимся весьма коротко на результатах Лоренца и Друде, ибо, как это будет показано ниже, последнее предположение оказалось совершенно неправильным.

В результате взаимодействия электронов и ионов металлической решетки, обусловленного их столкновениями, обе системы частиц должны приобрести одну и ту же температуру T. Следовательно,

средняя энергия хаотического движения электронов должна равняться

$$\frac{m\overline{u^2}}{2}=\frac{3}{2}kT. \tag{20.1}$$

Отсюда средняя квадратичная скорость электронов равна

$$\sqrt{\overline{u^2}}=u_{\text{кв}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{20.2}$$

Подставляя значения $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ *дж/град* и $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*, получаем, что $u_{\text{кв}}$ при комнатной температуре, т. е. при $T\approx300°$ К, равна $u_{\text{кв}}=110$ *км/сек*. Поскольку электрон пролетает расстояние, равное длине свободного пробега l, с некоторой средней скоростью $\bar{u}$ (близкой к $u_{\text{кв}}$), то время свободного пробега τ равно

$$\tau=\frac{l}{\bar{u}}. \tag{20.3}$$

Если создать внутри металла однородное электрическое поле напряженностью E, то свободные заряды в металле приобретут дополнительную скорость $\mathbf{v}$ в направлении электрического поля (точнее, против поля, так как заряд электрона $e<0$). Суммарная скорость заряда $\mathbf{c}$ складывается из хаотической $\mathbf{u}$ и направленной $\mathbf{v}$ скоростей:

$$\mathbf{c}=\mathbf{u}+\mathbf{v}. \tag{20.4}$$

Хаотическая скорость направлена то по полю, то против поля, и поэтому среднее значение вектора $\mathbf{u}$ равно нулю. Следовательно, суммарная скорость $\mathbf{c}$ в среднем направлена по полю и равна

$$\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{u}+\mathbf{v}}=\overline{\mathbf{u}}+\overline{\mathbf{v}}=\overline{\mathbf{v}}. \tag{20.5}$$

Рассмотрим изображенный на рис. 2.23 отрезок проводника с поперечным сечением S. Направим вектор напряженности электрического поля E вдоль проводника. Каждый из свободных зарядов e внутри проводника приобретает направленную скорость $\mathbf{v}$ по полю. За промежуток времени dt через площадку S пройдут все те заряды, которые находятся на расстоянии от площадки S, не превышающем величину $\bar{v}\,dt$, т. е. все заряды, заключенные в объеме цилиндра $S\bar{v}\,dt$. Если число свободных зарядов в единице объема обозначить через n, то заряд dq, который пройдет за это время через поперечное сечение проводника в направлении электрического поля, будет

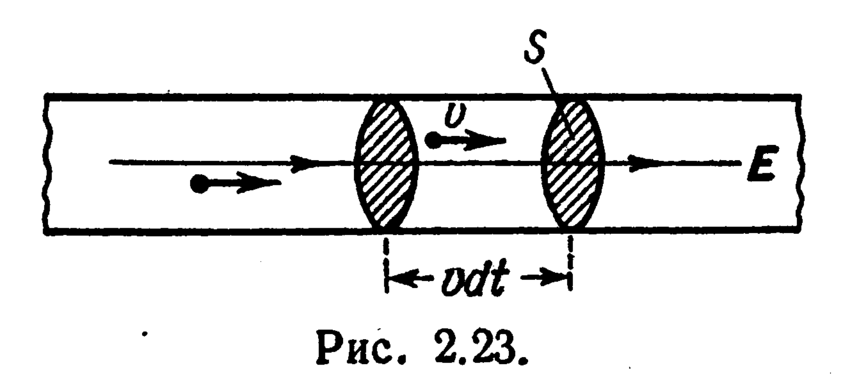


Рис. 2.23.

равен

$$dq = enS\bar{v}\,dt. \tag{20.6}$$

Отсюда величина тока, текущего в проводнике, равна

$$I = \frac{dq}{dt} = en\bar{v}S, \tag{20.7}$$

а плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = en\bar{v}. \tag{20.8}$$

Учитывая векторный характер скорости и плотности тока, можно переписать (20.8) в виде

$$\mathbf{j} = en\bar{\mathbf{v}}. \tag{20.9}$$

При выводе этих формул мы считали, что свободные заряды положительны и движутся по полю. В случае свободных электронов $e < 0$, но и $\bar{v} < 0$, т. е. направлена против поля, знак же произведения $e\bar{v}$ остается положительным, и электрический ток, как это было установлено в § 14, все равно идет в направлении электрического поля.

На основании (20.8) можно оценить порядок величины направленной скорости движения электронов. Возьмем, например, сравнительно сильный ток, плотность которого

$$j \approx 10\,\frac{а}{мм^2} = 10^7\,\frac{к}{м^2\cdot сек}\,.$$

Тогда для медного проводника, концентрация электронов в котором $n = 8\cdot 10^{28}\ м^{-3}$,

$$\bar{v} = \frac{j}{en} = \frac{10^7\ к/м^2\cdot сек}{1{,}6\cdot 10^{-19}к\cdot 8\cdot 10^{28}м^{-3}} \approx 8\cdot 10^{-4}\ м/сек = 0{,}8\ мм/сек.$$

Следовательно, даже при значительных токах

$$\bar{v} \ll u_{кв}, \tag{20.10}$$

и наличие электрического тока не сказывается на соотношениях (20.1)—(20.3).

Заряд e, помещенный в электрическом поле E, испытывает действие силы $f = eE$ и приобретает ускорение $w = f/m = eE/m$. Поэтому направленная скорость заряда v в течение времени свободного пробега не остается постоянной, а линейно возрастает со временем. Однако в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, и его дополнительная направленная скорость падает до нуля.

На графике рис. 2.24 изображена зависимость направленной скорости электрона v от времени t. За каждый период свободного пробега v нарастает от нуля до своего максимального значения

$$v_{\text{макс}} = w\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{eEl}{m\bar{u}}, \tag{20.11}$$

а затем сразу падает до нуля. В результате, хотя на каждом отрезке свободного пробега электрон движется ускоренно, но

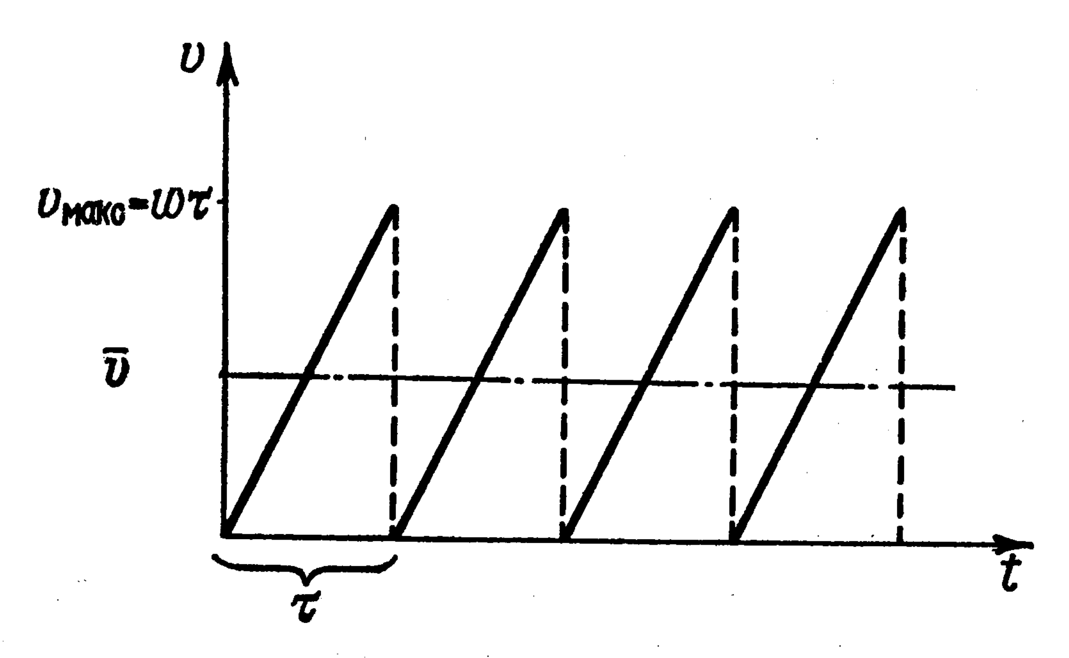


Рис. 2.24.

в среднем за много таких отрезков он перемещается в направлении поля практически равномерно со средней скоростью

$$\bar{v} = \frac{v_{\text{макс}} + 0}{2} = \frac{v_{\text{макс}}}{2} = \frac{elE}{2m\bar{u}}. \tag{20.12}$$

Подставляя (20.12) в (20.8), мы получаем

$$j = \frac{ne^2 l}{2m\bar{u}} E, \tag{20.13}$$

т. е. закон Ома в дифференциальной форме (15.8).

Таким образом, электронная теория объясняет механизм электропроводности металлов, предсказывает основную закономерность явления — закон Ома — и дает величину коэффициента пропорциональности в этом законе, т. е. электропроводности:

$$\gamma = \frac{ne^2 l}{2m\bar{u}}. \tag{20.14}$$

Для меди (в системе Гаусса)

$$\gamma = \frac{1}{\varrho} = \frac{3\cdot 10^{11}}{1{,}7\cdot 10^{-6}} \approx 2\cdot 10^{17}\,сек^{-1}. \tag{20.14a}$$

Подставляя в (20.14) вместо n и $\bar{u}$ оцененные выше значения, заряд e и массу электрона m, можно оценить длину свободного пробега в медном проводнике: $l \approx 2 \cdot 10^{-9}$ *м*, т. е. она имеет порядок нескольких десятков междуатомных расстояний.

Однако полученный результат не следует понимать как экспериментальное подтверждение правильности всех предположений Лоренца и Друде. Действительно, средняя длина свободного пробега электрона получена здесь из экспериментального значения γ, а не независимым образом из теории (и сравнена с опытом). И хотя выведенная таким путем численная величина l представляется разумной, обольщаться этим результатом нельзя. Более того, как будет показано в следующем параграфе, положения теории Лоренца—Друде привели к некоторым явным противоречиям с опытом.

Тем не менее работы Лоренца и Друде сыграли большую роль в развитии правильных представлений о природе металлов. В этих работах впервые была сделана попытка выяснить механизм явлений, происходящих в металлах. Так, например, электронная теория позволяет понять механизм выделения тепла электрическим током. Электрическое поле совершает работу и ускоряет электроны в металлах. Накапливаемая ими энергия при столкновениях с ионами передается решетке и нагревает металл. Отсюда можно вывести теоретически выражение закона Джоуля—Ленца.

Приведем схематически этот вывод. Средняя кинетическая энергия электрона в начале свободного пробега равна $m\overline{u^2}/2$, а в конце пробега $m\overline{(u+v_{макс})^2}/2$. Приращение энергии за счет работы электрических сил

$$\overline{\Delta\varepsilon} = \frac{m\overline{(u+v_{макс})^2}}{2} - \frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{m}{2}\left(2\overline{uv}_{макс} + \frac{v_{макс}^2}{2}\right) = \frac{mv_{макс}^2}{2}, \quad (20.15)$$

так как направление хаотической скорости u с одинаковой вероятностью может совпадать с направлением $v_{макс}$ ($uv_{макс} > 0$) и быть прямо противоположным ($uv_{макс} < 0$).

Эта энергия $\overline{\Delta\varepsilon}$, накапливаемая электроном при его свободном пробеге, спустя время τ отдается ионам решетки. Полная энергия, выделяющаяся в единице объема проводника за единицу времени, равна

$$p = \frac{n\overline{\Delta\varepsilon}}{\tau} = \frac{n\bar{u}}{l}\frac{mv_{макс}^2}{2} = \frac{n\bar{u}}{l}\frac{m}{2}\frac{e^2l^2E^2}{m^2\bar{u}^2} = \frac{ne^2l}{2m\bar{u}}E^2 = \gamma E^2. \quad (20.16)$$

Это соотношение представляет собой дифференциальную форму закона Джоуля—Ленца. Для перехода к интегральным соотношениям выделим участок цилиндрического проводника длиной L и с площадью поперечного сечения S. Мощность, выделяемая в объеме

$V=SL$ этого участка, равна

$$P=pV=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{U}{L}\right)^2 SL=\frac{U^2}{\varrho\frac{L}{S}}=\frac{U^2}{R}, \qquad (20.17)$$

где $R=\varrho L/S$ есть полное сопротивление этого участка.

Нетрудно убедиться, что выражение (20.17) тождественно ранее выведенному выражению (18.9) для закона Джоуля—Ленца.

§ 21. Основы современной теории металлов

Классическая электронная теория металлов, основы которой изложены в предыдущем параграфе, предсказывает, кроме закона Ома, и другие закономерности. Остановимся на некоторых из них.

Средняя энергия одного электрона

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT, \qquad (21.1)$$

и средняя энергия электронного газа в единице объема

$$W=n\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}knT. \qquad (21.2)$$

Следовательно, теплоемкость единицы объема электронного газа будет равна

$$C_v=\frac{dW}{dT}=\frac{3}{2}kn, \qquad (21.3)$$

а теплоемкость, отнесенная к одному электрону,

$$C_e=\frac{3}{2}k. \qquad (21.4)$$

Высокая концентрация электронного газа и большая подвижность свободных электронов обусловливают легкую передачу заряда—высокую электропроводность металлов—и интенсивный перенос энергии—высокую теплопроводность металлов—по сравнению с диэлектриками. Считая, что практически вся теплопроводность металлов обусловлена свободными электронами, можно рассчитать коэффициент теплопроводности электронного газа λ методами кинетической теории газов. Используя формулы молекулярной физики (том I, часть II), найдем

$$\lambda=\frac{1}{3}l\bar{u}nC_e. \qquad (21.5)$$

Сопоставляя (21.5) с выражением для коэффициента электропроводности

$$\gamma=\frac{ne^2l}{2m\bar{u}}, \qquad (21.6)$$

видим, что металлы различаются концентрацией свободных электронов n и длиной свободного пробега l. Металлы, у которых произведение nl больше, обладают одновременно и большей электропроводностью и большей теплопроводностью.

Составим отношение λ к γ; тогда величина nl сократится:

$$\frac{\lambda}{\gamma}=\frac{2m\overline{u^2}C_e}{3e^2}=\frac{4}{3}\frac{\bar{\varepsilon}C_e}{e^2}. \qquad (21.7)$$

Подставляя вместо $\bar{\varepsilon}$ и C_e их выражения согласно (21.1) и (21.4), получим

$$\frac{\lambda}{\gamma}=3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \qquad (21.8)$$

Отношение теплопроводности к электропроводности для всех металлов должно быть одинаково и должно расти прямо пропорционально абсолютной температуре. Это соотношение было экспериментально установлено еще в XIX веке Видеманом и Францем. Численный коэффициент в экспериментальном законе Видемана и Франца оказался очень близким к теоретическому значению в (21.8).

Однако это согласие теории с опытом вскоре оказалось нарушенным. Произведенные Лоренцем уточненные расчеты с учетом распределения электронных скоростей по Максвеллу привели к замене в теоретической формуле (21.8) множителя 3 на 2 и к резкому увеличению расхождения теории с опытом.

Второе затруднение классической электронной теории возникло при сопоставлении с опытом формул (21.3) и (21.4). Рассмотрим 1 килограмм-атом одновалентного металла. Он состоит из $N_0 = 6{,}02\cdot 10^{26}$ ионов, колеблющихся около своих положений равновесия, и N_0 свободных электронов. Колебательная теплоемкость твердого тела по закону Дюлонга и Пти равна

$$C_{\text{ат}}=3R=25\,\frac{\text{кдж}}{\text{кг-атом}\cdot\text{град}}.$$

Теплоемкость электронного газа

$$C_{\text{эл}}=\frac{3}{2}kN_0=\frac{3}{2}R=12{,}5\,\frac{\text{кдж}}{\text{кг-атом}\cdot\text{град}}.$$

Таким образом, по электронной теории теплоемкость одновалентных металлов должна составлять

$$C_{\text{мет}}=C_{\text{ат}}+C_{\text{эл}}=37{,}5\,\frac{\text{кдж}}{\text{кг-атом}\cdot\text{град}}.$$

Однако опыт показывает, что теплоемкость металлов так же, как теплоемкость твердых диэлектриков, в соответствии с законом Дюлонга и Пти близка к $25\,\frac{\text{кдж}}{\text{кг-атом}\cdot\text{град}}$. Таким образом обнаружилось

неожиданное и непонятное явление практического отсутствия теплоемкости у электронного газа.

Третьим затруднением классической электронной теории металлов явилась невозможность правильно объяснить с ее помощью температурную зависимость сопротивления (15.10).

В знаменателе выражения (20.14) или (21.6) для электропроводности стоит средняя скорость $\bar{u}$, которая в соответствии с (20.2) должна быть пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры. Для объяснения же зависимости (15.10) электропроводность должна быть обратно пропорциональна абсолютной температуре T в первой степени, а не $\sqrt{T}$.

Приведенные выше противоречия указывают на то, что классическая электронная теория, представлявшая электрон как материальную точку, подчинявшуюся законам классической механики, не учитывала некоторых специфических свойств самого электрона, которые еще не были известны к началу XX века. Эти свойства были установлены позднее при изучении строения атома, и в 1924 г. была создана новая, так называемая квантовая или волновая механика движения электронов.

На основе квантовой механики советский физик Я. И. Френкель и немецкий физик А. Зоммерфельд разработали современную электронную теорию металлов.

Мы не можем здесь оперировать законами квантовой механики. Однако мы не связаны и с необходимостью производить точные расчеты. Наша цель состоит в изложении правильных и наглядных представлений о природе электрических процессов в металлах и других твердых телах. Мы будем исходить из современных представлений о строении атома, частично знакомых читателю, на которых мы сейчас коротко остановимся.

Атом состоит из ядра, вокруг которого движутся электроны. Орбиты электронов не произвольны, а строго определенны. Орбиты подразделяются по слоям, причем энергии электронов, занимающих орбиты одного слоя, сравнительно близки друг к другу. Энергии же электронов, орбиты которых относятся к разным слоям, различаются уже на весьма большие величины. На каждой орбите может одновременно находиться не более двух электронов. Однако и эти электроны не тождественны в своих свойствах. Установлено, что электроны обладают собственным, т. е. внутренне им присущим, моментом количества движения — спином (от английского слова «spin» — «веретено»). Электроны, движущиеся по одной орбите, должны отличаться направлением спина, т. е. также находятся в различных состояниях.

Таким образом, электроны, образующие электронную оболочку атома, подчиняются следующему закону: ***никакие два электрона не могут находиться в одном и том же состоянии.*** Этот закон,

получивший название принципа Паули, оказался совершенно универсальным и применимым не только к электронам в атомах, но и к любым системам электронов *).

Построим график энергий электронов для разных орбит какого-либо сложного атома (рис. 2.25). Наличие на данной орбите электрона — одного или двух — будем отмечать условно точками (острие стрелки спина, направленной на нас) и крестиками (оперение стрелки, направленной от нас), как это показано на рисунке.

Самым важным для дальнейшего является то обстоятельство, что качественно график уровней энергии системы электронов твердого тела имеет такой же вид. Согласно принципу Паули состояния электронов в любой системе должны различаться (двух электронов в одном и том же состоянии быть не может), а различным состояниям будут отвечать, вообще говоря, хоть сколько-нибудь различные энергии.

При образовании твердого тела из отдельных атомов и молекул происходит следующее. Состояния электронов, движущихся вокруг отдельных ядер на внутренних электронных оболочках, практически не меняются. Что же касается внешних электронных оболочек, то они в результате сближения отдельных атомов и возникающего при этом сильного взаимодействия между электронами перестраиваются. В одних случаях электроны продолжают удерживаться молекулами или ионами, которым они принадлежали. В этом случае подвижность электронов ограничена, и вещество представляет собой твердый диэлектрик, не способный проводить электрический ток, а лишь поляризующийся в электрическом поле. В других случаях электроны (валентные), как уже отмечалось выше, освобождаются, приобретают подвижность в веществе. В этом случае последнее представляет собой проводник — металл (промежуточный случай — наличие большого числа слабо связанных, почти свободных электронов — будет рассмотрен ниже, в параграфе, посвященном полупроводникам).

Рис. 2.25.

Особенно простую и наглядную картину электрических свойств твердых тел можно получить с помощью графиков энергии электронов в твердом теле, подобных графику энергий электронов в атоме (рис. 2.25).

Как и в случае отдельных атомов, значения энергии электронов в твердом теле образуют системы полос, в которых возможные

*) Принцип Паули применим ко многим элементарным частицам: протонам, нейтронам и некоторым другим, имеющим такой же спин, как и электрон.

значения энергии составляют множество очень близко расположенных уровней энергии, прерываемых полосами, в которых возможные для электронов значения энергии отсутствуют (рис. 2.26). Энергия, отвечающая переходу электрона с одного уровня на другой, соседний, внутри полосы совершенно ничтожна, во всяком случае много меньше средней кинетической энергии атомов kT при комнатной температуре. Поэтому изменение состояния электрона внутри такой полосы можно было бы считать непрерывным, если бы не важное, отмеченное уже выше, обстоятельство — принцип Паули. Число различных состояний в случае их непрерывного изменения бесконечно велико. При ступенчатом же изменении состояний, т. е. при **дискретной** их последовательности, число состояний в каждой полосе конечно, а следовательно, в соответствии с принципом Паули и число электронов, способных находиться в этих состояниях, также конечно. Если, например, в полосе B все состояния заняты (на каждом энергетическом уровне по два электрона с противоположными спинами), то ни один электрон больше в эту полосу попасть не может.

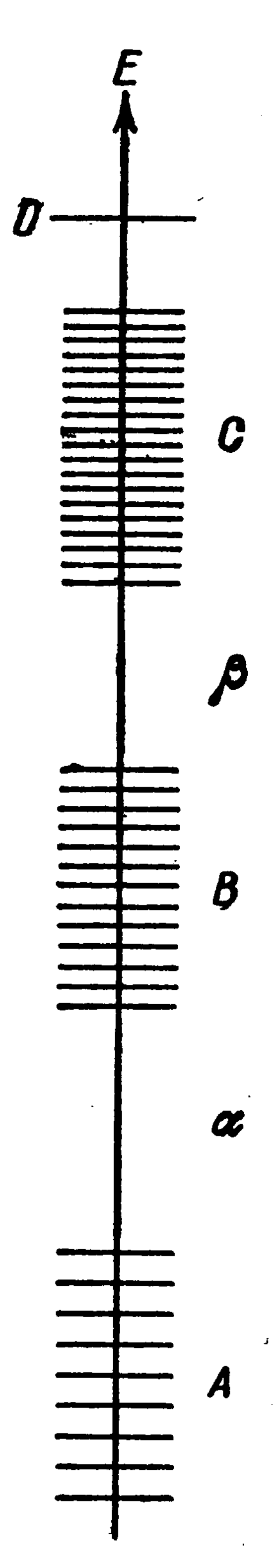


Рис. 2.26.

Согласно принятой терминологии мы будем называть полосы, в которых заключены разрешенные уровни, **разрешенными зонами** (на рис. 2.26 полосы A, B, C); полосы же, в которых разрешенные уровни отсутствуют (полосы α и β на рисунке), будем называть **запрещенными зонами**.

Подчеркнем, что наличие разрешенных энергетических уровней и полос еще не означает наличия электронов на них, как и в атоме наличие орбит — возможных путей движения электронов — не означает, что на этих орбитах обязательно находятся электроны.

Рассмотрим случай, когда нижние разрешенные зоны полностью укомплектованы электронами, ширина запрещенной зоны значительна ($\gg kT$), а над нею расположена зона, в которой электронов нет (рис. 2.27). Вещество, описываемое таким распределением электронов, есть диэлектрик. Действительно, состояние системы электронов может измениться только в том случае, если часть из них перейдет из нижних разрешенных энергетических зон в верхнюю разрешенную, но не занятую электронами зону. Но для этого нужна большая энергия, превышающая энергию теплового движения ($\sim kT$) или энергию, которую электрон может приобрести во внешнем поле (случай очень больших полей, когда наступает пробой диэлектрика, мы здесь не рассматриваем). Следовательно, состояния элект-

ронов, ограниченные сверху широкой запрещенной зоной, меняться не могут. В частности, электроны не могут приобрести под влиянием слабого внешнего поля добавочную скорость (энергию), отвечающую возникновению тока проводимости. Значит, вещество, представленное рассмотренным энергетическим графиком, есть изолятор.

Рассмотрим теперь случай, когда в верхней занятой зоне остаются незанятые энергетические уровни. Как мы увидим сейчас, этот случай отвечает металлам. Будем называть верхнюю, свободную от электронов часть разрешенной зоны *зоной проводимости*. Переход электронов на уровни этой части разрешенной зоны связан с приобретением ими добавочной энергии (скорости), обусловливающей прохождение электрического тока. Начнем рассмотрение со случая, когда вещество обладает температурой, равной абсолютному нулю. Соответствующее этому случаю распределение электронов показано на рисунке 2.28, *а*: все нижние энергетические уровни заняты парами электронов с противоположными спинами. При $T=0°$ K энергия всей системы, в том числе и электронов, должна быть наименьшей из всех возможных. Хотя электроны, расположенные на верхних уровнях, и обладают сравнительно большой энергией, но перейти в состояние с меньшей энергией они не могут: ведь эти состояния уже заняты другими электронами. А появление двух или нескольких электронов в одном и том же состоянии невозможно (принцип Паули). Энергию электронов, занимающих самый высокий энергетический уровень (при $T=0°$ K), мы будем обозначать $\varepsilon_{\text{макс}}$. Ее величина по порядку равна 10^{-11} *эрг*. Такого же порядка величины и *средняя кинетическая энергия электронов при абсолютном нуле температуры*. Для сравнения отметим, что средняя кинетическая энергия молекул одноатомного газа при комнатной температуре ($T\approx 300°$ K) составляет всего лишь $5\cdot 10^{-14}$ *эрг*. Следует твердо помнить, что огромная кинетическая энергия электронного газа в металлах обусловлена принципом Паули и имеет *нетепловое происхождение*. Ее нельзя отнять за счет понижения температуры. Это читателю уже известно: ведь движение электронов в атомах также не прекращается при приближении вещества к $T=0°$ K. В атомах электроны также не собираются все на нижнем энергетическом уровне (в первом слое орбит). Следовательно, рассмотренный нами электронный газ в металлах при абсолютном нуле дает нам еще один пример того, что материя без движения немыслима. Абсолютный нуль для любых систем (диэлектриков, металлов и т. д.) означает не полное отсутствие движения, но состояние с минимальной возмож-

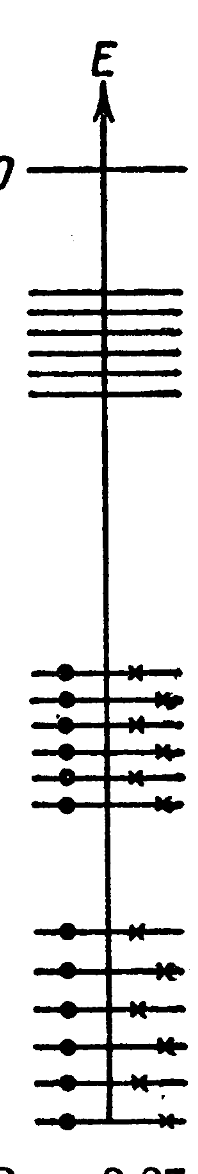


Рис. 2.27.

ной энергией, которую уже нельзя уменьшить за счет охлаждения.

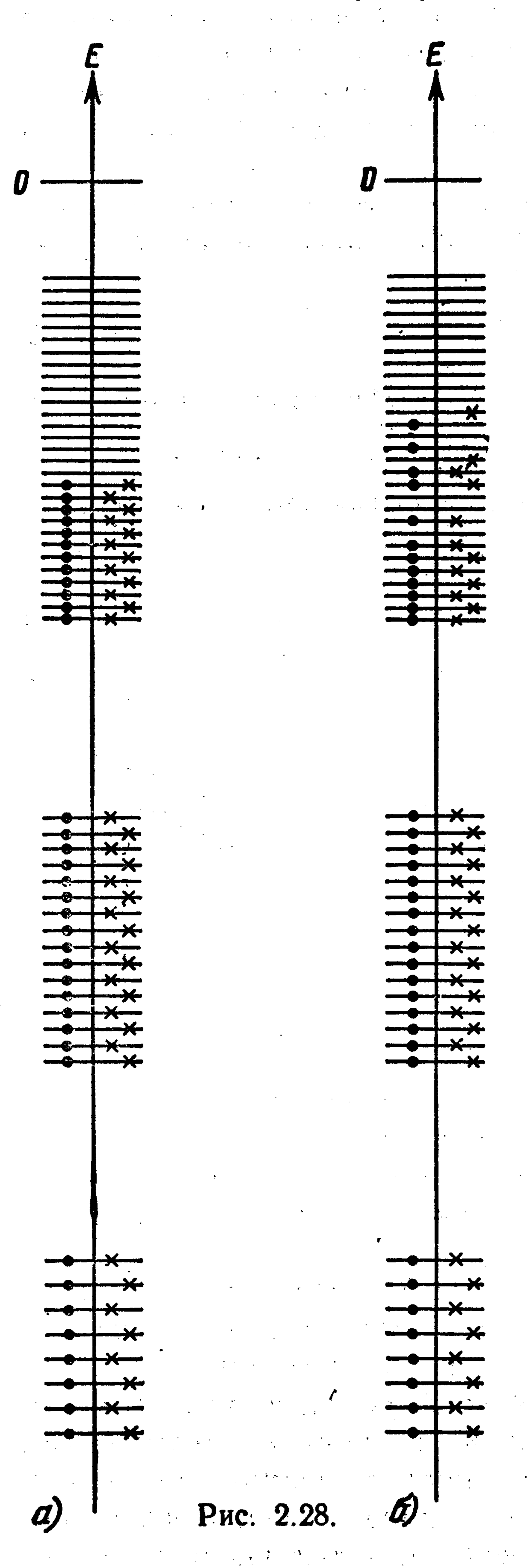


Рис. 2.28.

С повышением температуры колеблющиеся ионы решетки начинают передавать электронам энергию и переводить часть электронов на более высокие энергетические уровни. Однако даже при комнатных температурах средняя энергия теплового движения $\sim kT$ мала по сравнению со средней энергией электронов при абсолютном нуле $\bar{\varepsilon}_{T=0} = \varepsilon_0$, и эта порция энергии достаточна лишь для перевода электрона на один из ближайших энергетических уровней. Рассматривая электроны, движущиеся на низших уровнях, мы видим, что все ближайшие более высокие уровни полностью заняты электронными пáрами. Нижний электрон мог бы перейти на более высокий энергетический уровень, лишь перепрыгнув все вышележащие, которые заняты. Но для такого большого энергетического скачка энергии порядка kT недостаточно. Поэтому поглощать тепловую энергию могут лишь электроны, находящиеся на наиболее высоких уровнях, как это показано на рис. 2.28, *б*, а таких электронов в металле сравнительно мало. Таким образом, подавляющая часть электронов «приморожена» к своим энергетическим уровням, и все они не способны принимать добавочную энергию. В этом обстоятельстве и состоит разгадка ничтожно малой теплоемкости электронного газа. При не слишком высоких температурах воспринимать добавочную энергию («нагреваться») могут лишь очень немногие электроны, энергетические уровни которых расположены в непосредственной близости от свободных уровней. Для их перехода на более высокий свободный уровень нужна лишь

энергия $\sim kT$, и такой переход становится возможным. Но при обычных температурах относительное число таких электронов столь мало, что их доля в общей теплоемкости тела остается практически незаметной.

Общий ход зависимости приходящейся на один электрон в металле средней энергии $\bar{\varepsilon}(T)$ с изменением абсолютной температуры T показан на рис. 2.29 (полная энергия электронного газа получается умножением $\bar{\varepsilon}(T)$ на число электронов N, так что график ее зависимости от температуры имеет тот же вид).

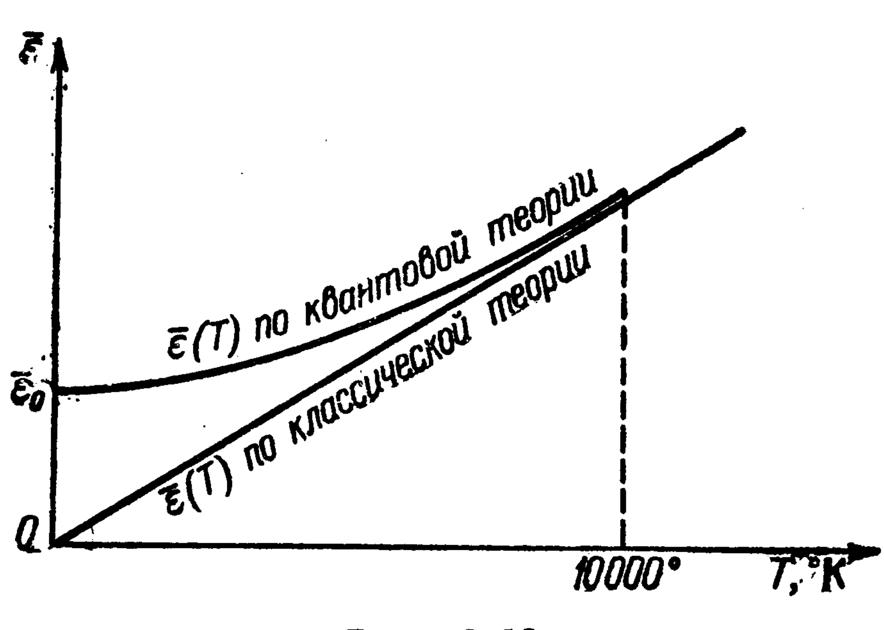


Рис. 2.29.

Соображения Я. И. Френкеля позволяют очень наглядно показать общий характер зависимости $\bar{\varepsilon}$ от T. Действительно, при низких температурах число возбужденных (перешедших на более высокие энергетические уровни) электронов n' определяется из условия, что добавочная энергия наиболее высоко поднявшихся электронов имеет порядок средней энергии теплового движения:

$$n'\Delta\varepsilon \approx kT,$$

где $\Delta\varepsilon$ — разность энергий соседних уровней. Отсюда

$$n' = \frac{kT}{\Delta\varepsilon},$$

а общая добавка к энергии электронного газа равна

$$n'kT \approx \frac{(kT)^2}{\Delta\varepsilon}.$$

Следовательно, и добавка к средней энергии, приходящейся на один электрон, возрастает пропорционально T^2. Обозначая коэффициент пропорциональности через α, имеем

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \alpha T^2 \text{ (при обычных } T). \qquad (21.9)$$

При очень низких температурах

$$\bar{\varepsilon} \approx \varepsilon_0 = \text{const}, \qquad (21.9\text{a})$$

и, следовательно, теплоемкость, отнесенная к одному электрону, при обычных температурах

$$C_e = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = 2\alpha T, \qquad (21.10)$$

а при низких температурах

$$C_e \to 0. \qquad (21.10a)$$

При очень высоких температурах (порядка десятков тысяч градусов, недостижимых при обычных условиях для твердых металлов), kT становится столь большой величиной, что возбуждаются электроны всех уровней, а не только верхних. Теперь число возбуждаемых электронов уже постоянно и равно полному их числу и далее не меняется с ростом температуры. Принимаемая каждым из них средняя энергия пропорциональна T, и электронный газ приобретает свойства классического газа:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT, \quad C_e=\frac{3}{2}k=\text{const}.$$

Таким образом, кривая зависимости $\bar{\varepsilon}$ от T, как это видно из рис. 2.29, идет вначале как парабола второй степени, затем переходит в кривую, асимптотически стремящуюся к классической прямой: $\bar{\varepsilon}_{\text{класс}}={}^3/_2\,kT$. Отметим еще раз, что при обычных условиях этот участок кривой недостижим, так как металл обращается в пар задолго до достижения указанных температур.

В теоретическую формулу подтвержденного опытом закона Видемана—Франца (21.7) входит произведение $\bar{\varepsilon}C_e$. По классической электронной теории

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT, \quad C_e=\frac{3}{2}k=\text{const} \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon}C_e \sim T.$$

По современным представлениям соотношения средней энергии и теплоемкости получаются обратными:

$$\bar{\varepsilon}\approx\varepsilon_0=\text{const} \quad \text{и} \quad C_e=2\alpha T\sim T.$$

В результате по-прежнему произведение $\bar{\varepsilon}C_e \sim T$. Точные вычисления дают окончательное выражение:

$$\frac{\lambda}{\gamma}=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2 T, \qquad (21.11)$$

отличающееся от (21.8) лишь численным множителем и еще лучше согласующееся с опытом.

Из практического постоянства средней энергии $\bar{\varepsilon}$ следует, что и $\bar{u}\approx\text{const}$. Поэтому температурная зависимость удельного сопротивления

$$\varrho=\frac{1}{\gamma}=\frac{2m\bar{u}}{ne^2 l} \qquad (21.12)$$

может определяться лишь длиной свободного пробега l. При абсолютном нуле температуры электроны движутся сквозь весь кристалл,

не испытывая столкновений. Следовательно, при $T \to 0°K$

$$l \to \infty \text{ и } \varrho \to 0. \qquad (21.13)$$

Причиной этого также является волновая природа электрона. При $T=0°K$ ионы металла образуют неподвижную кристаллическую решетку, и электронные волны, огибая ионы, проходят через весь кристалл, не отклоняясь в стороны.

С повышением температуры ионы металла приходят в тепловое колебательное движение, нарушающее идеальную правильность кристаллической решетки. То сближаясь, то удаляясь друг от друга, ионы создают «флуктуации» плотности, на которых происходит рассеивание электронных волн, соответствующее соударениям электронов с кристаллической решеткой. Чем выше температура, тем интенсивнее и чаще возникающие флуктуации кристаллической решетки и тем короче длина свободного пробега электрона. Согласно вычислениям

$$l \sim T^{-1} \text{ и } \varrho \sim T, \qquad (21.14)$$

в полном соответствии с опытом.

Правильность изложенных представлений подтверждается и другими фактами. Неоднородности в кристаллической решетке можно создавать и другим путем, например внедряя в металл атомы примесей. И действительно, достаточно сравнительно небольшого количества примесей к чистому металлу, чтобы его сопротивление резко возросло. Известно, что серебро (Ag) имеет сопротивление меньшее, чем алюминий (Al). Однако если к чистому Al добавлять Ag, то сопротивление будет не убывать, а возрастать. При $\sim 90\%$ Ag сопротивление будет примерно в 15 раз больше сопротивления чистого Al и в 30 раз больше, чем у чистого серебра. Причина состоит в том, что решетка, образующаяся из атомов двух сортов, оказывается весьма нерегулярной, в силу чего и возрастает сопротивление сплава. Лишь когда количество Ag в сплаве будет близким к 100%, сопротивление сплава начнет уменьшаться, как это показано на рис. 2.30.

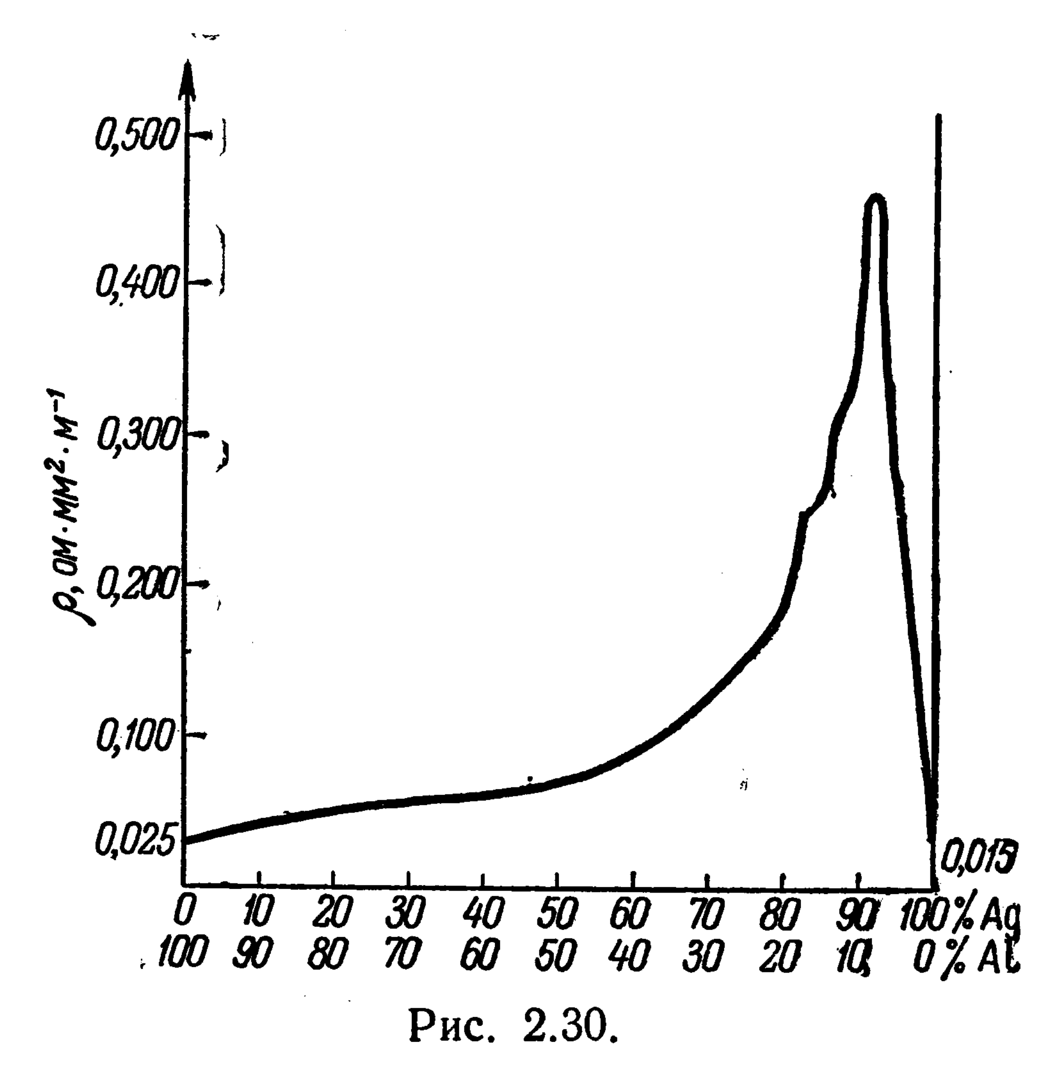


Рис. 2.30.

Таким образом, современная теория металлов, учитывающая волновые свойства электрона, разъясняет противоречия, возникающие в классической электронной теории, и правильно предсказывает целый ряд новых фактов.

§ 22. Контактные явления и термоэлектродвижущая сила

Электроны в металле свободно перемещаются через весь кристалл, но не покидают его. Как только электрон выходит наружу, весь кусок металла заряжается положительно и втягивает этот электрон обратно. Между тем, обладая кинетической энергией, электроны непрерывно «выскакивают» из металла на расстояния, не превышающие атомных размеров, и втягиваются обратно. В результате решетка из положительных ионов будет снаружи обволакиваться тонким слоем отрицательных электронов, и на всей поверхности металла образуется *двойной электрический слой*, как показано на рис. 2.31, *а*. Этот двойной слой является своеобразным конденсатором, препятствующим новым электронам выходить изнутри металла наружу.

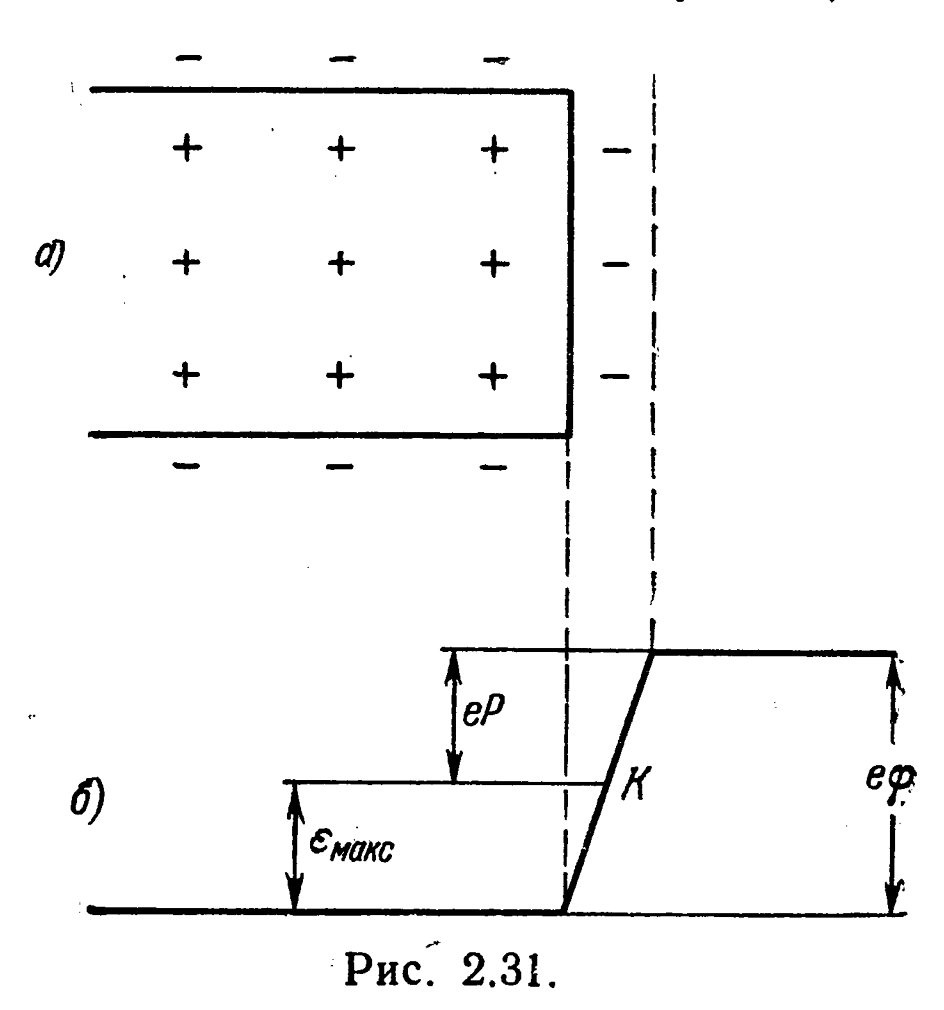


Рис. 2.31.

Обозначим разность потенциалов на обкладках этого конденсатора через φ. Работа, необходимая для вырывания из металла неподвижного, т. е. не обладающего кинетической энергией, электрона, равна $e\varphi$. На эту величину потенциальная энергия электрона, вышедшего из металла, будет превышать его потенциальную энергию внутри металла (рис. 2.31, *б*).

Но в металле неподвижных электронов нет, и подавляющая их часть обладает большой кинетической энергией. Обозначим через $\varepsilon_{макс}$ наибольшую кинетическую энергию электрона в металле и отложим эту величину на графике рис. 2.31, *б*. Для выхода из металла электронов с кинетической энергией $\varepsilon_{макс}$ должна быть произведена работа

$$A = e\varphi - \varepsilon_{макс}, \tag{22.1}$$

где A — наименьшая работа, необходимая для выхода электрона из металла, — называется **работой выхода электрона**. Вели-

чина A меньше $e\varphi$, так как наиболее быстрые электроны за счет своей кинетической энергии могут частично проникать в двойной слой и для их выхода из металла достаточно преодолеть лишь часть общей разности потенциалов φ (от точки K на рис. 2.31, *б* до точек, находящихся снаружи металла), равную P.

Величина P определяется из соотношения

$$A = eP, \quad \text{или} \quad P = \frac{A}{e}, \tag{22.2}$$

и носит название **контактного потенциала** данного металла. Для различных металлов контактный потенциал меняется в пределах от 1 до 10 вольт. Для практических целей весьма важно иметь в виду, что контактный потенциал и работа выхода существенно зависят от чистоты металла и обработки его поверхности.

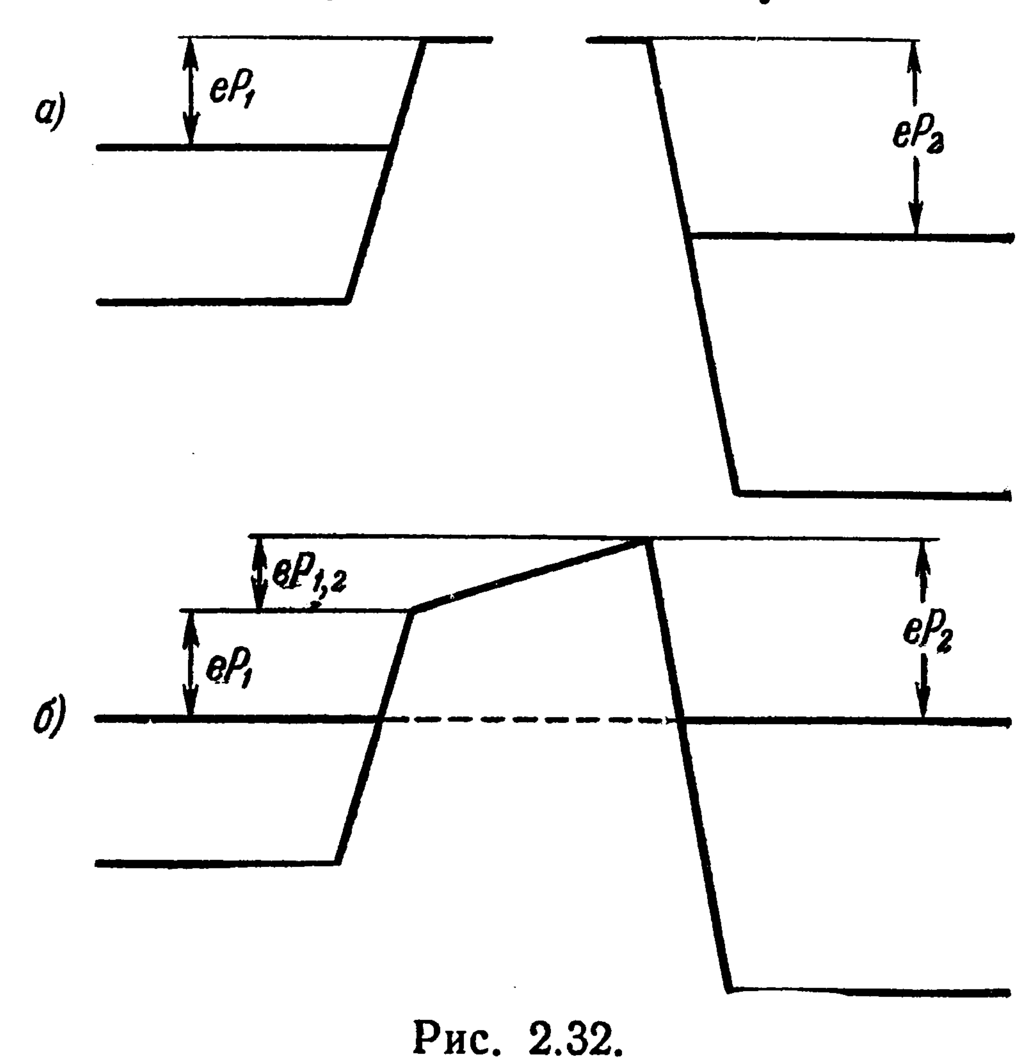


Рис. 2.32.

Приведем в соприкосновение два различных металла. До их контакта потенциал в воздухе между металлами будет одинаков, как это показано на рис. 2.32, *а*. При этом полная энергия электронов верхнего заполненного уровня в первом металле: $e\varphi_1 - \varepsilon_{1,\text{макс}} = eP_1$, отличается от полной энергии соответствующих электронов во втором металле: $e\varphi_2 - \varepsilon_{2,\text{макс}} = eP_2$. При соприкосновении металлов электроны получат возможность переходить из одного металла в другой. Немедленно начнется переход электронов из того металла, где энергия верхнего заполненного уровня более высока, во второй металл. Этот переход будет продолжаться до тех пор, пока верхние уровни в обоих металлах не сравняются. При этом установится динамическое, подвижное равновесие.

В случае рис. 2.32, *а* видно, что часть электронов из первого металла перейдет во второй ($eP_1 < eP_2$). В результате потери части электронов первый металл зарядится положительно, значит, потенциальная энергия электронов в нем уменьшится. Наоборот, второй металл, приобретший эти электроны, зарядится отрицательно, и потенциальная энергия его электронов возрастет. Возникшая

в результате контакта металлов добавочная разность потенциалов обозначена через $P_{1,2}$, а добавочная разность энергий — через $eP_{1,2}$; из рис. 2.32, *б* видно, что

$$eP_1 + eP_{1,2} = eP_2,$$

т. е.

$$P_{1,2} = P_2 - P_1. \qquad (22.3)$$

Разность потенциалов, возникающая между двумя кусками металла при их соприкосновении, $P_{1,2}$, носит название к о н т а к т н о й р а з н о с т и п о т е н ц и а л о в, которая, как следует из (22.3), *равна разности контактных потенциалов* этих металлов.

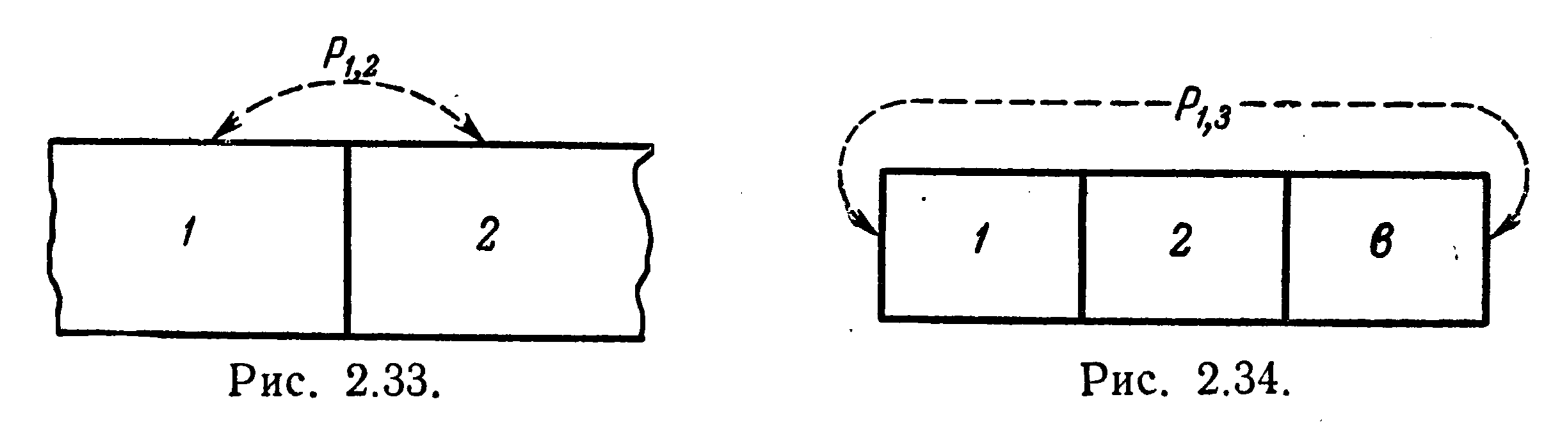


Рис. 2.33. Рис. 2.34.

Контактная разность потенциалов не создает электрического тока, так как потенциалы электронов, способных менять свое состояние (электронов верхней занятой зоны, рядом с которой имеются свободные зоны), в точности равны. Как показано на рис. 2.33, величина $P_{1,2}$ есть разность потенциалов между поверхностями обоих металлов в окружающем их пространстве, в котором при этом создается электрическое поле. Поле это может быть весьма заметным, поскольку величина $P_{1,2}$ может достигать нескольких вольт. Это обстоятельство необходимо всегда учитывать при создании электроизмерительных приборов, электронных приборов и т. п.

Если соединены последовательно три металла (рис. 2.34), то контактная разность потенциалов между концами цепи находится по правилу

$$P_{1,3} = P_{1,2} + P_{2,3} = P_2 - P_1 + P_3 - P_2 = P_3 - P_1, \qquad (22.4)$$

т. е. равна разности контактных потенциалов крайних металлов и не зависит от прочих металлов, находящихся между ними.

Если составить из нескольких металлов замкнутую цепь, как показано на рис. 2.35, то

$$\sum P_i = P_1 - P_1 = 0, \qquad (22.5)$$

т. е. контактная разность потенциалов в замкнутой цепи равна нулю и не вызывает тока.

Строго говоря, простая картина распределения потенциалов и энергий электронов в металлах, изображенная на рис. 2.31 и

рис. 2.32, является точной лишь при абсолютном нуле температуры. Как указывалось в § 21, при повышении температуры в металле появляется небольшое количество электронов,

$$n' \sim T,$$

с энергиями, несколько превышающими величину $\varepsilon_{\text{макс}}$. Это приводит к небольшому уменьшению работы выхода электрона eP_1 и контактного потенциала P_1 металла. Вследствие различной структуры электронных уровней указанные величины у различных металлов изменяются по-разному, а значит, контактная разность потенциалов $P_{1,2} = P_1 - P_2$ будет также несколько меняться с температурой.

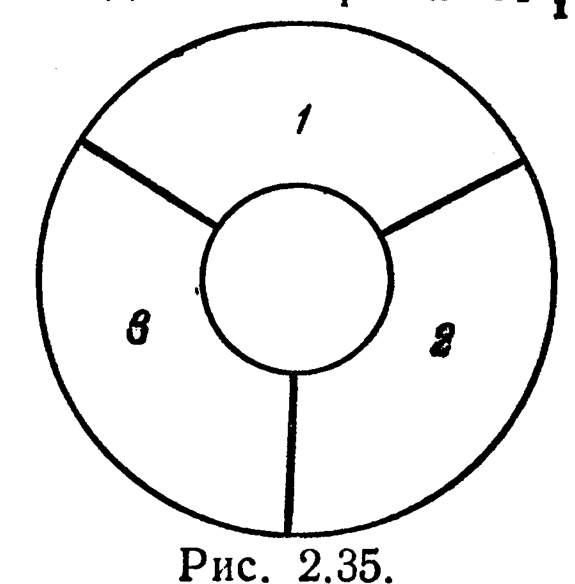


Рис. 2.35.

При $T > 0°$ К становится возможным целый ряд других так называемых термоэлектрических явлений в металлах. Остановимся здесь на имеющих важное практическое значение явлении Пельтье и термоэлектродвижущей силе (термоэдс).

Как мы видели в §§ 20 и 21, электронный газ в металле во многом схож с идеальным газом, свойства которого мы рассматривали в томе I, хотя и отличается от него закономерностями движения составляющих его частиц (волновые свойства электрона, принцип Паули). В частности, высокая подвижность частиц должна обусловливать существование в электронном газе различных кинетических процессов переноса, вызываемых наличием градиентов концентрации, температуры или электрического потенциала. Одним из таких процессов является рассмотренная выше электропроводность металлов, т. е. перенос заряда электронами, движущимися под действием электрического поля $E = -d\varphi/dx$, приложенного к металлу.

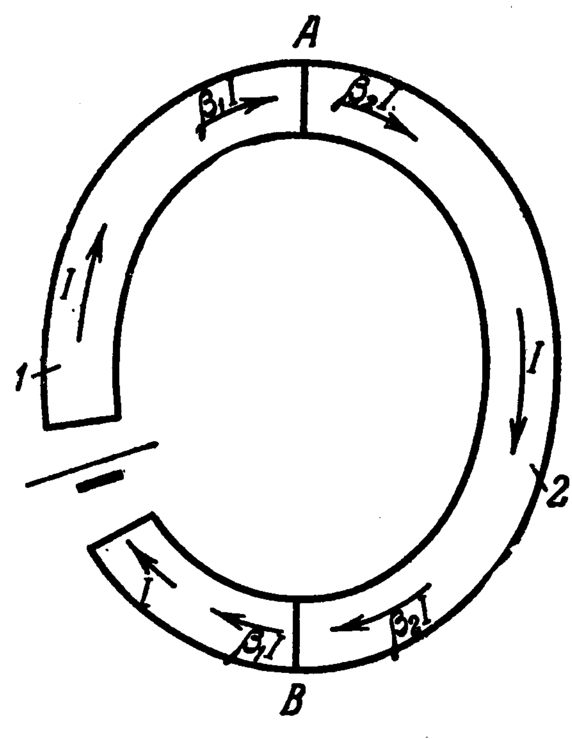


Рис. 2.36.

При наличии электрического тока в металле поток направленно движущихся электронов переносит с собой определенную энергию, т. е. электрический ток сопровождается пропорциональным ему потоком энергии.

Составим замкнутую цепь из двух металлов *1* и *2*, спаянных в сечениях *A* и *B*, и будем пропускать через эту цепь постоянный ток *I* от внешнего источника (рис. 2.36). Тогда при равенстве токов в каждом из металлов потоки энергии в обоих металлах будут несколько различными. Точная теория показывает, что это различие обусловлено

различным соотношением между энергией и скоростью у электронов, переброшенных тепловым движением на более высокие уровни (n_1' электронов в первом металле и n_2' во втором).

Если за время t через спай A пройдет количество электричества $q = It$, то за то же время к спаю A из первого металла подойдет поток энергии $\beta_1 q$ и уйдет во второй металл $\beta_2 q$, где β_1 и β_2 — соответствующие коэффициенты пропорциональности между током и энергией в обоих металлах. Если $\beta_1 > \beta_2$, то разность этих потоков

$$Q_{1,2} = (\beta_1 - \beta_2)\, q = \Pi_{1,2}\, q = \Pi_{1,2}\, It \tag{22.6}$$

останется в месте спая и выделится в виде тепла.

В спае B будет иметь место противоположная ситуация: приходящий из второго металла поток энергии будет меньше потока, уходящего в первый металл, и в этом спае будет поглощаться такое же количество тепла, т. е.

$$Q_{2,1} = -Q_{1,2}. \tag{22.7}$$

Наблюдающееся, таким образом, при прохождении тока в цепи, составленной из разнородных металлов, охлаждение одних спаев и нагревание других носит название явления Пельтье. Коэффициент пропорциональности $\Pi_{1,2}$, характеризующий количество тепла, выделяемое или поглощаемое при прохождении через спай единицы заряда ($q = 1$), называется коэффициентом Пельтье для данной пары металлов.

Кроме тепла Пельтье, в цепи выделяется и тепло по закону Джоуля—Ленца, зависящее от сопротивления участков цепи. В результате на участке, содержащем спай A, будет выделяться мощность

$$\frac{Q_A}{t} = R_A I^2 + \frac{Q_{1,2}}{t} = R_A I^2 + \Pi_{1,2} I, \tag{22.8}$$

а на участке, содержащем спай B, — мощность

$$\frac{Q_B}{t} = R_B I^2 + \frac{Q_{2,1}}{t} = R_B I^2 - \Pi_{1,2} I. \tag{22.8'}$$

Тепло, выделенное в единицу времени во всем контуре с полным сопротивлением $R = R_A + R_B$, будет равно

$$\frac{Q}{t} = \frac{Q_A + Q_B}{t} = \\ = R_A I^2 + \Pi_{1,2} I + R_B I^2 - \Pi_{1,2} I = (R_A + R_B)\, I^2 = RI^2 \tag{22.9}$$

и подчиняется закону Джоуля—Ленца. Однако, сверх того, *происходит добавочный перенос тепла $Q_{1,2}$ от одного из спаев контура к другому*, причем при перемене направления тока на обрат-

ное тепло будет выделяться в спае B и поглощаться в спае A. Это явление нашло себе различные технические применения.

Так, в качестве электрического нагревателя выгоднее использовать вместо обычного омического сопротивления контур, схематически изображенный на рис. 2.36, вынося охлаждающийся спай во внешнюю среду. При этом нагреваемый объем получит не только количество тепла по закону Джоуля—Ленца, но и добавочное тепло Пельтье, которое будет отнято от внешней среды наружным охлаждающимся спаем и выделится на втором спае внутри объема. Заметим, однако, что такой добавочный поток тепла не означает возможности «отапливания помещения только за счет дальнейшего охлаждения наружного морозного воздуха», как об этом иногда писали. В согласии со вторым началом термодинамики в данном случае процесс переноса тепла от более холодного тела к более горячему возможен лишь за счет необратимого превращения электрической энергии тока (упорядоченного движения электронов) в тепловую на омическом сопротивлении. Охлаждение соответствующих спаев при прохождении через них тока представляется, в свою очередь, перспективным для создания удобных электрохолодильных устройств, не содержащих движущихся элементов (мотор, компрессор). Эта идея уже начинает реализоваться, но при замене металлов полупроводниками, о которых будет идти речь ниже.

Из (22.8) видно, что джоулево тепло пропорционально I^2, а тепло Пельтье пропорционально I. Поэтому охлаждение одного из спаев за счет явления Пельтье может стать заметным на фоне общего разогрева лишь при сравнительно малых токах, когда $\Pi_{1,2}I > R_B I^2$, или

$$I < \frac{\Pi_{1,2}}{R_B}. \qquad (22.10)$$

Однако чем меньше ток I, тем меньше и абсолютная величина поглощаемого спаем тепла. Для увеличения эффекта следует подбирать пáры металлов с наибольшими значениями коэффициента Пельтье $\Pi_{1,2}$. Для металлов при обычных температурах $\Pi_{1,2} \approx \approx 5 \cdot 10^{-2}$ *дж/к*; для полупроводников же значение $\Pi_{1,2}$ может быть на несколько порядков выше.

Эффект Пельтье можно обратить. Если прохождение тока в замкнутой цепи вызывает нагревание одних и охлаждение других спаев, то, наоборот, ***нагревание одних и охлаждение других контактов приводит к появлению тока в цепи*** (эффект Зеебека, или термоэлектрический эффект) в отсутствие внешнего источника.

Пусть температура T_0 во всех точках однородного металлического стержня (рис. 2.37) одинакова; значит, повсюду одинаковы концентрации, средние энергии и скорости свободных электронов.

При этом через любое сечение 1—1 стержня за единицу времени проходит одинаковый поток электронов слева направо и справа налево.

Нагреем один конец стержня и будем его поддерживать при постоянной температуре $T > T_0$. Противоположный же конец будем непрерывно охлаждать так, чтобы его температура T_0 оставалась неизменной. Тогда в стержне установится градиент температуры, и через него будет идти постоянный поток тепла. Перенос тепла в металлах осуществляется в основном движением свободных электронов. При этом электроны, проходящие через сечение 1—1 из области с более высокой температурой, переносят с собой больше

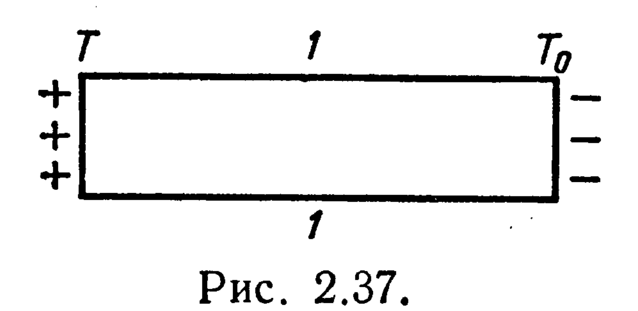


Рис. 2.37.

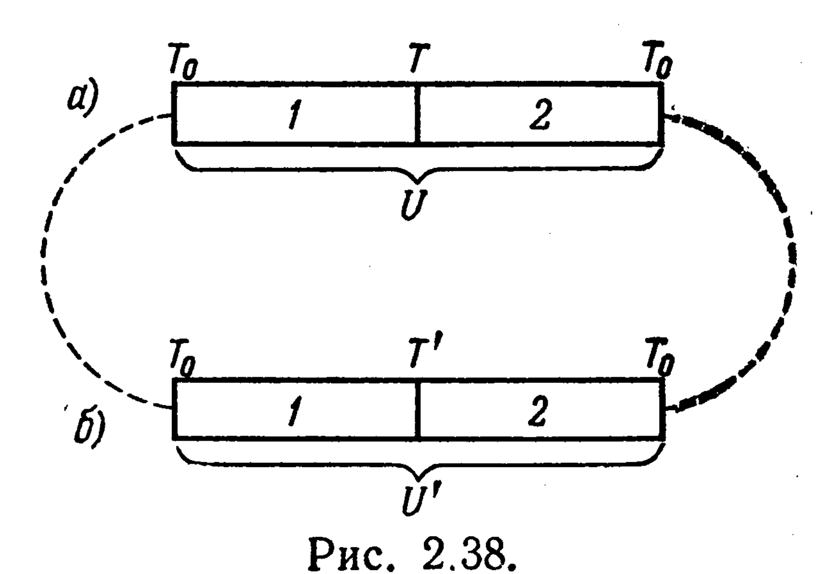


Рис. 2.38.

энергии, чем электроны, проходящие через то же сечение в противоположном направлении. Вследствие различия скоростей электронов, находящихся в областях с различными температурами, окажется различным и число электронов, проходящих через сечение 1—1 в противоположных направлениях, и на концах стержня начнут скапливаться заряды противоположного знака. Внутри стержня возникает электрическое поле, препятствующее дальнейшему разделению зарядов и выравнивающее потоки электронов в противоположных направлениях. Таким образом, в равновесном состоянии наличие градиента температуры вдоль стержня создает постоянную разность потенциалов на его концах, величина которой пропорциональна градиенту температуры.

Если спаять в одном месте два разнородных металла *1* и *2* и нагреть спай до некоторой температуры T, превышающей температуру обоих концов T_0 (рис. 2.38, *а*), то из-за различного падения потенциала вдоль обоих металлов и их электронных концентраций потенциалы свободных концов будут различны, и между металлами возникнет постоянная разность потенциалов U. Если нагреть такой спай до другой температуры T' (рис. 2.38, *б*), то между свободными концами установится другое значение разности потенциалов U'. Соединяя свободные концы одинаковых металлов (как показано на рис. 2.38 пунктиром), мы видим, что в замкнутой цепи из двух разнородных металлов возникает электродвижущая сила

$$\mathscr{E}_{1,2} = U - U', \tag{22.11}$$

если между спаями поддерживается постоянный перепад температур

$\Delta T = T - T'$. Эта величина называется термоэлектродвижущей силой (термоэдс) и создает в замкнутой цепи (рис. 2.39) постоянный электрический ток. Производная

$$e_{1,2} = \frac{d\mathcal{E}_{1,2}}{dT} \qquad (22.12)$$

характеризует возрастание термоэдс для данной пары металлов при нагревании одного из спаев на 1° и обычно весьма мала. Для пар железо—медь, железо—константан, широко применяемых в технике при измерениях температур, $e_{1,2}$ имеет порядок 50 *мкв/град*. Для высокотемпературной пары платина—платинородиевый сплав этот коэффициент примерно в 10 раз меньше.

Термодинамический расчет приводит к весьма простому соотношению между коэффициентами Пельтье и термоэдс:

$$\Pi_{1,2} = Te_{1,2} = T\frac{d\mathcal{E}_{1,2}}{dT}. \qquad (22.13)$$

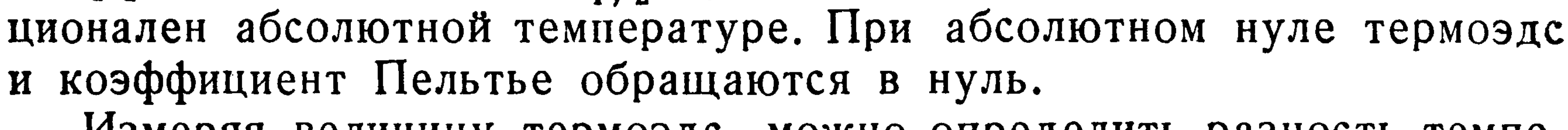


Рис. 2.39.

Из (22.13) следует, что на данном участке коэффициент Пельтье $\Pi_{1,2}$ прямо пропорционален абсолютной температуре. При абсолютном нуле термоэдс и коэффициент Пельтье обращаются в нуль.

Измеряя величину термоэдс, можно определить разность температур между спаями, помещенными в различные резервуары. Для таких практических применений подбирают термопары, у которых коэффициент $e_{1,2}$ в широком интервале температур остается практически постоянным. В этом случае э. д. с. прямо пропорциональна разности температур горячего и холодного спаев:

$$e_{1,2} = \text{const} \text{ и } \mathcal{E}_{1,2} = e_{1,2}(T - T_0). \qquad (22.14)$$

Необходимо подчеркнуть принципиальную разницу между контактной разностью потенциалов и термоэлектрическими явлениями. Контактные потенциалы имеют сравнительно большую величину (порядка нескольких вольт) и характеризуют электрическое поле вне проводников между наружными поверхностями последних. Контактная разность потенциалов есть статический эффект, не исчезающий и при абсолютном нуле температуры. В противоположность этому термоэлектрические явления представляют собой чисто кинетические эффекты, наблюдаемые при наличии потоков тепла или заряда (т. е. тока). Возникающие при этом разности потенциалов по абсолютной величине малы (доли милливольта). При абсолютном нуле количество электронов n', обусловливающих эти эффекты, равно нулю и все термоэлектрические явления исчезают.

Постоянство $e_{1,2}$ и линейная зависимость (22.14) соблюдаются далеко не всегда и не во всем интервале температур. Для ряда

систем с повышением температуры горячего спая термоэдс изменяется не монотонно, сначала возрастает, а затем убывает и даже переходит через нуль (точка инверсии). Кроме того, величина термоэдс (и коэффициента Пельтье) чувствительна к внешним механическим воздействиям, искажающим структуру металла и энергетические уровни электронов. Поэтому применяемые в технике и для научных исследований термопары всегда нуждаются в тщательной индивидуальной градуировке.

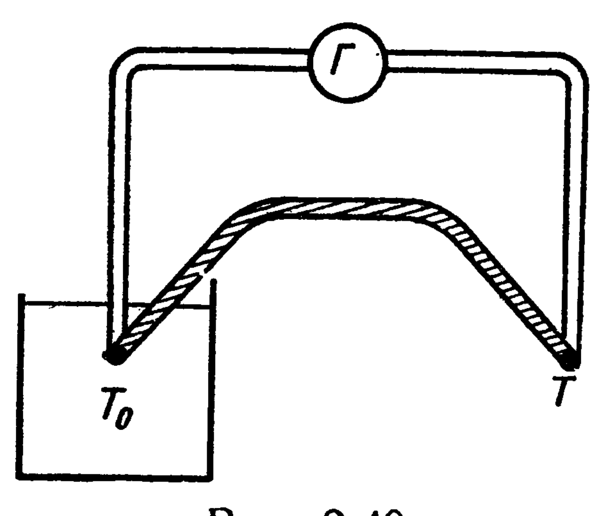


Рис. 2.40.

В электрических схемах и приборах всегда имеются спаи или контакты различных по своему составу и обработке проводников. При колебаниях температуры окружающей среды в этих местах контактов возникают неконтролируемые блуждающие термоэдс. Вследствие малости этих термоэдс они обычно не сказываются на работе приборов, но при очень точных и тонких измерениях необходимо учитывать и предотвращать возможность подобных влияний.

С другой стороны, термоэдс имеет широкое полезное практическое применение, как простой электрический метод измерения температур. При подобных измерениях с помощью термопар или термоэлементов один из спаев поддерживается при вполне определенной постоянной температуре T_0 (например, помещается в тающий лед) и измеряется идущий в замкнутой цепи термоток

$$I=\frac{\mathscr{E}_{1,2}}{R}=\frac{e_{1,2}}{R}(T-T_0) \qquad (22.15)$$

с помощью гальванометра, как это изображено на рис. 2.40. В более грубых технических термопарах один из спаев имеет просто температуру окружающей среды. Для повышения чувствительности термоэлементов их соединяют последовательно в термобатарею (рис. 2.41). При прецизионных измерениях предпочтительнее измерять не термоток (22.15), а непосредственно термоэдс, компенсируя ее известной электродвижущей силой.

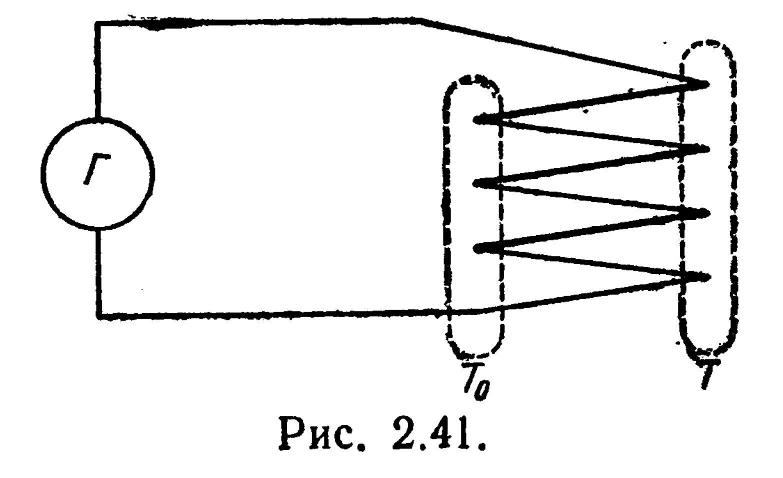


Рис. 2.41.

§ 23. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы

Вследствие хаотичности теплового движения отдельные электроны металла время от времени приобретают избыток кинетической энергии, превышающий работу их выхода eP, и вылетают из металла. Происходит своеобразное «испарение» электронов из ме-

талла в окружающую среду, тем более интенсивное, чем выше его температура.

Когда некоторая часть электронов выходит из металла, он заряжается положительно и втягивает электроны — происходит «конденсация» электронного пара обратно в металл. В результате этих двух противоположных процессов устанавливается определенная концентрация электронного пара над металлом, ничтожно малая при обычных температурах и резко возрастающая при повышении температуры. Испускание электронов нагретыми металлами носит название термоэлектронной эмиссии.

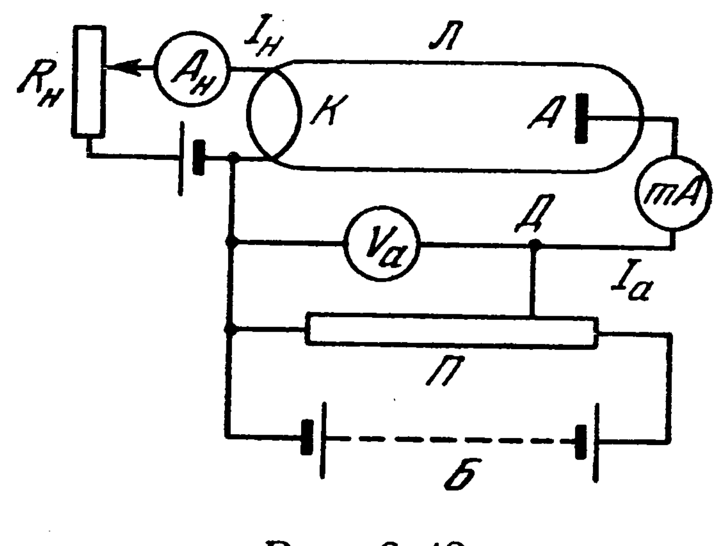


Рис. 2.42.

Для исследования явления термоэлектронной эмиссии составим схему, изображенную на рис. 2.42. В стеклянный баллон впаяны два электрода — катод K и анод A. Катод представляет собой металлическую спираль, нагреваемую протекающим в ней током $I_н$ от вспомогательной цепи накала. Реостат накала $R_н$ позволяет регулировать величину этого тока, измеряемого амперметром $A_н$, и нагревать катод до различных температур T.

Между катодом и анодом прикладывается значительная разность потенциалов $U_а$ (до 100—200 *в*). Это напряжение снимается с анодной батареи $Б$ через потенциометр и измеряется вольтметром $V_а$. Передвигая движок $Д$ потенциометра $П$, можно изменять величину $U_а$ от нуля до максимального значения, определяемого э. д. с. батареи.

Под действием приложенной разности потенциалов $U_а$ электроны, испущенные накаленным катодом, движутся к положительному электроду, аноду и замыкают цепь. Чтобы эти электроны не отклонялись в стороны при столкновениях с газовыми молекулами, баллон $Л$ откачивается до вакуума. Ток $I_а$ в анодной цепи измеряется последовательно включенным миллиамперметром mA.

На рис. 2.43 изображена примерная зависимость анодного тока $I_а$ от анодного напряжения $U_а$. Приложенное между электродами поле будет перетягивать часть электронов из электронного «облачка» вокруг накаленного катода на второй электрод и нарушит равновесие. Убыль электронов в «облачке» приведет к тому, что скорость «конденсации» электронов станет меньше скорости их испускания катодом, часть «испарившихся» из катода электронов уже не вернется обратно и отсосется электрическим полем к аноду. Чем выше

напряженность электрического поля между электродами, тем бо́льшая часть испущенных электронов увлекается полем и направляется к аноду и тем меньшая часть их захватывается катодом.

В слабых полях вследствие наличия значительного объемного заряда электрическое поле вблизи катода сильно искажается. Это приводит к тому, что зависимость анодного тока $I_а$ от приложенной разности потенциалов $U_а$ (**вольт-амперная характеристика**) имеет даже в слабых полях нелинейный характер. По расчетам Лэнгмюра и Богуславского $I_а$ на этом участке пропорционально $U_а^{3/2}$ (**«закон трех вторых»**).

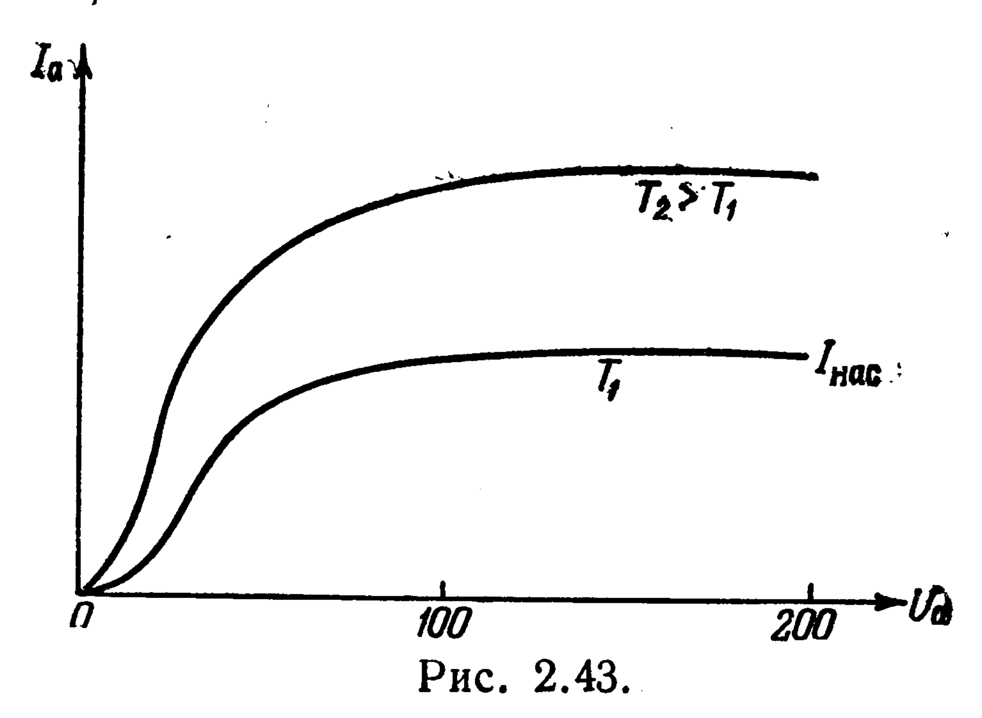


Рис. 2.43.

При больших разностях потенциалов практически все электроны, «испаряющиеся» с катода, уносятся на анод и ток $I_а$ перестает увеличиваться с ростом $U_а$. Это максимальное значение $I_а$ носит название **тока насыщения** $I_{нас}$.

Если повысить температуру катода от T_1 до $T_2>T_1$, то испускание электронов усилится и вся вольт-амперная характеристика пойдет выше (см. рис. 2.43).

Увеличится при этом и ток насыщения $I_{нас}$. Точный теоретический расчет с учетом волновых свойств электронов в металле приводит к следующей зависимости плотности тока насыщения от температуры:

$$\frac{I_{нас}}{S}=AT^2e^{-\frac{eP}{kT}}. \tag{23.1}$$

Здесь S — площадь катода, T — его абсолютная температура, $e=2{,}7182$ — основание натуральных логарифмов, а в показателе стоит отношение работы выхода электрона из металла eP *) к средней энергии теплового движения kT. Для чистых металлов теоретическое значение константы равно

$$A=120\ \frac{а}{см^2\cdot град^2}.$$

При $P=3$ в $=0{,}01$ СГС ед. потенциала и при комнатной температуре, $T=300°$ K,

$$\frac{eP}{kT}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}\approx 116,$$

$$e^{-116}=10^{-\frac{116}{2{,}3}}=10^{-50{,}4}=4\cdot 10^{-51}.$$

*) Здесь той же буквой e обозначен заряд электрона.

Следовательно, ток насыщения

$$\frac{I_{\text{нас}}}{S} = 120 \cdot 300^2 \cdot 4 \cdot 10^{-51} \approx 4 \cdot 10^{-44} \frac{a}{см^2},$$

т. е. неизмеримо мал.

Однако с повышением температуры ток насыщения очень круто возрастает. Согласно (23.1) при увеличении температуры на 5° множитель T^2 возрастает примерно на 2%, а множитель $e^{-\frac{eP}{kT}}$ — почти в 3 раза. Зависимость (23.1), изображенная на рис. 2.44, определяется главным образом экспоненциальным (показательным) множителем, и при температурах порядка 2000° термоэлектронный ток в вакууме достигает вполне измеримых значений.

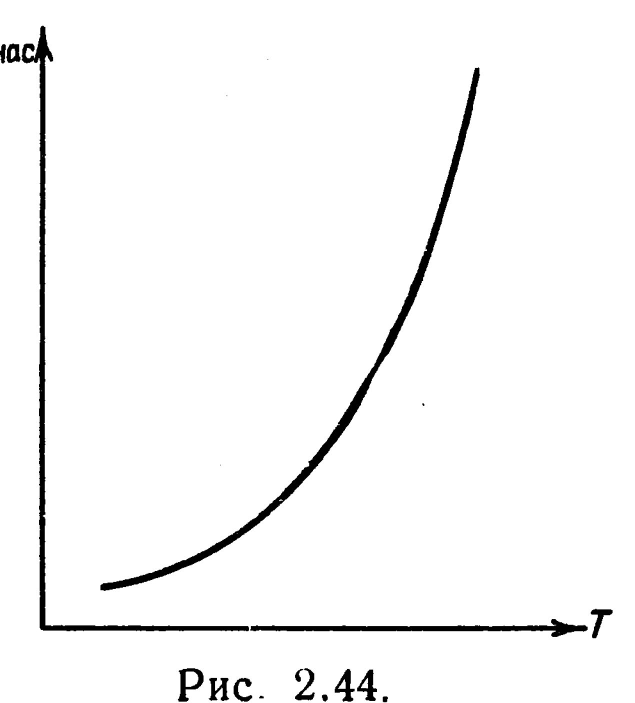


Рис. 2.44.

Для снижения температур накала, при которых термоэлектронный ток достигает заметной величины, необходимо уменьшать величину работы выхода eP в показателе выражения (23.1) или контактный потенциал P. Поскольку последний существенно зависит от состояния поверхности металла (см. § 22), такого снижения можно добиться с помощью добавления незначительных примесей в поверхностный слой металла. Так, покрытие вольфрамовых нитей одномолекулярным слоем тория резко снижает работу выхода и дает возможность получать заметную термоэлектронную эмиссию уже при температурах порядка 1000° С. Широкое применение имеют так называемые оксидные катоды, поверхность которых состоит из окисей металлов (бария и др.), частично разлагающихся при накале.

Откачанный баллон *Л* с впаянными внутри него двумя электродами *К* и *А*, изображенный на рис. 2.42, является простейшим электровакуумным прибором — двухэлектродной электронной лампой, или диодом.

Если в описанном выше опыте изменить направление электрического поля и присоединить накаливаемый электрод *К* не к минусу, а к плюсу батареи, то поле будет прижимать электронное облачко к электроду, электроны будут возвращаться обратно на нить и через безвоздушный промежуток ток идти не будет. На этом принципе основано применение диодов для выпрямления переменного тока. Будучи включенным в электрический контур, диод играет в нем роль клапана, пропускающего ток лишь в одном направлении. Как показано на рис. 2.45, в течение того полупериода, когда на

катоде минус, а на аноде — плюс, электрический ток проходит через лампу. В течение же второго полупериода изменения внешнего напряжения, когда на катоде плюс, а на аноде минус, лампа «заперта», цепь разорвана, и ток в обратном направлении не идет (однополупериодное выпрямление).

Для использования обоих полупериодов переменного напряжения можно применить электронную лампу с двумя впаянными в нее анодами (двойной диод), включив ее по схеме, изображенной на рис. 2.46. Внешний источник переменного тока создает во вторичной обмотке трансформатора T переменную разность потенциалов. Средняя точка трансформатора выводится наружу и является

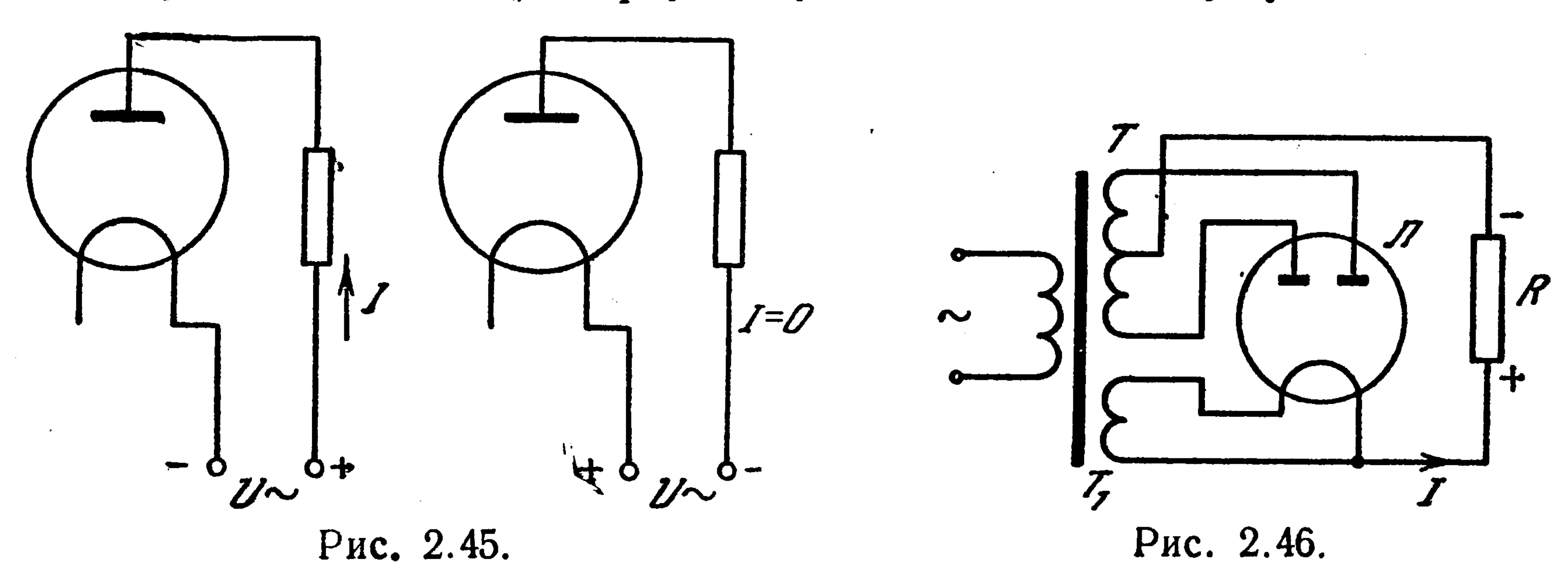


Рис. 2.45. Рис. 2.46.

минусом для цепи выпрямленного тока. Крайние точки трансформатора подаются на аноды лампы *Л*. Для накала катода служит дополнительный трансформатор T_1. Испускаемые из катода электроны идут к тому из анодов, который в этот момент имеет положительный потенциал, и замыкают цепь соответствующей половины трансформатора T. Так как согласно § 14 направление тока I противоположно направлению движения отрицательных электронов, то вывод, сделанный от катода, всегда является плюсом по отношению к средней точке трансформатора T и через включенное между ними внешнее сопротивление R течет ток постоянного направления от катода к аноду (двухполупериодное выпрямление).

Этот выпрямленный ток не является постоянным в полном смысле этого слова. Он постоянен лишь по направлению, а не по величине. На рис. 2.47, *а* показан график зависимости тока от времени во внешней цепи без электронной лампы. Переменный ток i обычно меняется по синусоидальному закону:

$$i = i_0 \sin \omega t. \qquad (23.2)$$

Выпрямляющий диод срезает отрицательную половину периода и дает импульсы тока (рис. 2.47, *б*). Двойной же диод по схеме рис. 2.46 изменяет направление тока в отрицательном полупериоде на обратное и создает выпрямленный пульсирующий ток (рис. 2.47, *в*).

Мощные выпрямительные лампы для выпрямления значительных токов носят название **кенотронов**. Кенотроны имеют большие габариты и высокую эмиссию электронов. Для уменьшения влияния объемного заряда возле катода приходится между анодом и катодом прикладывать большие разности потенциалов (порядка киловольт).

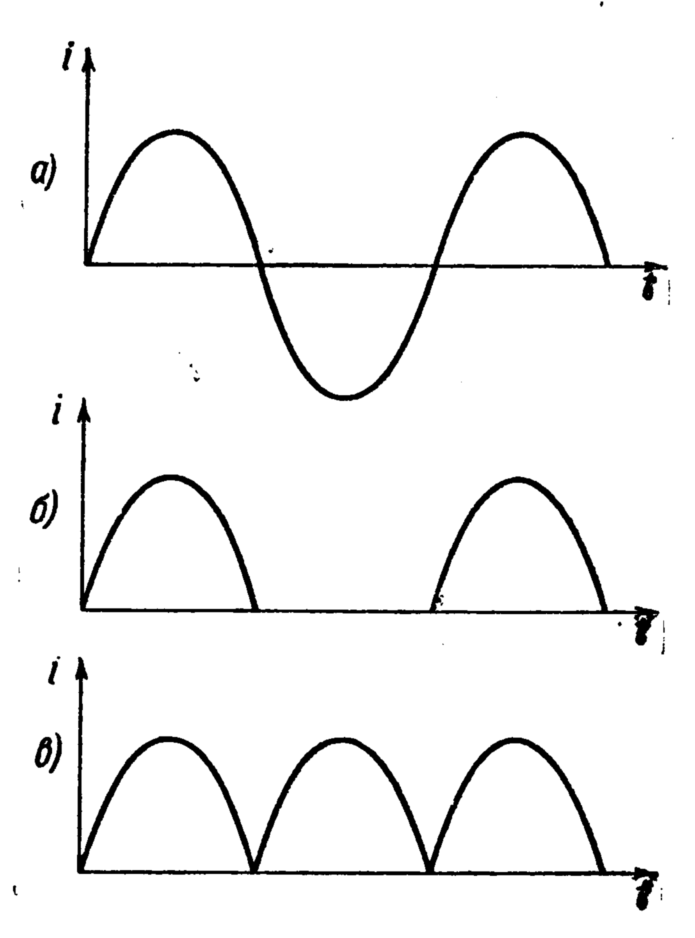


Рис. 2.47.

Другим способом ослабления действия объемного заряда электронов, вылетающих из катода, является заполнение баллона небольшими количествами газа, например ртутными пара́ми. Возникающие при столкновениях с быстрыми электронами положительные ионы газа движутся к катоду и нейтрализуют объемный заряд отрицательных электронов. Такие лампы, называемые **газотронами**, могут работать как выпрямители при значительно более низких напряжениях, чем кенотроны.

При накале нити катода проходящим через нее током вдоль нити получается заметное падение потенциала, искажающее электрическое поле между катодом и анодом внутри лампы. Поэтому целесообразно накаливать катод не непосредственно, а с помощью специального подогревающего элемента, электрически с ним не контактирующего.

Включение в лампу третьего промежуточного управляющего электрода—«сетки»—делает возможным ее применение для усиления переменных напряжений. На рис. 2.48 приведена схема трехэлектродной лампы—**триода**, работающей как усилитель. Разность потенциалов U_a создает внутри лампы электрическое поле. При плоских электродах поле можно считать однородным, а его напряженность—равной

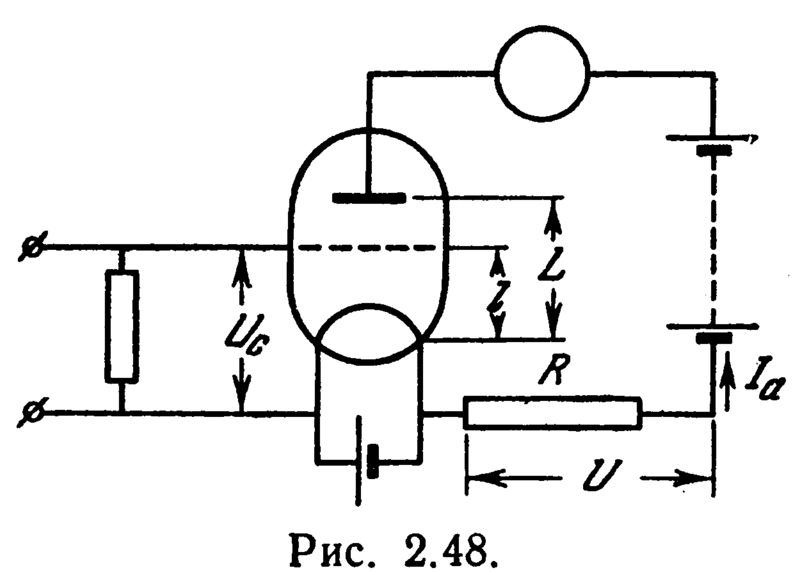


Рис. 2.48.

$$E=\frac{U_a}{L}, \tag{23.3}$$

где L—расстояние между катодом и анодом. Если поместить сетку вблизи катода на расстоянии $l \ll L$, то повышение потенциала в месте расположения сетки:

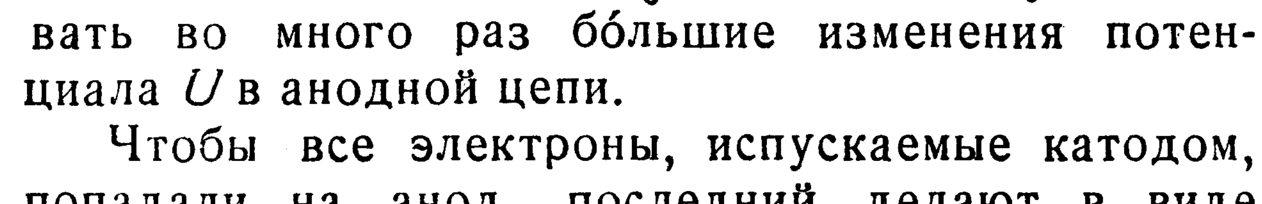
$$U_1=El=U_a\frac{l}{L}\ll U_a, \tag{23.4}$$

будет еще незначительным. Прикладывая тогда между катодом и сеткой сравнительно небольшую отрицательную разность потенциалов U_c, можно вернуть часть летящих электронов обратно к катоду и сильно уменьшить анодный ток, а при $|U_c| > U_1$ — даже полностью запереть лампу. Наоборот, при положительном U_c можно сильно увеличить анодный ток.

Если в анодную цепь включено большое сопротивление R, то падение напряжения на этом сопротивлении:

$$U = I_a R, \tag{23.5}$$

изменяется прямо пропорционально анодному току I_a. Таким образом, небольшие изменения потенциала U_c на сетке могут создавать во много раз бóльшие изменения потенциала U в анодной цепи.



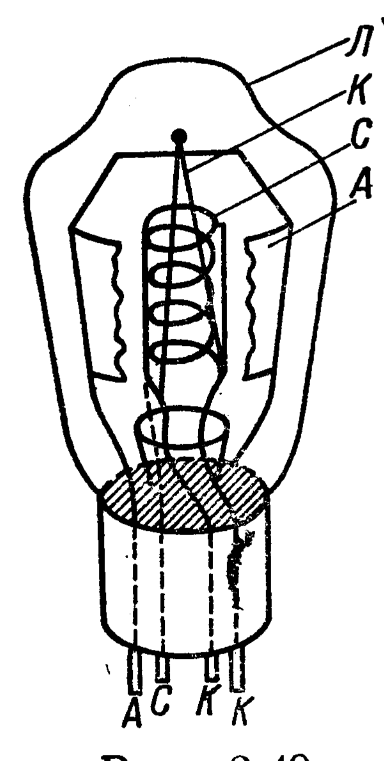


Рис. 2.49.

Чтобы все электроны, испускаемые катодом, попадали на анод, последний делают в виде цилиндра, охватывающего накаленную нить K со всех сторон. На рис. 2.49 приведен схематический разрез через трехэлектродную лампу. Нить, натянутая вдоль оси, является катодом K. Вокруг этой нити с небольшим зазором намотана спираль, служащая сеткой C. Электроны, испускаемые накаливаемой нитью, проходят в зазоры между витками спирали и попадают на цилиндр, служащий анодом. Вся эта система помещается в откачанный баллон $Л$.

Линии поля в такой лампе направлены по радиусам, и поле неоднородно. Однако все качественные закономерности, рассмотренные в настоящем параграфе, включая закон трех вторых, остаются справедливыми и при таком расположении электродов.

В настоящее время электронные лампы от миниатюрных до огромных, на самые различные мощности, широко используются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике. В зависимости от назначения лампы в нее может быть впаян ряд дополнительных управляющих электродов.

Выход электронов из металла может происходить не только при его нагревании, но и за счет других воздействий. Так, при освещении поверхности металла электроны могут вырываться за счет энергии падающего света. Основные закономерности такой фотоэлектронной эмиссии будут разобраны в томе III при рассмотрении фотоэлектрического эффекта.

При ударе о поверхность металла электрона, предварительно разогнанного электрическим полем до очень большой скорости, возможна вторичная электронная эмиссия. При этом за

счет энергии ударяющего электрона может быть вырван не один, а несколько электронов. Это явление используется в различных типах электронных умножителей. Принципиальная схема электронного умножителя изображена на рис. 2.50. Электрон, вырванный из первого электрода (например, под действием света),

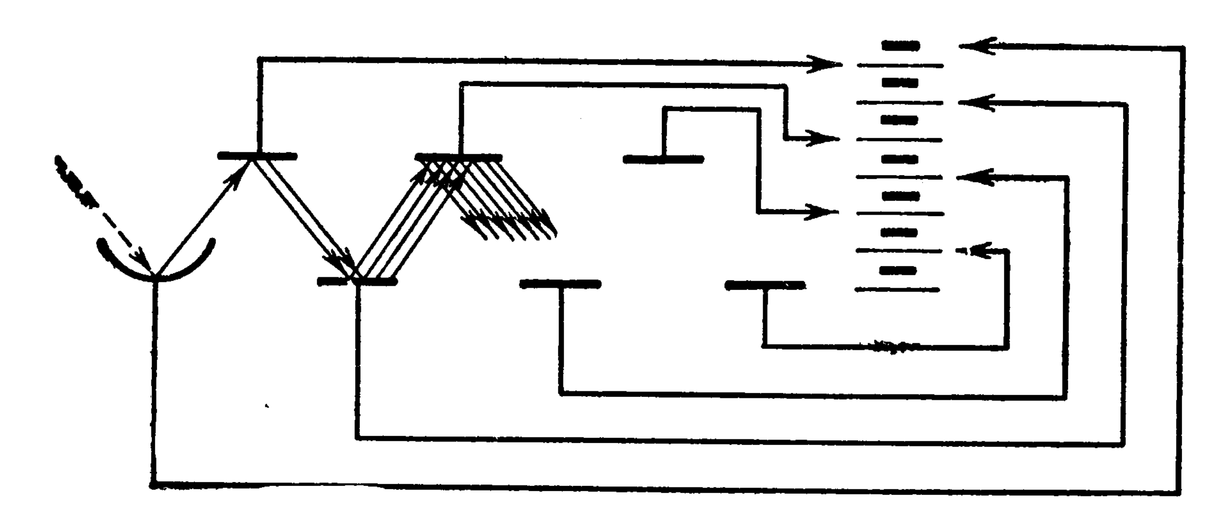


Рис. 2.50.

попадает на второй электрод (динод), пройдя ускоряющую разность потенциалов $\mathscr{E}$. При этом из второго электрода выбиваются δ электронов. Эти электроны падают на третий электрод, пройдя такую же разность потенциалов $\mathscr{E}$, и выбивают из него δ^2 электронов и т. д. При $n+1$ электродах число электронов, вылетающих из последнего электрода, в δ^n раз больше числа электронов, вырванных из первого электрода. При $\delta=1{,}35$ (чистый металл) и $n=20$ полный коэффициент умножения δ^n имеет порядок 400. Для кислородноцезиевых катодов величина δ достигает значений 5—10 и коэффициент умножения δ^n может быть очень большим. Суммарная разность потенциалов $n\mathscr{E}$, приложенная ко всему умножителю, обычно порядка 1000 *в*.

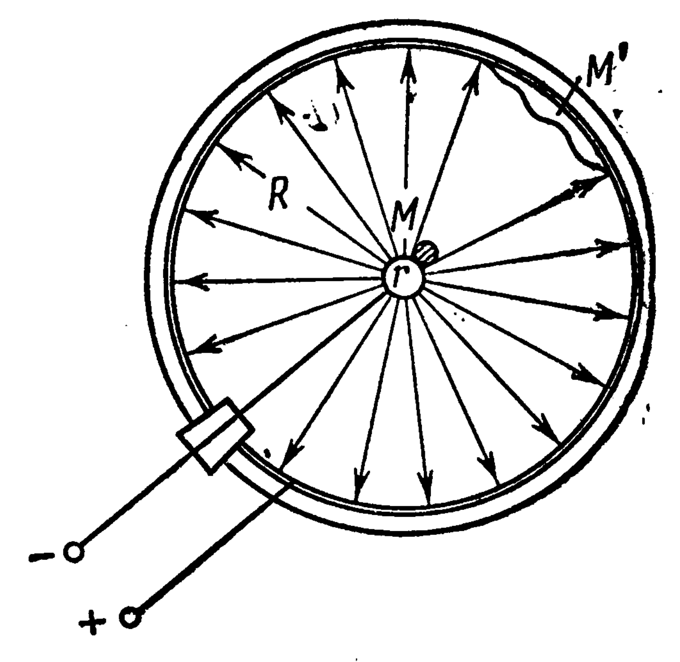


Рис. 2.51.

Если приложить между двумя металлическими пластинами очень большую разность потенциалов, то электрическое поле может вырывать свободные электроны из отрицательно заряженной пластины и затем переносить их к положительной. Подобная холодная (автоэлектронная) эмиссия электронов наблюдается лишь в очень высоких полях, напряженностью порядка 10^6 *в/см*. Для получения столь высоких напряженностей поля катод делают в виде маленького металлического шарика радиуса r (точнее, закругленного острия проволочки с $r\approx10^{-7}$ *м*), а анодом служит внутренняя поверхность большой колбы, в центре которой располагается шарик (рис. 2.51). Как было найдено в § 7,

напряженность поля у поверхности заряженного шарика

$$E = -\frac{k_0}{\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{23.6}$$

и может быть сделана очень большой при достаточно малых r. Это явление используется в электронном микропроекторе. Вырванные электроны ударяются с большой скоростью об анод и при соответствующем подборе материала последнего вызывают его свечение. Если на поверхности катода находится адсорбированная молекула M, то в этом месте автоэлектронная эмиссия затруднена и на аноде наблюдается тень M' от этой молекулы, увеличенная в очень большое число (R/r) раз (R—радиус анода).

ГЛАВА VI

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ, ДИЭЛЕКТРИКАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 24. Закон Ома для электролитов

Электролитами называются вещества, молекулы которых состоят из ионов противоположных знаков, удерживаемых друг около друга кулоновскими силами притяжения. К электролитам относятся кислоты, щелочи и соли. При растворении электролитов в воде значительная часть молекул в растворе распадается на ионы. Вода имеет высокую диэлектрическую проницаемость ($\varepsilon=81$), в силу чего электрическое взаимодействие между ионами сильно уменьшается. Сравнительно небольшая кинетическая энергия молекул, обусловленная их тепловым движением, достаточна при этом, чтобы вызвать их диссоциацию. Это явление называется электролитической диссоциацией.

Таким образом, при растворении электролитов в воде или в другой полярной жидкости в ней возникает значительное количество свободных ионов обоего знака, тем большее, чем выше концентрация растворенного электролита. Обозначим число свободных положительных ионов в единице объема раствора электролита через n_+ и отрицательных ионов — через n_-. Заряды ионов кратны элементарному заряду $e=4{,}8\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда и зависят от валентностей ионов. Обозначим эти валентности соответственно через z_+ и z_-. Так как раствор в целом нейтрален, то суммарные заряды положительных и отрицательных ионов в единице объема по абсолютной величине равны друг другу:

$$n_+z_+e=n_-z_-e. \tag{24.1}$$

Для упрощения дальнейшей записи введем сокращение

$$n_+z_+=n_-z_-=nz. \tag{24.2}$$

При растворении в воде, например, серной кислоты H_2SO_4 последняя диссоциирует на положительно заряженные ионы водорода

и кислотный остаток, несущий двойной отрицательный заряд: $H_2SO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^{--}$. Следовательно, в этом случае $z_+ = 1$ и $z_- = 2$, а число ионов водорода в растворе n_+ соответственно в два раза больше, чем число отрицательных ионов n_-.

Высокая диэлектрическая проницаемость воды обусловлена тем, что молекулы H_2O представляют собой жесткие диполи, обладающие значительным электрическим дипольным моментом. Ближайшие к иону электролита дипольные молекулы воды поворачиваются к нему противоположно заряженными полюсами и притягиваются, образуя вокруг иона своеобразное «облако», перемещающееся вместе с ним. Это облако не вполне стабильно; в результате теплового движения отдельные молекулы отрываются от иона, а на их место приходят другие. При движении иона в растворе под радиусом иона следует понимать радиус r его гидратной оболочки (рис. 2.52).

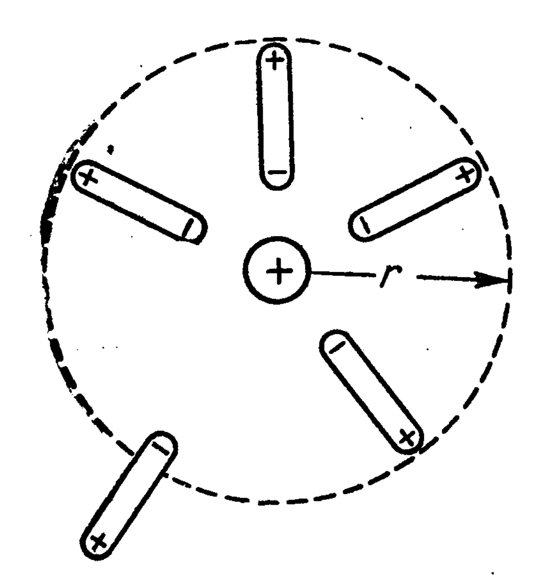


Рис. 2.52.

Эта оболочка препятствует обратному соединению (рекомбинации) ионов в нейтральные молекулы. Само притяжение к окружающим диполям и является тем фактором, который ослабляет внутримолекулярные связи и обусловливает диссоциацию молекул на составляющие их ионы.

Если в растворе электролита создать электрическое поле напряженностью **E**, то положительные ионы начнут двигаться по полю, а отрицательные — против поля и возникнет электрический ток. Рассмотрим для примера положительный ион с зарядом z_+e. На этот ион в электрическом поле будет действовать сила

$$\mathbf{F}_{эл} = z_+ e\mathbf{E}. \tag{24.3}$$

Под ее действием ион начнет ускоренно двигаться вдоль поля, и скорость его направленного движения $\mathbf{v}_+$ будет возрастать. Вследствие большого радиуса гидратной оболочки движущийся в растворе ион испытывает значительную силу трения $\mathbf{F}_{тр}$. Рассматривая ион вместе с оболочкой как твердый шарик радиуса r_+, движущийся в вязкой жидкости с коэффициентом внутреннего трения (вязкостью) η, можно определить силу трения по закону Стокса:

$$\mathbf{F}_{тр} = -6\pi\eta r_+ \mathbf{v}_+. \tag{24.4}$$

По мере увеличения скорости иона возрастает сила трения и уменьшается его ускорение. Практически через очень короткий промежуток времени сила трения станет равной по величине силе электрического поля, и ион далее будет двигаться равномерно с некоторой постоянной скоростью $\mathbf{v}_+$. При равномерном движении

геометрическая сумма сил, действующих на ион, равна нулю:

$$\mathbf{F}_{эл}+\mathbf{F}_{тр}=0,$$

или

$$z_{+}e\mathbf{E}-6\pi\eta r_{+}\mathbf{v}_{+}=0.$$

Отсюда можно найти искомую скорость иона:

$$\mathbf{v}_{+}=\frac{z_{+}e}{6\pi\eta r_{+}}\mathbf{E}=k_{+}\mathbf{E}. \tag{24.5}$$

Коэффициент пропорциональности

$$k_{+}=\frac{z_{+}e}{6\pi\eta r_{+}} \tag{24.6}$$

называется **подвижностью** положительного иона. Он зависит от заряда и размера иона и от вязкости раствора. Из (24.5) следует, что $k_{+}=v_{+}$ при $E=1$. Иными словами, подвижность иона численно равна скорости его равномерного движения при напряженности электрического поля, равной единице.

Аналогичным образом мы получим для отрицательных ионов

$$\mathbf{v}_{-}=-\frac{z_{-}e}{6\pi r_{-}\eta}\mathbf{E}=-k_{-}\mathbf{E}, \tag{24.7}$$

где

$$k_{-}=\frac{z_{-}e}{6\pi r_{-}\eta} \tag{24.8}$$

— подвижность отрицательного иона. При комнатной температуре подвижности ионов в воде имеют порядок

$$k=10^{-3}\div10^{-4}\,\frac{см/сек}{в/см}=10^{-7}\div10^{-8}\,\frac{м/сек}{в/м}.$$

С повышением температуры вязкость раствора резко падает и подвижности ионов соответственно возрастают.

В § 20 предыдущей главы нами было выведено выражение для плотности электрического тока при направленном движении однозарядных частичек одного знака:

$$\mathbf{j}=ne\mathbf{v}. \tag{24.9}$$

Эту формулу легко обобщить на растворы электролитов, содержащие ионы обоих знаков:

$$\mathbf{j}=n_{+}z_{+}e\mathbf{v}_{+}+n_{-}(-z_{-}e)\,\mathbf{v}_{-}. \tag{24.9a}$$

Подставляя в (24.9а) вместо $\mathbf{v}_{+}$ и $\mathbf{v}_{-}$ их выражения (24.5) и (24.7) и учитывая (24.2), получим

$$\mathbf{j}=nze\,(k_{+}+k_{-})\,\mathbf{E}, \tag{24.10}$$

т. е. закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент пропорциональности в этой формуле

$$\gamma = nze(k_+ + k_-) \qquad (24.11)$$

есть электропроводность раствора электролита, которая зависит от концентрации свободных ионов и от их подвижностей. В противоположность металлам электропроводность растворов электролитов возрастает с температурой благодаря увеличению подвижностей ионов.

Около металлических электродов, опущенных в раствор электролита, картина процесса усложняется и возникает целый ряд побочных явлений. Если внутри электролита ток переносится зарядами обоего знака, то вблизи, например, отрицательного электрода — катода — отрицательно заряженные ионы уходят от него, их концентрация n_- падает практически до нуля и ток переносится только положительными ионами — **катионами**. В противоположность этому к положительному электроду — аноду — подходят только отрицательные ионы — **анионы** (рис. 2.53). Поэтому вблизи электродов перестает соблюдаться равенство (24.2) и электрическое поле искажается.

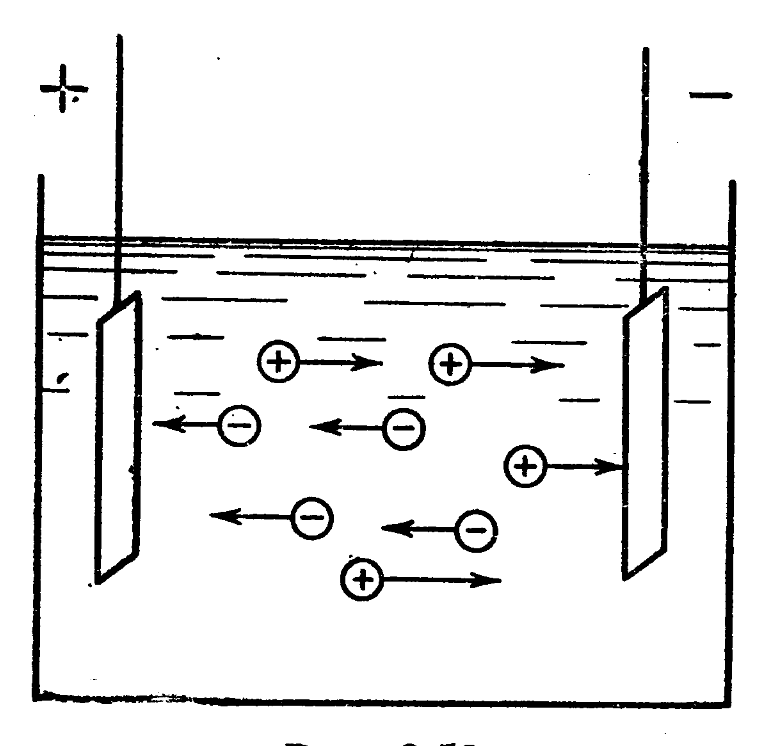


Рис. 2.53.

Подходя к электродам, ионы разряжаются и превращаются в нейтральные атомы или радикалы. При этом анионы отдают свои избыточные электроны металлическому аноду. Двигаясь по внешней цепи, эти свободные электроны доходят до катода и переходят оттуда на подошедшие катионы, разряжая последние, как это схематически показано на рис. 2.53.

Нейтрализовавшиеся атомы оседают на электродах. Если они химически активны, то у электродов протекают вторичные реакции, приводящие в конечном счете к разложению воды. Так, например, при разрядке иона Na^+ на катоде выделяется атом Na, бурно реагирующий с водой:

$$Na + H_2O \longrightarrow NaOH + H.$$

В результате натрий обычно уходит в раствор, где он опять ионизуется, а на катоде выделяется газообразный водород. Выделение на электродах первичных или вторичных продуктов разложения раствора при прохождении через него электрического тока называется **электролизом**.

Электролиз слегка подкисленной воды с разложением ее на водород и кислород впервые наблюдал в 1802 г. В. В. Петров. В настоящее время электролиз воды применяется для получения чистого водорода и для обогащения воды так называемой тяжелой водой D_2O. В обычной воде рек, морей и океанов всегда присутствует в небольшом количестве тяжелая вода. В процессе электролиза на катоде выделяется главным образом легкий водород, а остаток обогащается дейтерием.

Количественные законы выделения вещества при электролизе были экспериментально установлены в 1836 г. М. Фарадеем. В отличие от металлов перенос электрического заряда в растворах электролитов связан с переносом вещества самого электролита и выделением этого вещества на электродах. Если за некоторое время t у электрода разрядятся N ионов валентности z, то они перенесут с собой к электроду суммарный заряд

$$q = Nez. \tag{24.12}$$

Разряжаясь у электрода, эти ионы оставляют на нем массу

$$M = Nm, \tag{24.13}$$

где m — масса одного осаждающегося атома.

Разделим второе из этих равенств на первое. Тогда полученное отношение

$$\frac{M}{q} = \frac{m}{ez} = K \tag{24.13a}$$

есть постоянная величина, не зависящая от количества прошедших через раствор ионов; она называется электрохимическим эквивалентом данного вещества.

Отсюда мы получаем первый закон Фарадея:

$$M = Kq = KIt \tag{24.14}$$

— *количество M выделившегося на электроде вещества прямо пропорционально протекшему через раствор количеству электричества q.* Электрохимический эквивалент K численно равен массе вещества M, выделившейся на электроде при прохождении через электролит единицы количества электричества ($q = 1$). Для серебра электрохимический эквивалент равен

$$K_{Ag} = 1{,}18 \cdot 10^{-6}\ \textit{кг/к}.$$

Преобразуем выражение (24.13a) для K, умножив его числитель и знаменатель на число Авогадро N_0. Тогда получим

$$K = \frac{m}{ez} = \frac{mN_0}{N_0 ez} = \frac{1}{N_0 e}\frac{A}{z}.$$

Здесь $A = mN_0$ — атомный вес вещества, A/z — так называемый

химический эквивалент этого вещества, а

$$N_0 e = F \qquad (24.15)$$

— так называемая константа Фарадея. Отсюда получается второй закон Фарадея:

$$K = \frac{1}{F}\frac{A}{z}, \qquad (24.16)$$

— *электрохимический эквивалент данного вещества K прямо пропорционален его химическому эквиваленту A/z.* Объединяя оба закона, получим

$$M = \frac{1}{F}\frac{A}{z}q. \qquad (24.17)$$

Отсюда можно установить физический смысл постоянной Фарадея:

$$F = q \quad \text{при} \quad M = \frac{A}{z},$$

т. е. постоянная Фарадея численно равна количеству электричества, которое должно пройти через раствор для выделения на электроде одного килограмм-эквивалента (*кг-экв*) данного вещества. Измерения дают

$$F = 9{,}6487 \cdot 10^7 \ \textit{к/кг-экв}.$$

Из (24.15) видно, что, измерив F и найдя заряд электрона e, можно определить третью универсальную постоянную — число Авогадро N_0.

Первым практическим применением электролиза был изобретенный в 1838 г. Б. С. Якоби метод гальванопластики. Пропуская длительное время ток через раствор медной соли, Якоби получил на катоде медную пластинку однородной толщины, повторявшую форму катода. В настоящее время электролитические методы широко применяются для получения и очистки цветных металлов, для создания антикоррозийных покрытий и в ряде других областей техники.

Таким образом, при прохождении электрического тока в электролитах его энергия расходуется на различные химические реакции. Обратные процессы получения электрического тока за счет энергии химических превращений, протекающие в гальванических элементах и аккумуляторах, подробно разбираются в курсе общей химии.

§ 25. Проводимость газов. Несамостоятельный разряд

Молекулы газов нейтральны, и газы поэтому являются хорошими электрическими изоляторами. Если разорвать цепь источника тока и создать в ней воздушный промежуток, как показано на рис. 2.54, *а*, то гальванометр, включенный в цепь, покажет отсутствие электрического тока.

Поднесем к воздушному промежутку пламя газовой горелки, как показано на рис. 2.54, *б*. В пламени протекают интенсивные химические реакции, за счет энергии которых отдельные атомы могут возбуждаться и ионизоваться. Образующиеся в пламени горелки ионы переходят в воздушный промежуток и под действием приложенной к нему разности потенциалов начинают двигаться к электродам; в цепи появляется ток.

Ионизация газа может происходить под действием других источников энергии, например при облучении рентгеновыми лучами (рис. 2.54, *в*). В качестве ионизатора газа можно применять и ультрафиолетовые лучи и γ-лучи.

Обычно атмосферный воздух всегда ионизован под действием излучений радиоактивных элементов земной коры и приходящих из мировых глубин так называемых космических лучей. Однако равновесная концентрация ионов в воздухе не превышает нескольких десятков пар ионов в кубическом сантиметре, и, чтобы воздух стал заметно проводить электрический ток, его надо подвергнуть воздействию интенсивных ионизаторов.

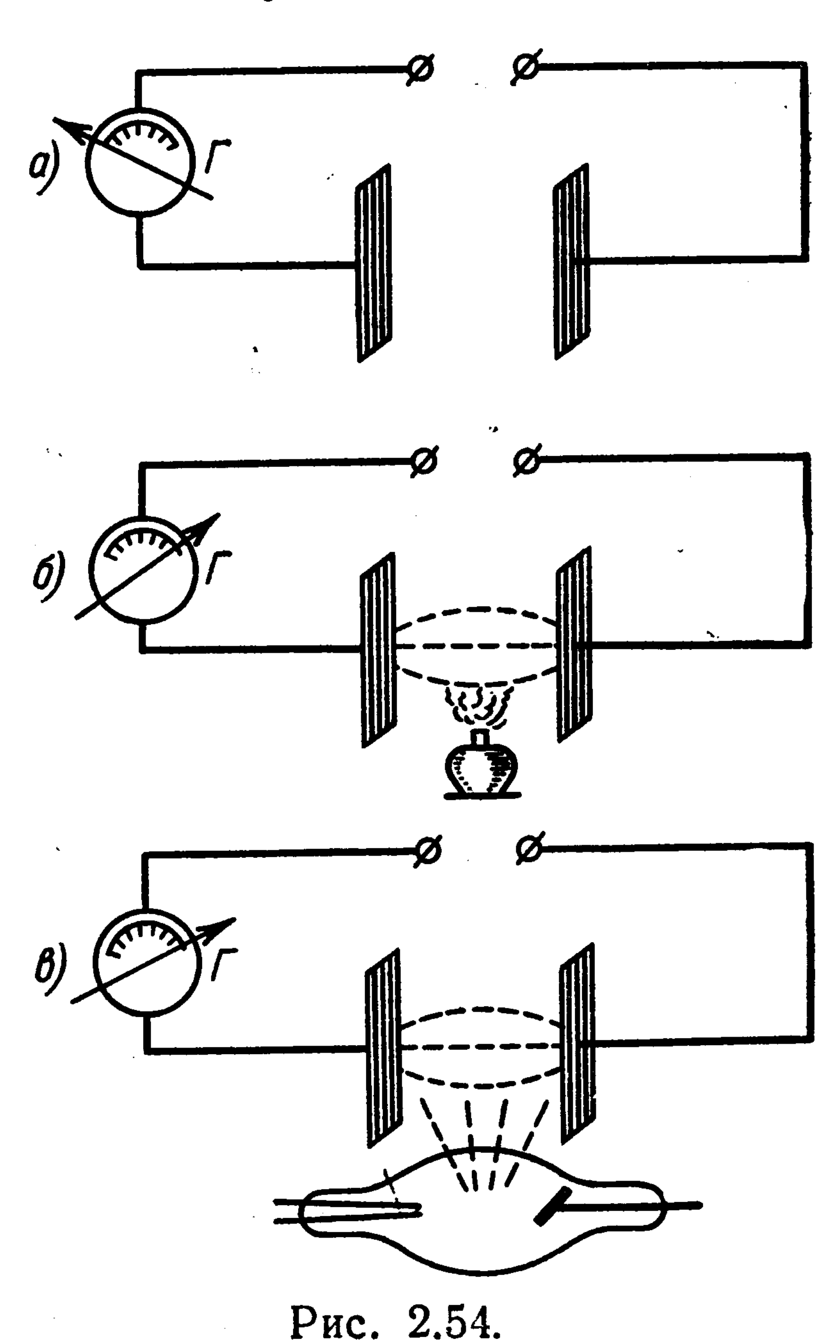


Рис. 2.54.

При ионизации газовых молекул под действием внешнего источника из молекулы обычно вырывается один электрон и остается положительный молекулярный ион с зарядом $+e$. Вырвавшийся электрон обычно присоединяется к какой-либо другой молекуле и образует отрицательный молекулярный ион с зарядом $-e$. Оба типа ионов одновалентны ($z=1$), имеют одинаковую концентрацию n, но несколько различные подвижности k_+ и k_-. Под действием внешнего электрического поля эти ионы начинают двигаться, и возникает электрический ток.

Так же как и в случае электролитов, плотность тока j связана с напряженностью электрического поля E соотношением [см. (24.10)]

$$j=ne\,(k_+ + k_-)\,E. \qquad (25.1)$$

Подвижность газовых ионов много больше подвижности ионов в электролитах, определяемой зависимостями (24.6) и (24.6). Однако

концентрация газовых ионов во много раз меньше соответственных концентраций для электролитов. Даже при наличии сильного ионизующего агента проводимость газов невелика по сравнению с проводимостью электролитов.

Следует подчеркнуть еще одно важное обстоятельство, отличающее прохождение электрического тока в газах от явлений, происходящих в электролитах. Концентрации свободных ионов n_+ и n_- в электролитах зависят от концентрации растворенного вещества и взаимодействия с молекулами растворителя, определяющего степень диссоциации. Вследствие относительно большой концентрации ионов, их малой скорости и длины свободного пробега электрический ток может существенно изменить концентрации ионов не во всем объеме, но лишь в непосредственной близости к электродам.

В отличие от этого, концентрации ионов в газе малы, и наличие тока, уносящего ионы к электродам, может нарушить баланс ионов во всем объеме и изменить их концентрацию n. Поскольку n оказывается функцией j, соотношение (25.1) только формально похоже на закон Ома, а на самом деле прямой пропорциональности между j и E может и не быть. Чтобы выяснить эту зависимость, разберем подробнее ситуацию, изображенную на рис. 2.54, *в*.

Обозначим площади электродов через S и расстояние между ними через L. Облучение будем считать постоянным и однородным, создающим в единице объема за единицу времени α пар ионов. Наряду с ионизацией газа непрерывно происходит и обратный процесс рекомбинации встречающихся ионов в нейтральные молекулы — так называемой м о л и з а ц и и газа. Концентрации ионов обоего знака будем считать одинаковыми и обозначим через n. Тогда число рекомбинирующих пар ионов в единице объема за единицу времени будет пропорционально как концентрации положительных ионов n, так и концентрации отрицательных ионов n, т. е. n^2. Обозначим число рекомбинирующих пар через βn^2, где β — коэффициент пропорциональности, зависящий от вероятности рекомбинации ионов при их соударениях.

Общее число пар ионов в объеме между электродами равно nSL. Изменение этого числа за единицу времени $SL\frac{dn}{dt}$ определяется числом вновь возникающих во всем объеме пар αSL, числом исчезающих при рекомбинации пар $\beta n^2 SL$ и числом пар ионов, разряжающихся за единицу времени на электродах. Это последнее в свою очередь равно отношению заряда, приходящего за единицу времени к электродам, к величине заряда одного иона, т. е. равно $\frac{I}{e}=\frac{jS}{e}$. Таким образом, баланс числа ионов, образующихся и исчезающих

в газовом промежутке между электродами, будет выражаться уравнением

$$SL\frac{dn}{dt}=\alpha SL-\beta n^2 SL-\frac{jS}{e}$$

или

$$\frac{dn}{dt}=\alpha-\beta n^2-\frac{j}{eL}. \qquad (25.2)$$

При равномерной ионизации $\alpha=\text{const}$, и спустя короткий промежуток времени устанавливается равновесие между числом возникающих и исчезающих ионов. С этого момента $n=\text{const}$ и $\frac{dn}{dt}=0$, так что уравнение (25.2) принимает вид

$$\alpha=\beta n^2+\frac{j}{eL}. \qquad (25.3)$$

Исключая из (25.1) и (25.3) величину n, мы получим искомую зависимость j от E в виде квадратного уравнения. Не анализируя детально общее решение этого уравнения, разберем наиболее интересные предельные случаи.

а) В слабых полях плотность тока незначительна и количество ионов, разряжающихся на электродах, пренебрежимо мало по сравнению с числом ионов, рекомбинирующих в объеме газа, т. е.

$$\frac{j}{eL}\ll\beta n^2. \qquad (25.4)$$

При этом условии из (25.3) получаем

$$\alpha=\beta n^2, \qquad (25.5)$$

или

$$n=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad (25.6)$$

Концентрация ионов в газе определяется отношением вероятностей ионизации и рекомбинации и практически не зависит от плотности тока. Подставляя (25.6) в (25.1), получаем

$$j=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,e\,(k_+ + k_-)\,E\sim E, \qquad (25.7)$$

т. е. в этом случае имеет место закон Ома с постоянной электропроводностью

$$\gamma=ne\,(k_+ + k_-)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,e\,(k_+ + k_-)=\text{const}. \qquad (25.8)$$

б) В противоположном предельном случае сильных полей плотность тока велика, и практически все образующиеся в объеме ионы

уходят к электродам, не успевая рекомбинировать. В этом случае

$$\frac{j}{eL} \gg \beta n^2 \tag{25.9}$$

и

$$\alpha = \frac{j}{eL}. \tag{25.10}$$

Отсюда находим

$$j = \alpha eL = j_{\text{нас}} = \text{const}, \tag{25.11}$$

т. е. с дальнейшим повышением приложенного напряжения ток перестанет расти и остается постоянным. Это максимальное значение тока

$$I_{\text{нас}} = j_{\text{нас}} S = e\alpha SL, \tag{25.12}$$

при котором все образующиеся ионы уходят к электродам, носит название тока насыщения.

На рис. 2.55 приведена полная зависимость j от E. Начальный линейный участок соответствует области применимости закона Ома. В переходной области $j/eL \approx \beta n^2$ и зависимость j от E определяется полным уравнением

$$j = -\frac{e^2 (k_+ + k_-)^2 E^2}{2\beta eL} + \sqrt{\left[\frac{e^2 (k_+ + k_-)^2 E^2}{2\beta eL}\right]^2 + \frac{\alpha e^2 (k_+ + k_-)^2 E^2}{\beta}}. \tag{25.13}$$

Наконец, на участке насыщения эта зависимость имеет вид горизонтальной прямой.

Интересно отметить, что в области насыщения согласно (25.1)

$$nE = \text{const}, \tag{25.14}$$

т. е. на этом участке с ростом приложенного напряжения равновесная концентрация ионов и электропроводность $\gamma = ne(k_+ + k_-)$ падают обратно пропорционально напряжению $U = EL$, а сопротивление $R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$ растет прямо пропорционально U. Таким образом, газовый промежуток, ионизуемый посторонним источником энергии, является примером переменного сопротивления, постоянного при слабых полях и растущего пропорционально напряжению в сильных.

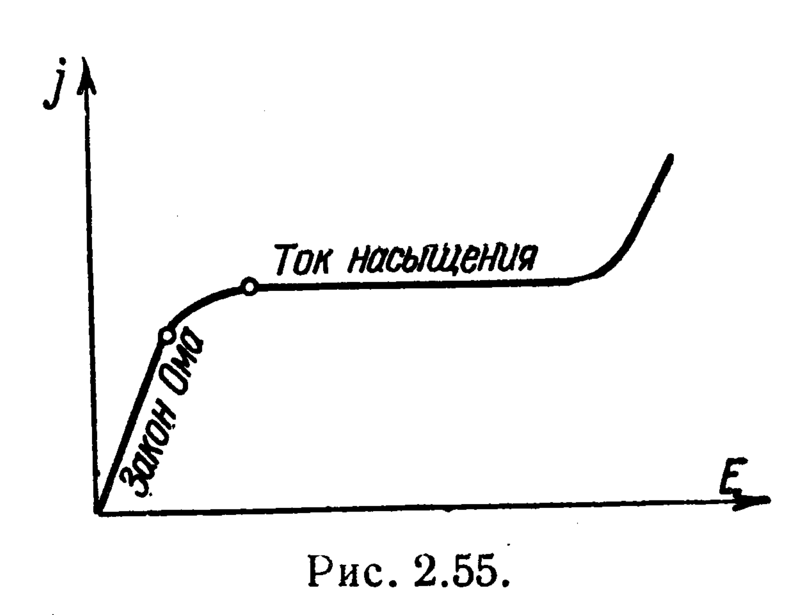


Рис. 2.55.

При высоких напряжениях вольтамперная характеристика, изображенная на рис. 2.55, вновь начинает загибаться кверху. Это связано с тем, что положительные ионы теперь подходят к катоду

с большой скоростью и энергией и выбивают из него дополнительные электроны. Последние в свою очередь, проходя через разрядный промежуток к аноду, ускоряются настолько, что начинают ионизовать встречные нейтральные молекулы (эта ударная ионизация подробнее будет рассмотрена в следующем параграфе). В результате этих процессов в газе создаются дополнительные ионы, равновесная концентрация последних n возрастает, плотность тока j увеличивается по сравнению с током насыщения.

Однако если убрать внешний источник, то прекратятся и первичные ($\alpha=0$) и вторичные процессы ионизации и спустя короткий промежуток времени (пока все имеющиеся и создающиеся ионы не дойдут до электродов) ток уменьшится до нуля. Поэтому такой разряд называется несамостоятельным.

§ 26. Типы газовых разрядов

Самостоятельным называется такой разряд, для поддержания которого нет необходимости в постороннем источнике, непрерывно ионизующем газ. В этом случае ток, проходящий через разрядный промежуток, сам создает новые ионы, компенсирующие непрерывную убыль ионов, разряжающихся на электродах. Процессы возникновения новых ионов как в самом газе, так и на электродах весьма многообразны и недостаточно полно изучены даже к настоящему времени. Наиболее важным из них является процесс ударной ионизации нейтральных молекул газа ионами, ускоряемыми внешним электрическим полем в разрядном промежутке.

Обозначим напряжение, поданное на разрядный промежуток, через U, а расстояние между электродами — через L. Тогда напряженность электрического поля в газе равна

$$E=\frac{U}{L}. \qquad (26.1)$$

На расстоянии, равном длине свободного пробега l, падение напряжения

$$U_l=El=U\frac{l}{L} \qquad (26.2)$$

составляет лишь некоторую долю полного падения напряжения U. Кинетическая энергия, приобретенная ионом с зарядом e, на длине свободного пробега равна

$$\varepsilon_{\text{кин}}=eU_l=\frac{eUl}{L}. \qquad (26.3)$$

Абсолютные концентрации ионов в разрядном промежутке, как правило, невелики и во много раз меньше концентрации нейтральных молекул. Поэтому в конце свободного пробега ион практически всегда сталкивается с нейтральной молекулой и передает

ей часть накопленной им кинетической энергии $\varepsilon_{кин}$. Пока величина U_l не превышает примерно 1 вольта, соударения ионов с молекулами являются упругими. Поскольку массы ионов в газе близки к массам нейтральных молекул, то по законам соударения упругих шаров (см. том I, глава II) почти вся кинетическая энергия (26.3) иона передается им той молекуле, с которой он сталкивается. На каждой следующей длине свободного пробега ион вновь ускоряется, накапливает кинетическую энергию $\varepsilon_{кин}$ и отдает ее при столкновении следующей молекуле газа. Нейтральные молекулы, получившие эту энергию, отдают ее при последующих столкновениях другим молекулам, и газ при прохождении через него электрического тока нагревается.

С возрастанием величины U_l кинетическая энергия иона в конце его свободного пробега становится достаточной для «деформации» нейтральных молекул и перевода их в «возбужденное состояние». Механизм возбуждения атомов и молекул состоит в том, что какой-либо из внутренних электронов, получив добавочную энергию, переходит на новую орбиту, более удаленную от ядра. Обратный переход возбужденной молекулы в исходное состояние происходит по большей части почти мгновенно, с уносом излишка энергии, испускаемой световой частицей—фотоном. Следовательно, часть кинетической энергии ионов будет превращаться в энергию излучения, испускаемого газом. Таков механизм возникновения свечения в газе, сквозь который проходит электрический ток (газосветные трубки, полярные сияния и т. д.). Возбужденные молекулы могут также разрываться на атомы и радикалы, что дает начало различным химическим реакциям, сопровождающим газовый разряд (образование озона, окислов азота и т. д.).

При U_l порядка 10—30 вольт (в зависимости от рода газа) энергия иона в конце свободного пробега становится достаточной для вырывания электронов из молекул, с которыми сталкивается ион. При этом нейтральная молекула превращается в положительный ион, а оторванный электрон может присоединиться к другой нейтральной молекуле, образуя отрицательный ион. Эти новые ионы и электроны в свою очередь также разгоняются электрическим полем и могут производить дальнейшую ударную ионизацию нейтральных молекул.

В соударениях, сопровождающихся ионизацией или возбуждением молекул, часть кинетической энергии ударяющего иона переходит в энергию «деформации» молекул, и удар будет «неупругим». Применяя законы сохранения количества движения и энергии (том I, глава II) к такому удару, можно показать, что необходимая кинетическая энергия ударяющего иона $\varepsilon_{кин}$ должна в несколько раз превышать минимальную энергию $\Delta\varepsilon_{мин}$ ионизации или (соответственно) возбуждения нейтральной молекулы.

Возвращаясь к соотношению (26.2), мы видим, что падение потенциала на длине свободного пробега U_l зависит не только от приложенного градиента потенциала U/L, но и от длины свободного пробега l. Последняя в свою очередь зависит от давления газа p и, как показано в томе I, глава VII (за исключением области, в которой $l \approx L$), обратно пропорциональна давлению:

$$l \sim \frac{1}{p}. \tag{26.4}$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{\text{кин}} \sim U_l \sim \frac{U}{Lp}, \tag{26.5}$$

и условия возникновения ударной ионизации в газе облегчаются при понижении давления, т. е. при разрежении газа.

Процессы возникновения новых ионов при разряде могут происходить не только в объеме газа, но и на электродах. Электроны, а в некоторых случаях и ионы могут вырываться из металлических электродов в результате фотоэффекта, т. е. поглощения световых частиц — фотонов, возникающих в газе при разряде, как это описывалось выше. Вырывание электронов может происходить и при ударе об электроды подходящих к ним достаточно быстрых ионов или электронов (вторичная электронная эмиссия), вследствие разогрева и т. п.

Для пояснения влияния перечисленных выше факторов на прохождение электрического тока в газе рассмотрим результаты, полученные А. Г. Столетовым при изучении фотоэлектрического эффекта — вырывания светом электронов из металла. Мы будем толковать результаты опытов Столетова на основе современного представления о механизме фотоэффекта.

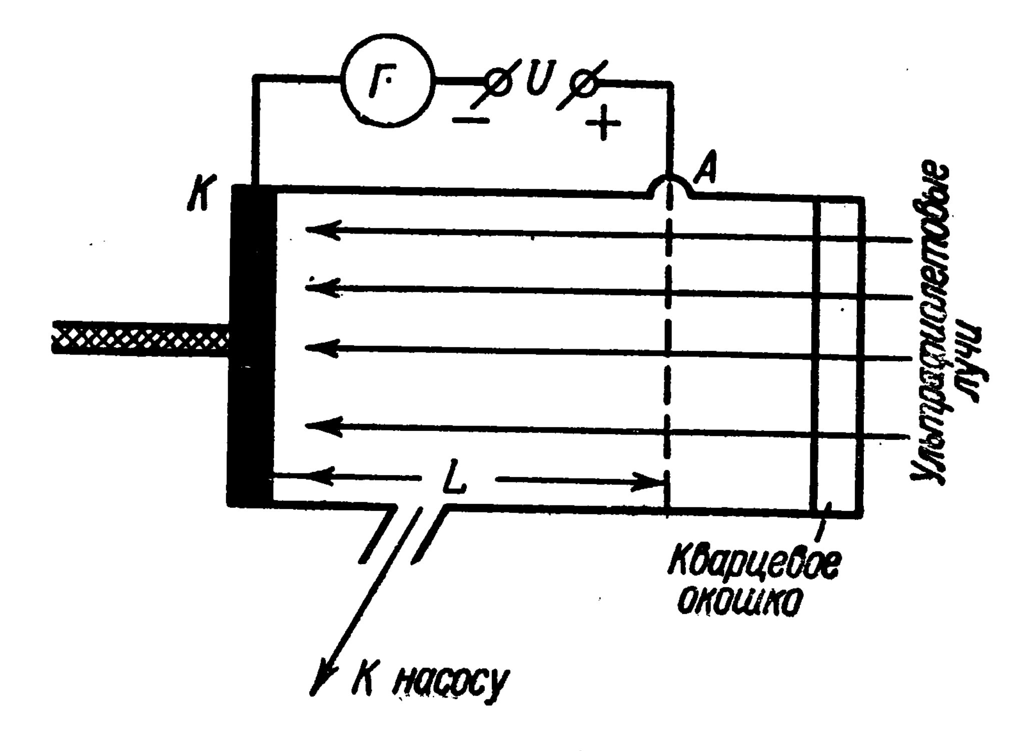


Рис. 2.56.

Схема опыта Столетова изображена на рис. 2.56. Одно из оснований цилиндрической камеры было закрыто прозрачной кварцевой пластинкой. Через это окошко пучок ультрафиолетовых лучей освещал металлическую пластинку, служившую вторым основанием, и вырывал из нее электроны. Пластинка K была присоединена к отрицательному полюсу батареи и являлась катодом. Анодом A служила помещенная внутри камеры металлическая сетка с широ-

кими ячейками, пропускавшими свет. Под действием приложенной разности потенциалов U электроны двигались от катода к аноду через газ, заполнявший камеру. Гальванометр $Г$ измерял ток i, идущий в цепи. Через специальный отвод из камеры можно было откачивать воздух и менять его давление p. Расстояние между электродами L можно было варьировать с помощью микрометрического винта.

При постоянном значительном напряжении U Столетов наблюдал, что с уменьшением давления в камере ток в цепи сначала возрастал, достигал некоторого максимального значения $i_{макс}$, а затем снова падал до некоторой величины i_0, постоянной при низких давлениях. На рис. 2.57 приведены некоторые из кривых зависимости i от p при различных приложенных напряжениях $U_1 > U_2 > U_3$. Все эти кривые при низких давлениях сходились к тому же значению i_0. Величина давления $p_{макс}$, при которой наступал максимум тока, однако, была при этом различной. Меняя U и L, Столетов установил, что

$$\frac{U}{Lp_{макс}} = \text{const}. \qquad (26.6)$$

Постоянство i_0 связано с тем, что напряжения U_1, U_2 и U_3 достаточно велики, чтобы в области вакуума все вырванные из пластинки K электроны достигали анода и устанавливался ток насыщения. При впуске в камеру небольшого количества газа ток возрастал. Это показывает, что, кроме вырванных из катода электронов, при прохождении их через газ возникают новые ионы за счет ударной ионизации. При малых значениях напряжения $U = U_3$ ударной ионизации не происходит, так как даже при прохождении полной разности потенциалов энергия eU_3, приобретаемая электроном, недостаточна для такой ионизации молекул газа. При больших напряжениях ударная ионизация возможна, и с ростом давления число образующихся вторичных ионов возрастает (левый участок кривых рис. 2.57 до максимума).

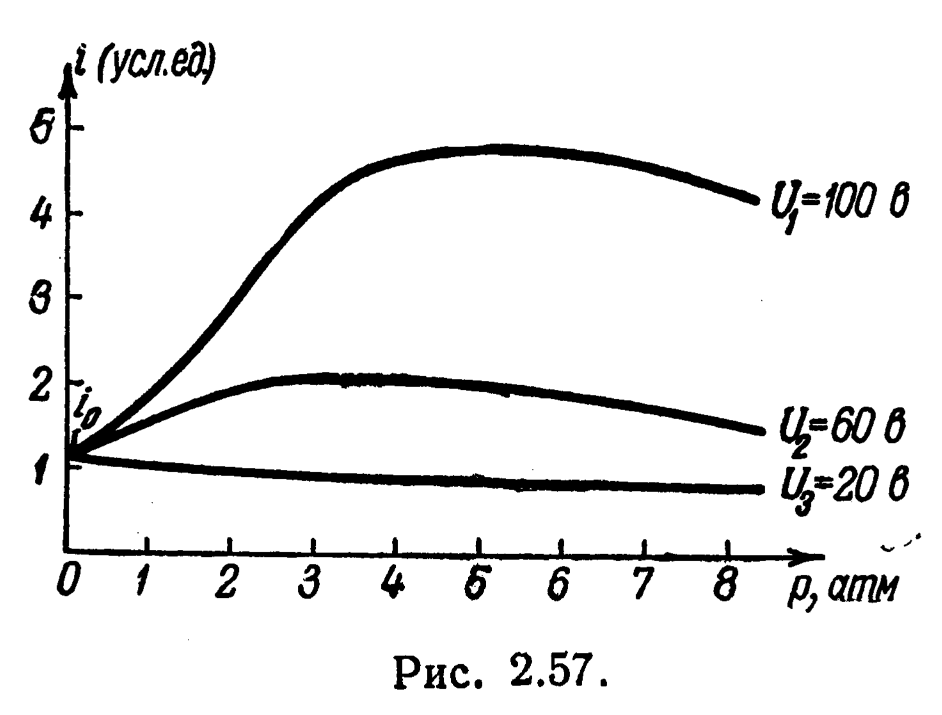


Рис. 2.57.

Однако с увеличением давления уменьшается длина свободного пробега электронов, падают накапливаемая на этом пути их кинетическая энергия и способность ионизовать газовые молекулы. При некотором давлении кинетическая энергия электрона станет меньше

предельного значения, при котором еще возможна ионизация молекул данного газа, и с дальнейшим ростом давления ток начнет падать вследствие уменьшения подвижности первичных электронов и возвращения части их обратно на катод.

Сопоставляя (26.6) с (26.5), мы видим, что максимум тока в опытах Столетова соответствует некоторому вполне определенному значению средней кинетической энергии, приобретаемой электроном на длине свободного пробега в газе. Поскольку l есть средняя длина свободного пробега, а отдельные электроны проходят без столкновения в газе несколько различные l_i, как меньшие, так и бóльшие l, то после достижения $p_{\text{макс}}$ при дальнейшем росте давления явление ударной ионизации в газе не прекратится сразу, и разрядный ток i будет уменьшаться постепенно. Таким образом, в описанном опыте Столетова выявились все основные процессы, наблюдающиеся в газовом разряде: вырывание заряженных частиц из электродов, размножение ионов при ударной ионизации и зависимость этих процессов от напряженности поля и от давления.

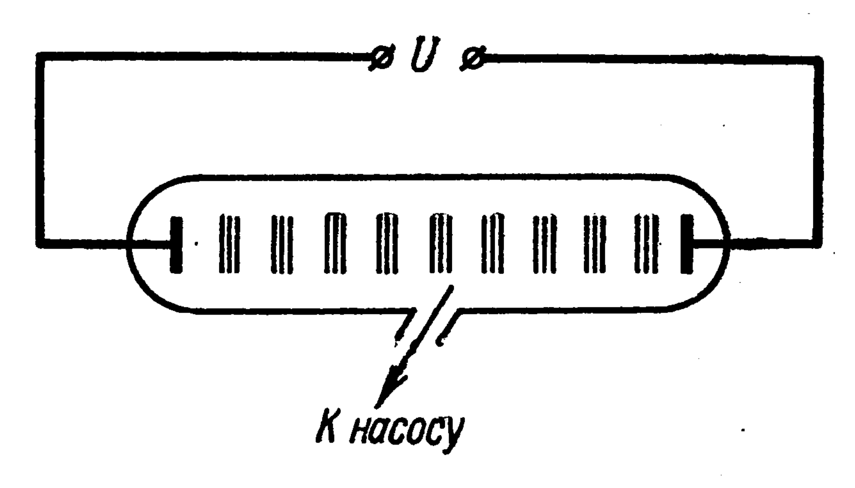


Рис. 2.58.

Рассмотрим теперь, как протекают эти явления в основных типах газовых разрядов.

а) Тлеющий разряд. Приложим между электродами, впаянными в противоположные концы длинной стеклянной трубки (рис. 2.58), разность потенциалов в несколько тысяч вольт и будем откачивать воздух из этой трубки. При снижении давления до величины порядка 1 *мм* рт. ст. падение потенциала на длине свободного пробега возрастает настолько, что имеющиеся в небольшом количестве в воздухе свободные ионы, двигаясь к электродам и ударяясь о них, начнут выбивать новые электроны. Газовый промежуток начнет слабо проводить электрический ток; энергия ионов в конце свободного пробега будет еще недостаточной для ударной ионизации в газе. Сталкиваясь с газовыми молекулами, электроны и ионы будут лишь возбуждать их электроны на более высокие уровни. Последние, возвращаясь затем в свои нормальные состояния, излучат избыток энергии в виде света. В результате газ начнет светиться, причем цвет свечения будет зависеть от химической природы газа.

Общее количество энергии, выделяющейся в газовом промежутке, невелико, и светящийся газ остается холодным. Газосветные трубки, наполненные разреженным гелием или неоном и светящиеся при прохождении через них слабого тока при высоком напряжении, широко применяются для различных уличных надписей и реклам.

При дальнейшем понижении давления до величины порядка 0,01 *мм* рт. ст. тлеющий разряд разбивается на отдельные светящиеся столбики — страты (рис. 2.58). В газе возникает ударная ионизация, ток через газовый промежуток усиливается, но общее число ионов все же недостаточно для пробоя.

При еще бо́льших разрежениях, порядка 10^{-5}—10^{-6} *мм* рт. ст., ионы и электроны проходят через всю трубку, практически не сталкиваясь с молекулами, ток падает и свечение газа прекращается. Наблюдается лишь слабое зеленое свечение стенок стеклянной трубки в тех местах, где на нее попадает поток электронов.

б) Искровой разряд. При давлениях порядка атмосферного и выше длина свободного пробега электронов и ионов слишком мала и газы практически не проводят электрический ток. В них возможен лишь несамостоятельный разряд, описанный в предыдущем параграфе.

Однако при очень больших полях разность потенциалов U_l на длине свободного пробега становится достаточной для начала ударной ионизации, которая осуществляется в основном электронами. По причинам, которые будут выяснены в III томе, электроны в газе имеют значительно бо́льшую длину свободного пробега, чем ионы. Следовательно, проходя при этом бо́льшую разность потенциалов, электроны приобретают бо́льшую энергию, чем ионы, что и объясняет особую роль первых в механизме ударной ионизации.

Электрон с достаточно большой кинетической энергией при встрече с нейтральной молекулой ионизует ее. В сильных электрических полях оба электрона (первичный и вторичный) вновь разгоняются, практически не прилипая к нейтральным молекулам и не образуя тяжелых отрицательных ионов. Эти два электрона, приобретая энергию в электрическом поле, ионизуют еще две встречные молекулы и т. д. Таким образом, через газовый промежуток к аноду будет двигаться со скоростью порядка 10^3 *м/сек* все нарастающая в числе «лавина» электронов. Остающиеся на ее пути положительные ионы вследствие своей большой массы и относительно низкой подвижности практически не успевают заметно изменить своих положений и лишь образуют положительный объемный заряд, искажающий поле между электродами.

Наличие электронной лавины само по себе еще не приводит к пробою газа. Оно лишь является причиной возрастания тока с увеличением напряженности поля и расстояния между электродами L (рис. 2.57). Для наступления пробоя каждая лавина должна стать источником появления в газе новых электронов, являющихся родоначальниками новых лавин. Эти новые электроны могут возникать за счет различных вторичных процессов в объеме газа или должны вырываться из катода.

Оставшиеся после прохождения электронной лавины положительные ионы движутся к катоду, сталкиваясь с нейтральными молекулами и ускоряясь электрическим полем. Подходя к катоду, эти ионы разряжаются и тем самым замыкают ток во внешней цепи. При достаточно большой напряженности поля положительные ионы, ударяясь о катод, начинают вырывать из него свободные электроны, становящиеся родоначальниками новых лавин. Исходя из этих представлений, Таунсенд и Роговский развили теорию электрического разряда, позволившую довольно удовлетворительно оценить критическую напряженность электрического поля $E_{кр}$, необходимую для наступления пробоя в газе.

По достижении критической напряженности $E_{кр}$ картина происходящих в газе процессов усложняется и уже не поддается точному расчету.

Объемные ионные заряды сильно искажают электрическое поле и создают местные флуктуации его напряженности. При ионизации атомов может происходить вырывание электронов из глубоко лежащих внутренних оболочек. При перескоке внешних электронов атома на эти освободившиеся места испускаются ультрафиолетовые и рентгеновы лучи, которые могут производить дополнительную ионизацию в объеме газа и создавать новые электронные лавины.

В результате электронные лавины концентрируются в узком канале сильно ионизованного газа, и этот канал, называемый стриммером, начинает очень быстро, со скоростью порядка 10^6 *м/сек*, продвигаться от анода, где концентрация электронных лавин наибольшая, к катоду. Доходя до катода, стриммер замыкает цепь, и между электродами проскакивает искра.

Искра представляет собой тонкий ветвистый шнур сильно ионизованного газа. Благодаря высокой электропроводности канала искры через него проходит очень сильный ток, обычно полностью разряжающий источник приложенного высокого напряжения. В этом канале происходит интенсивное выделение энергии, получаемой электронами и ионами от электрического поля, газ разогревается до очень высоких температур и ярко светится. Резкое повышение давления, сопровождающее разогрев газа, создает ударные и звуковые волны. Таков, в частности, механизм образования атмосферных разрядов — молнии и сопровождающего ее грома.

Для осуществления искрового разряда в воздухе при атмосферном давлении и нормальной влажности необходимы электрические поля напряженностью порядка 3000 *кв/м*. Попадая в область более низких напряжений, электронная лавина перестает размножаться, ионы разных знаков рекомбинируют друг с другом, и разряд затухает. Такие условия осуществляются, например, у поверхности острия, поддерживаемого при высоком потенциале. В непосредственной близости от острия, как это показано на рис. 2.59,

напряженность электрического поля весьма велика и возникает область ударной ионизации. По мере удаления от острия напряженность поля падает, и разряд не доходит до второго электрода. В результате возбуждения молекул газа электронным ударом вокруг острия возникает светящаяся «корона» (коронный разряд).

Высокая температура и давление обусловливают мощное механическое воздействие искрового разряда. С помощью искры можно, например, проплавлять отверстия. На этом принципе основан электроискровой метод обработки металлов. С помощью электрической искры можно в закаленной стали «сверлить» строго калиброванные отверстия диаметром до 0,05 *мм*, обрабатывать сверхтвердые сплавы, проделывать в металле винтовые каналы и т. д. Мощный искровой разряд в воде позволяет дробить на мельчайшие частички самые твердые материалы.

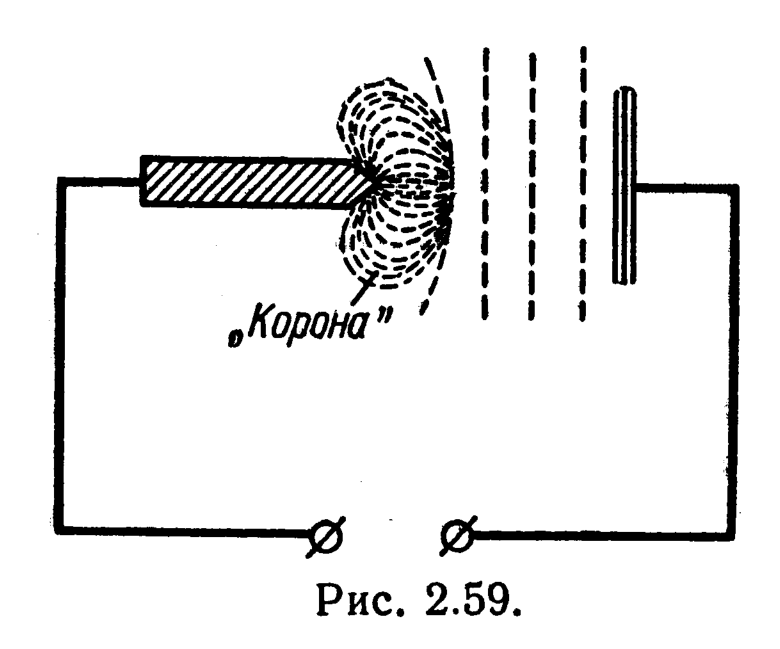


Рис. 2.59.

При очень сильных токах в газе или при весьма высокой температуре значительная доля молекул газа (вплоть до 100%) ионизуется и газ превращается в систему быстро движущихся положительных ионов и электронов. Такое состояние газа называется плазмой. Электропроводность плазмы чрезвычайно велика, так как все частицы, входящие в плазму, заряжены (многие ионы — многократно) и обладают подвижностью.

Недра звезд и в том числе Солнца, обладающие температурой в десятки миллионов градусов, представляют собой плазму.

В настоящее время ученым удалось получить при мощном электрическом разряде плазму с температурой порядка нескольких миллионов градусов. Это исключительно высокая температура, в сотни раз превышающая ту, которую удавалось до сих пор получить в лабораторных условиях. Целью этих исследований является создание управляемой термоядерной реакции, достичь которой еще не удалось. К этому мы вернемся еще в III томе.

в) Дуговой разряд. Создав огромную для своего времени гальваническую батарею, В. В. Петров в 1802 г. обнаружил, что при разведении друг от друга угольных электродов, через которые шел ток, цепь не разрывалась и между электродами возникало ослепительное пламя электрической дуги. В этом пламени можно плавить металлы и использовать его для освещения.

Высокая температура в электрической дуге создает сильно ионизованный воздушный промежуток, проводящий электрический ток. Благодаря низкому сопротивлению этого промежутка величина напряжения на дуге не превышает 50—80 *в*.

Механизм процессов, протекающих в электрической дуге, очень сложен. Лишь спустя сто лет, в 1902 г., В. Ф. Миткевич показал, что образование и поддержание дугового разряда обусловлено термоэлектронной эмиссией из раскаленного ударами ионов катода.

При прохождении дугового разряда угольные электроды сгорают и на аноде образуется выгорев-

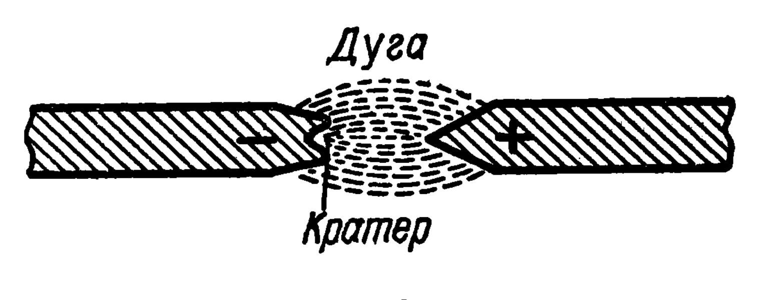


Рис. 2.60.

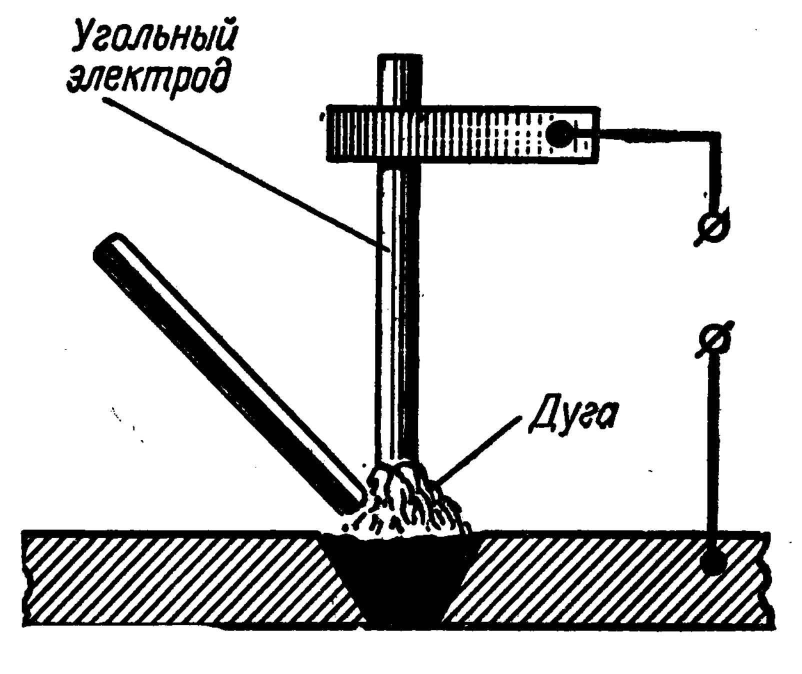


Рис. 2.61.

шая впадина — кратер (рис. 2.60). При атмосферном давлении температура кратера электрической дуги в воздухе имеет порядок 4000°, а с повышением давления может быть доведена до 10 000°.

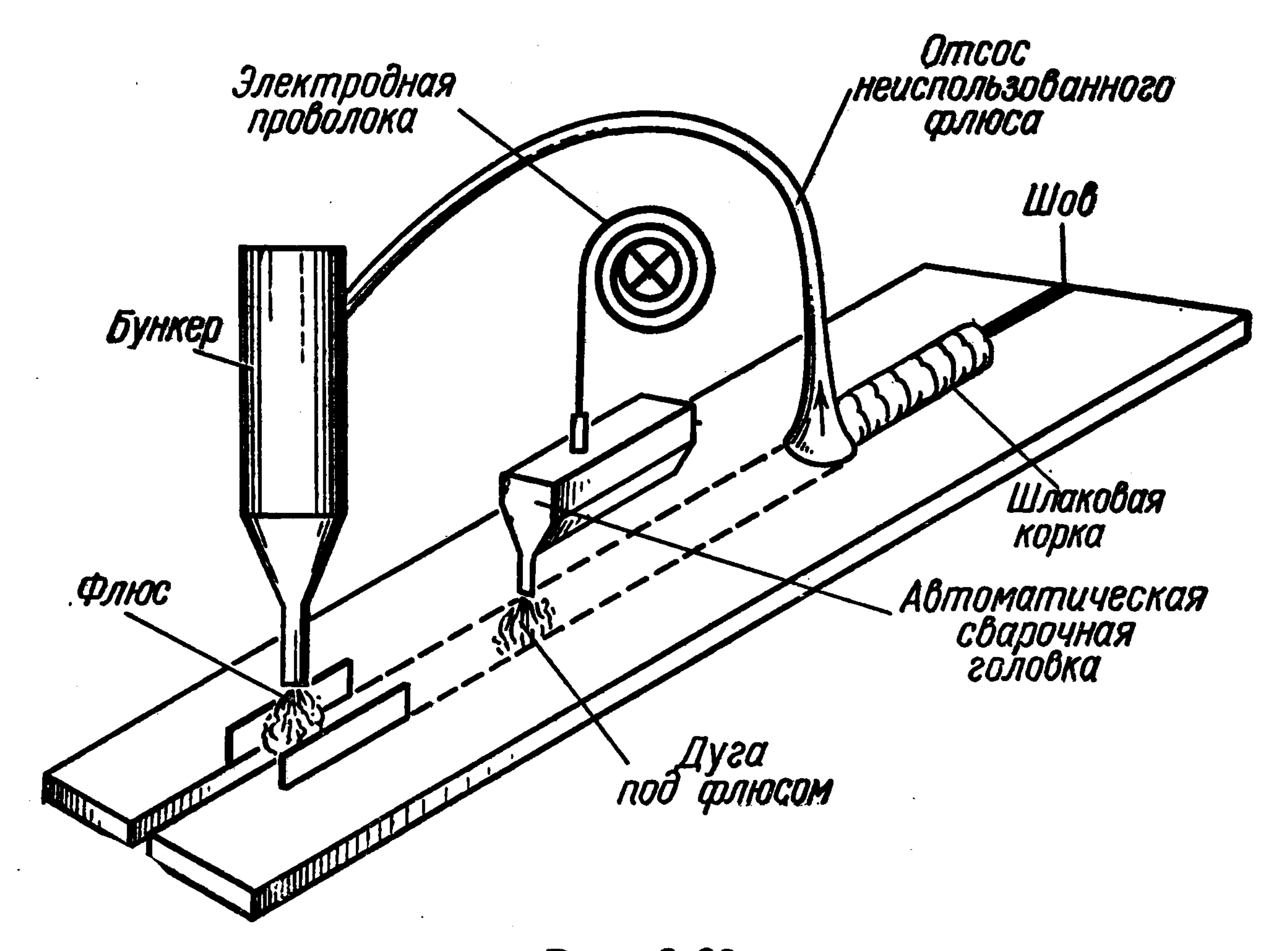


Рис. 2.62.

Идея Петрова об использовании электрической дуги для плавления металлов была разработана в 1881 г. Н. Н. Бенардосом, создавшим электросварку (рис. 2.61). В 1890 г. Н. Г. Славянов заменил угольный электрод металлическим, который создавал дугу и сам плавился, сваривая металлические швы. Советский ученый Е. О. Патон создал специальные электросварочные головки (рис. 2.62)

и машины, автоматизировавшие процесс электросварки. Недавно украинский ученый К. К. Хренов разработал методы электросварки под водой. При высокой температуре дуги вода испаряется, и дуга проходит в своеобразном газовом пузыре над свариваемой деталью (рис. 2.63).

При пониженных давлениях ионизованный газ в дуге остается холодным, как в случае тлеющего разряда. Такая холодная дуга горит в парах ртути над поверхностью жидкой ртути в ртутных выпрямителях и кварцевых лампах.

Идея Петрова о применении дуги для освещения была практически осуществлена

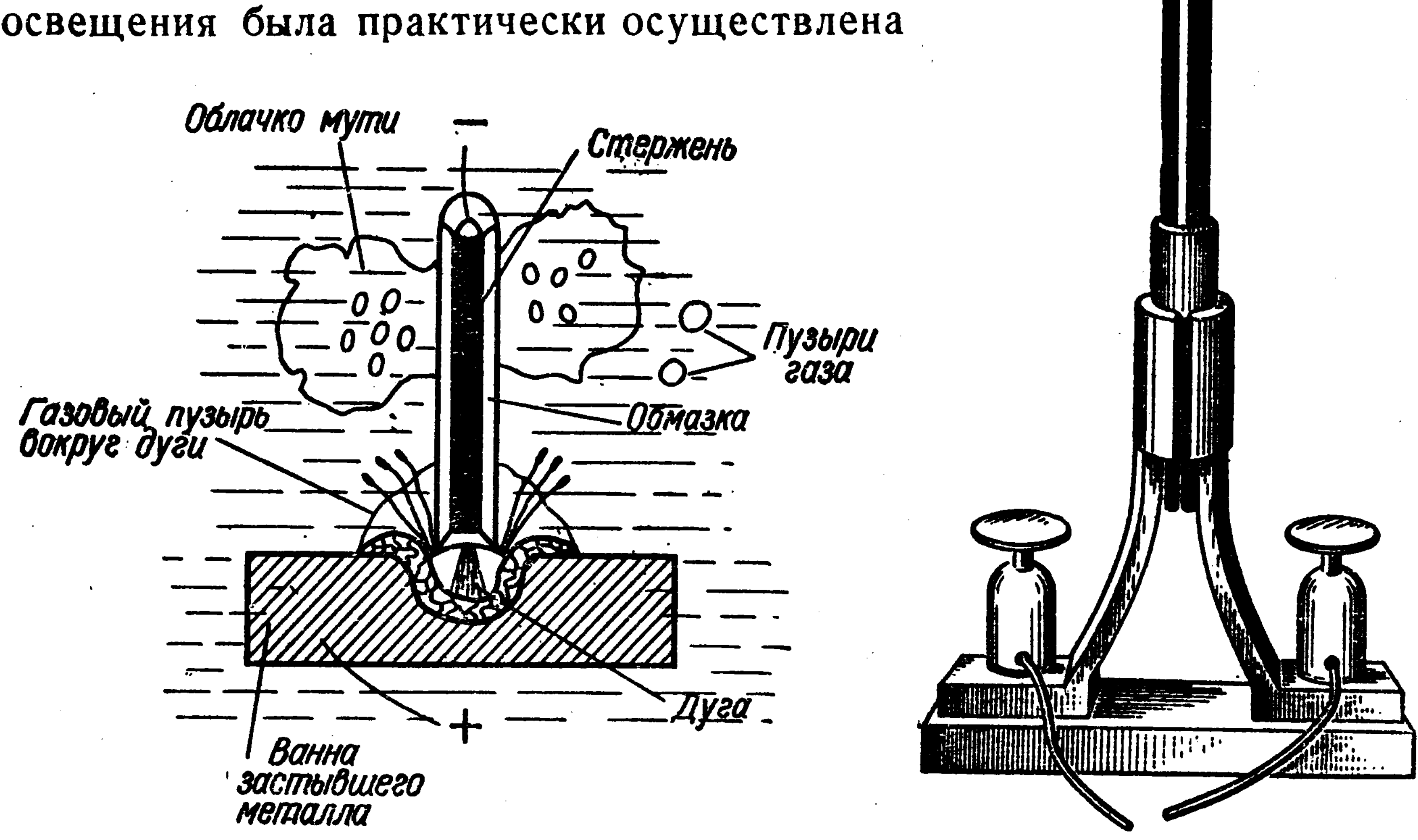


Рис. 2.63.

Рис. 2.64.

в 1876 г. П. Н. Яблочковым. Непрерывное сгорание угольных электродов требовало создания специальных часовых механизмов для безостановочного сближения углей. В свече Яблочкова, изображенной на рис. 2.64, это затруднение преодолено исключительно простым и остроумным способом. Угольные электроды расположены параллельно друг другу и отделены легко плавящейся каолиновой прокладкой. Дуга, образующаяся между концами угольных стержней, по мере сгорания их выплавляет каолиновую прокладку и обнажает следующий слой угля. Свеча Яблочкова явилась первым электрическим источником света. В дальнейшем ее вытеснила лампа накаливания. Однако в наиболее мощных прожекторах в качестве источника света по-прежнему служит электрическая дуга.

§ 27. Пробой диэлектриков

В обычных условиях твердые неметаллические тела являются хорошими изоляторами, не проводят электрического тока и при внесении в электрическое поле проявляют только диэлектрические свойства — поляризуются. Так же как в чистых воде или воздухе, в них практически нет свободных зарядов. Свободные ионы и электроны возникают в твердых диэлектриках лишь под действием внешних источников, в частности, при нагревании.

В ионных кристаллах типа NaCl в узлах кристаллической решетки расположены попеременно положительные и отрицательные ионы (например, Na^+ и Cl^- на рис. 2.65). Однако эти ионы не являются свободными и лишь колеблются около своих положений равновесия с амплитудами, которые возрастают с повышением температуры. Вследствие хаотичности теплового движения амплитуды колебаний ионов различны и постоянно изменяются по величине. Время от времени тот или иной из ионов (например, средний из ионов Na^+ на рис. 2.65) случайно приобретает от своих соседей очень большую кинетическую энергию, превышающую его энергию связи, и срывается из положения равновесия, уходя в пространство между узлами кристаллической решетки. В междоузлиях ион связан значительно слабее и может перемещаться далее вдоль решетки. Оставшийся пустым узел образует «дырку», в которой не хватает положительного заряда, и, значит, эта дырка как бы заряжена отрицательно. Аналогичная «дырка», но уже положительная, образуется в узле при уходе из него иона Cl^-.

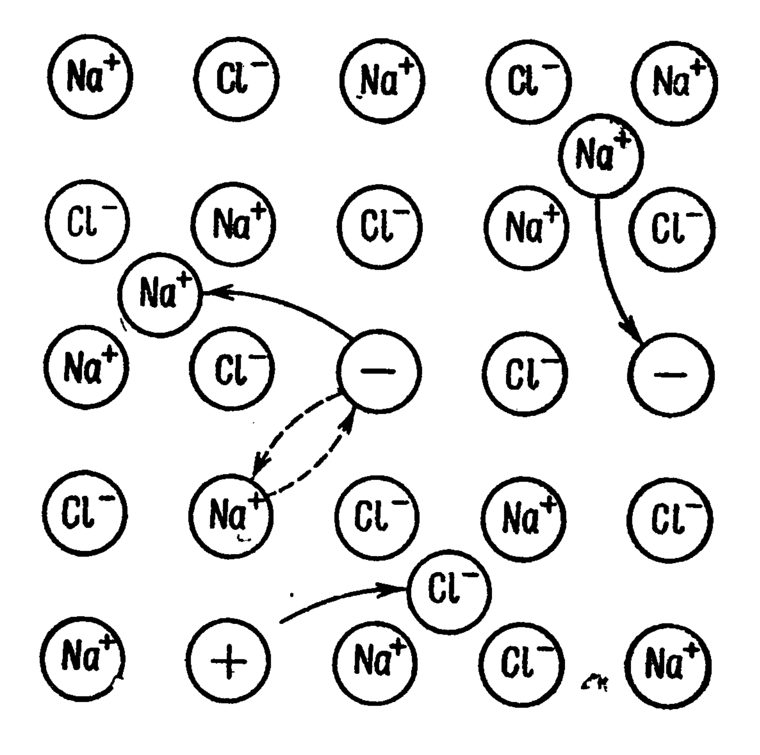


Рис. 2.65.

На освободившееся место в узле может перескочить соседний положительный ион, и тем самым дырка переместится на один «шаг» вдоль решетки. Возможные перемещения ионов в междоузловом пространстве показаны на рис. 2.65 стрелками. Ионы и дырки диффундируют в кристалле до тех пор, пока при встрече иона с соответствующей дыркой они не рекомбинируют. Этот случай показан на том же рис. 2.65 справа. В результате этих противоположных процессов — срыва ионов из своих положений равновесия и рекомбинации их с дырками — в кристалле устанавливается равновесие. Как показал Я. И. Френкель, равновесная концентрация

сорванных ионов и дырок выражается формулой *)

$$n_+ = n_- = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_+}{kT}}, \tag{27.1}$$

где ε_+ — энергия срыва иона из положения равновесия в междоузловое пространство. Эти концентрации равны нулю при абсолютном нуле ($e^{-\infty} \longrightarrow 0$) и очень резко возрастают с повышением температуры.

Если приложить к кристаллу внешнее электрическое поле, то возникает направленное движение сорванных со своих нормальных мест «свободных» положительных ионов по полю и свободных отрицательных дырок против поля. Аналогично будут вести себя и возникающие в кристалле свободные отрицательные ионы и соответствующие им положительные дырки (рис. 2.65, внизу). В результате всех этих процессов через кристалл пойдет слабый электрический ток. Аналогично (24.10) и (24.12) плотность этого тока будет выражаться формулой

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i z_i e k_i \mathbf{E}, \tag{27.2}$$

и электропроводность кристалла будет равна

$$\gamma = \sum_i n_i z_i e k_i. \tag{27.3}$$

Здесь n_i — концентрации, z_i — валентности и k_i — подвижности всех имеющихся в кристалле «свободных» зарядов — сорванных ионов разного знака и соответствующих дырок. Следует отметить, что передвижение дырки в кристалле есть на самом деле последовательное перемещение ионов, перескакивающих на ее место. Таким образом, прохождение электрического тока в ионных кристаллах связано с переносом ионов, составляющих кристалл, и представляет своеобразный электролиз в твердой фазе. Доходя до электродов и разряжаясь, ионы превращаются в нейтральные атомы, выделяющиеся на электродах. И действительно, точные опыты, проведенные при длительном пропускании тока через ионные кристаллы, подтвердили приложимость законов Фарадея (24.17) к этому случаю.

В случае неионных кристаллов носители электрического тока имеют несколько иную природу. Тепловое движение ионизует отдельные нейтральные атомы или молекулы и вырывает из них электроны. Последние движутся вдоль решетки. Образовавшиеся

---

*) Эта формула выводится из общих статистических соображений и является частным случаем распределения Больцмана (см. том I, формула (21.14)).

при их отрыве положительные дырки также перемещаются вдоль кристалла за счет перескока на их место электронов с соседних атомов или молекул (рис. 2.66). При встрече свободные электроны

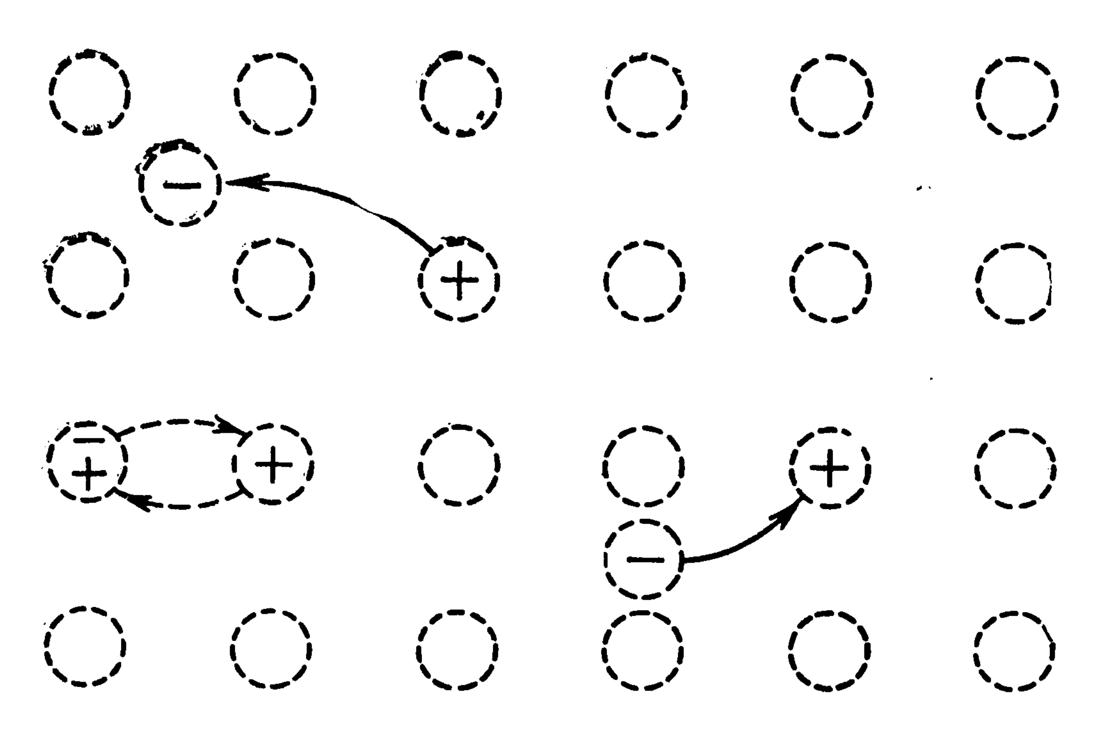


Рис. 2.66.

и дырки рекомбинируют, и их равновесная концентрация определяется формулой, аналогичной (27.1). Соответственно и в этом случае будут справедливы закон Ома (27.2) и выражение для электропроводности (27.3).

Поскольку концентрации свободных зарядов n_i и их подвижности k_i в твердых диэлектриках резко возрастают с температурой, то удельное сопротивление диэлектрика

$$\varrho = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sum n_i z_i e k_i} \qquad (27.4)$$

очень резко убывает с температурой. На рис. 2.67 сопоставлены зависимости удельного сопротивления металлов и диэлектриков от температуры. Масштабы на этом рисунке несколько искажены, так как $\varrho_{\text{диэл}}$ обычно в $10^{10}-10^{15}$ раз больше, чем $\varrho_{\text{мет}}$. Сопротивление металлов мало и в соответствии с (15.10) медленно линейно растет с температурой; в противоположность этому, сопротивление изоляторов велико и круто, экспоненциально падает с температурой. Последнее обстоятельство обусловливает возможность так называемого **теплового пробоя** диэлектриков, теория которого была разработана Н. Н. Семеновым и В. А. Фоком.

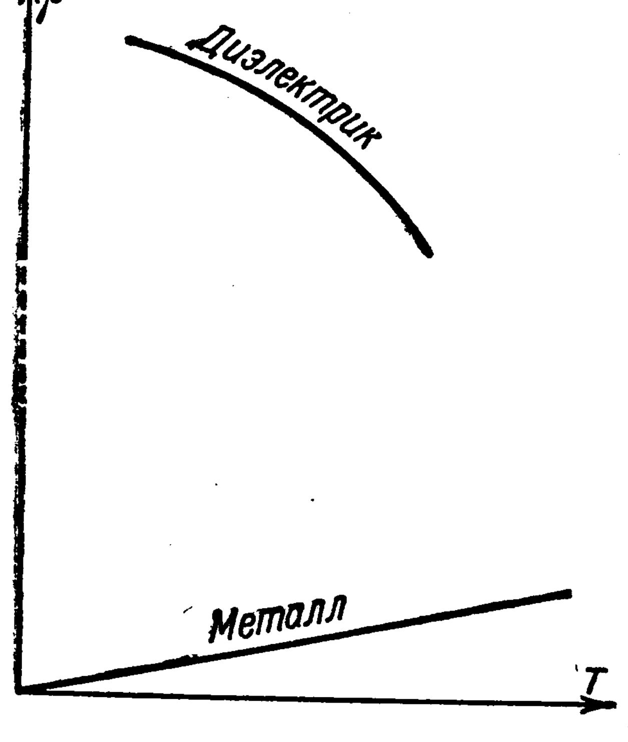


Рис. 2.67.

Пусть к изолятору приложена некоторая разность потенциалов U. Благодаря малой концентрации носителей тока сопротивление изолятора R_0 при начальной температуре T_0 очень велико и через изолятор идет очень слабый ток $I_0 = U/R_0$. Этот ток выделяет в диэлектрике тепло

$$Q_0^+ = \frac{U^2}{R_0} \qquad (27.5)$$

и разогревает диэлектрик до некоторой температуры $T > T_0$. При этой температуре сопротивление изолятора R_T уменьшается, ток через него $I = U/R_T$ возрастает и увеличивается выделяемая мощность

$$Q_T^+ = \frac{U^2}{R_T}. \qquad (27.6)$$

В результате изолятор нагревается еще сильнее, еще более возрастает идущий через него ток и выделяющееся тепло и т. д.

Процессу прогрессирующего саморазогрева и увеличения тока препятствует теплоотдача от нагретого изолятора в окружающую среду. Скорость теплоотдачи Q^- пропорциональна разности температур между изолятором и окружающей средой, т. е.

$$Q^- = \alpha(T - T_0). \qquad (27.7)$$

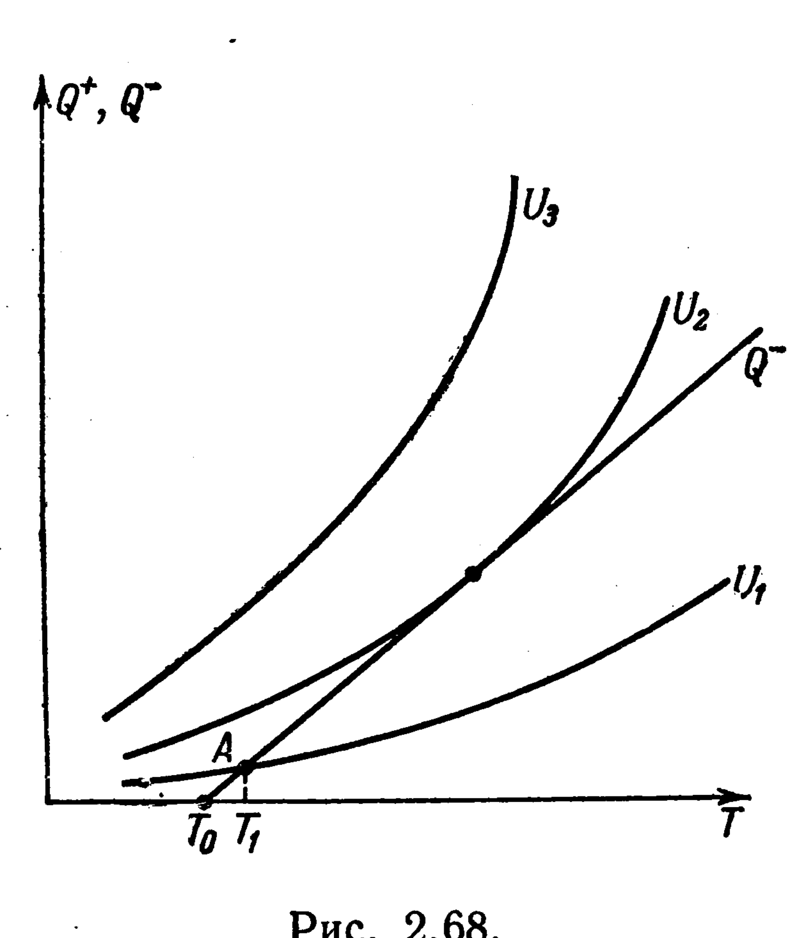


Рис. 2.68.

На рис. 2.68 изображена прямая теплоотдачи (27.7) и кривые скорости тепловыделения (27.6) при различных приложенных напряжениях $U_1 < U_2 < U_3$. При низком напряжении U_1 линии (27.6) и (27.7) пересекаются в точке A при температуре T_1, близкой к начальной. Через диэлектрик идет слабый ток, и он слегка разогревается до тех пор, пока скорость теплоотдачи (Q^-) не сравняется со скоростью теплоприхода (Q^+), после чего дальнейшее повышение температуры прекращается. При высоком напряжении U_3 по мере разогрева теплоприход растет с температурой быстрее, чем теплоотвод, и устойчивое равновесие становится невозможным. Спустя короткое время после приложения напряжения температура в центре диэлектрика повышается настолько, что он проплавляется,

возникает хорошо проводящий канал между электродами (рис. 2.69), через который проходит очень большой ток. Напряженность поля, при которой наступает пробой диэлектрика, называется **пробивным напряжением**. Величину пробивного напряжения U_2 можно найти из графика рис. 2.68 по условию касания кривых теплоприхода и теплоотдачи.

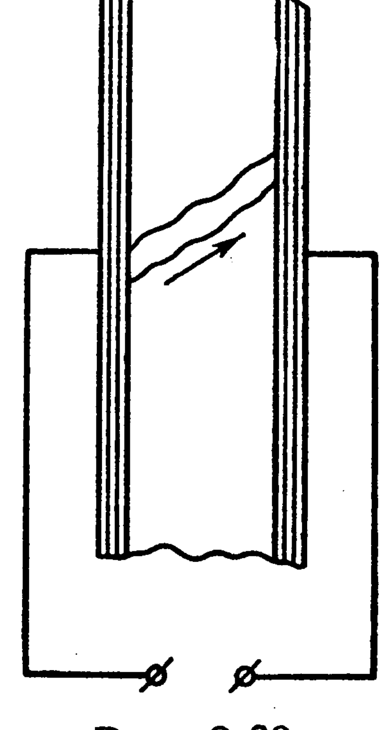


Рис. 2.69.

Для типовых изоляционных материалов, применяемых в технике, пробивные напряжения имеют порядок сотен *кв/см*. Для фарфора $E_{проб} \approx 90$—120 *кв/см*, для стекла $E_{проб} \approx 300$ *кв/см*, для слюды $E_{проб} \approx 500$ *кв/см*. Тепловой пробой имеет место и в таких жидких диэлектриках, как керосин или трансформаторное масло. Благодаря текучести жидкости в этом случае пробоя не остается проплавленного канала, как в твердых изоляторах.

При низких температурах и хорошем теплоотводе тепловой пробой твердых диэлектриков затруднен. В этом случае пробой наступает лишь в очень сильных электрических полях, порядка 10^3—10^4 *кв/см*, и носит чисто электрический характер (ударная ионизация электронами, срыв ионов из узлов решетки полем и т. п.).

§ 28. Полупроводники

Высокая концентрация свободных электронов в металлах обусловливает их хорошую проводимость и низкое удельное сопротивление $\varrho_{мет} \approx 10^{-8}$—$10^{-6}$ *ом·м*. В типичных изоляторах концентрация свободных зарядов ничтожно мала и удельное сопротивление достигает величин порядка $\varrho_{изол} \approx 10^8$—$10^{13}$ *ом·м*. За последние десятилетия привлекли внимание физиков и все шире внедряются в технику вещества с промежуточными свойствами — так называемые **полупроводники**, имеющие удельное сопротивление порядка $\varrho_{полупров} \approx 10^{-2}$—$10^6$ *ом·м*.

Необычайная чувствительность электропроводности полупроводников к ничтожным концентрациям различных примесей затрудняла исследование их свойств и потребовала разработки новой технологии изготовления веществ исключительно высокой чистоты. С другой стороны, строго дозированная добавка малых количеств примесей позволяет изготавливать полупроводники с практически любыми наперед заданными свойствами. Добавляя разные примеси в различные участки одного и того же кристалла, оказалось возможным получать полупроводники с внутренними контактными потенциалами на границах этих участков, обусловливающими одностороннюю проводимость подобных контактов. Так были созданы

полупроводниковые выпрямители и усилители, обладающие целым рядом преимуществ по сравнению с электронными лампами (малые габариты, ничтожная потребляемая мощность, прочность и долговечность).

Для понимания особенностей полупроводников, резкого различия свойств диэлектриков, полупроводников и металлов необходимо детальнее, чем это было сделано в § 21, разобраться в механизме возникновения зон, их возможных структурах и возможных поведениях электронов в этих зонах.

При объединении атомов вещества в кристалл валентные электроны коллективизируются, образуя единую систему. Электрическое поле образовавшейся ионной решетки периодично, как и положения ионов в ней. Как показывает теоретический анализ, отдельные электроны движутся в строго периодическом поле примерно так же, как движутся свободные электроны, т. е. сохраняя неизменной свою скорость (как уже указывалось, сопротивление проводника обусловливается нарушениями периодичности решетки, вызываемыми, в частности, тепловыми колебаниями ионов; о другой особенности движения электрона в периодическом поле, приводящей к необходимости введения понятия «эффективной массы», будет сказано дальше). Энергетически возможные состояния электронов образуют *разрешенные* зоны, отделенные друг от друга запрещенными зонами, охватывающими состояния, которые в данных условиях невозможны.

Напомним, что электроны подчиняются принципу Паули, так что каждое возможное состояние либо вакантно, либо занято одним и только одним электроном.

При коллективизации валентных электронов могут иметь место различные случаи:

1. В верхней из зон, в которой электроны имеются, *все уровни заняты*. Ширина ΔE запрещенной зоны, расположенной над этой занятой зоной, велика по сравнению с kT (рис. 2.70, *а*): $\Delta E \gg kT$.

В этом случае изменение состояний электронов при относительно малых воздействиях на них невозможно: свободные разрешенные состояния слишком далеки. Под действием не слишком сильного электрического поля ток не возникнет. Это — *диэлектрик*.

2. В верхней зоне занята лишь часть уровней, при обычных температурах — нижняя. Электроны, расположенные вблизи вакантных уровней, могут легко переходить на них. Вещество проводит электрический ток. Это — *металл*.

Частично заполненная верхняя зона может образовываться в двух случаях*).

*) Подробнее об этом см. т. III, конец гл. XV.

В простейшем случае число электронов, входящих в верхнюю зону, меньше числа уровней в ней. Это имеет место, например, для одновалентных металлов, у которых число возможных уровней ровно вдвое больше числа заполняющих эти уровни электронов (рис. 2.70, *б*). Совершенно иная картина имеет место для таких металлов, как кальций, кадмий, цинк. Подсчет показывает, что у этих металлов число электронов, образующих верхнюю зону, в точности равно числу уровней в ней. Однако у этих веществ верхняя граница заполненной зоны оказывается выше нижней границы следующей за ней разрешенной зоны. Щели между заполненными и вакантными разрешенными состояниями нет; более того, зоны частично перекрываются. Проводимость возможна, это — металлы с перекрывающимися зонами. На рис. 2.70, *в* уровни «вакантной зоны», перекрывающиеся с уровнями заполненной, показаны слева от оси *E*. Об особенностях проводимости в этих случаях будет сказано дальше.

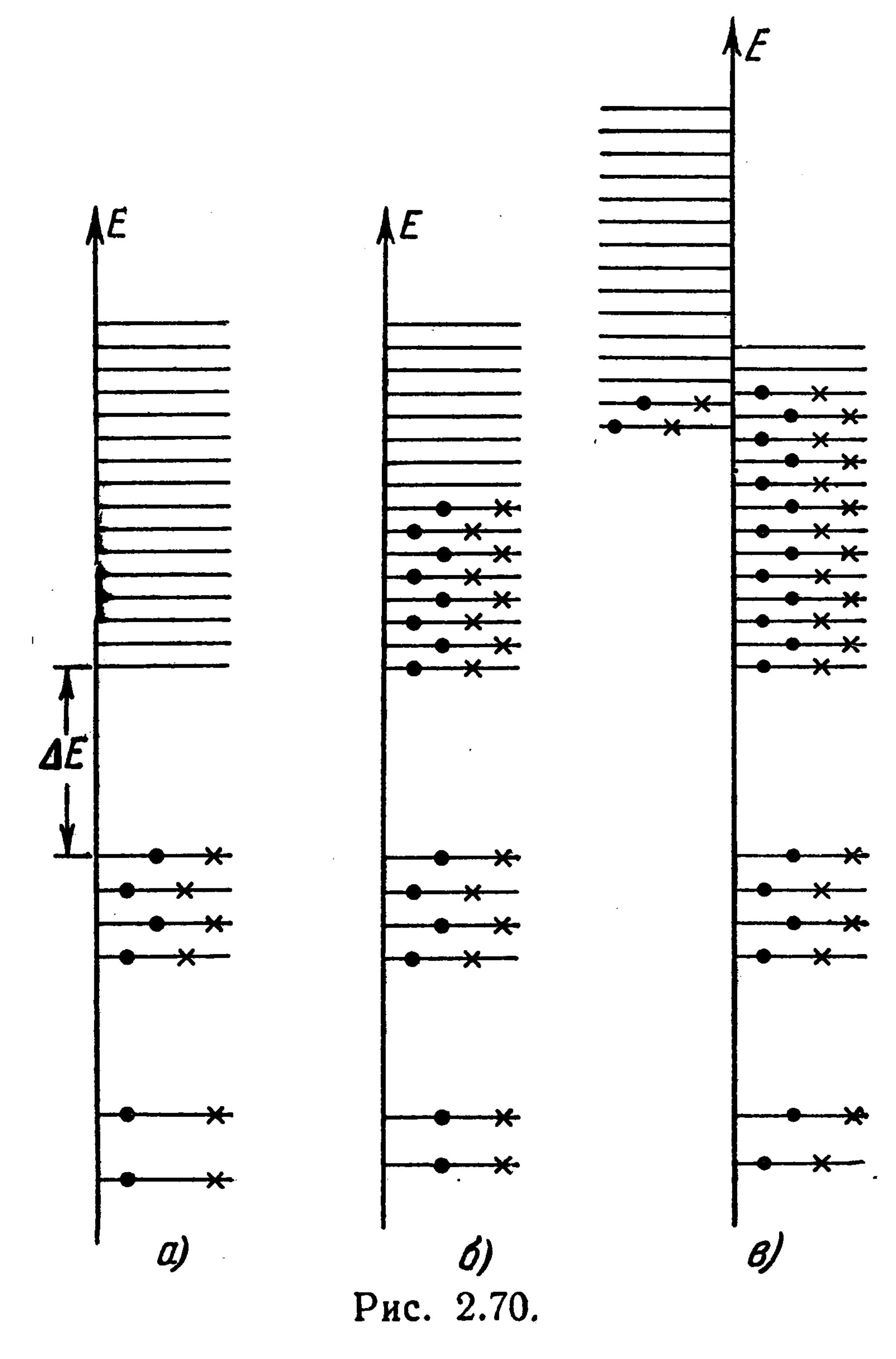


Рис. 2.70.

3. Та же картина уровней, что и в диэлектрике, но при узкой запрещенной зоне. Это — полупроводник. Так, для таких типичных полупроводников, как германий, $\Delta E = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ *эрг* (при $T = 0°$ K), кремния — $\Delta E = 1{,}9 \cdot 10^{-12}$ *эрг* (также $T = 0°$ K). Эти величины превышают kT (при $T \sim 300°$ K) в несколько десятков раз.

При такой ширине запрещенной зоны уже при комнатной температуре некоторое, относительно очень небольшое число электронов переходит из заполненной зоны на уровни верхней, вакантной. В этих условиях полупроводник уже будет проводить электрический ток. Естественно, что число электронов, носителей тока, очень заметно зависит от температуры вещества, резко возрастая с ростом *T*.

В металлах концентрация свободных электронов практически постоянна, а их подвижность падает с ростом температуры, так что электрическое сопротивление металлов при этом медленно повышается (см. §§ 15 и 21). В полупроводниках же рост температуры сопровождается быстрым увеличением числа электронов в верхней зоне и, следовательно, сильным уменьшением электрического сопротивления, аналогичным случаю диэлектриков (см. § 27 и рис. 2.67).

Сравнительно невысокое (по отношению к диэлектрикам) электрическое сопротивление полупроводников позволяет включать их в электрическую цепь и использовать в качестве термосопротивлений в различных управляющих реле и для создания весьма чувствительных и малоинерционных электрических термометров. Определение температуры при этом сводится к измерению электрического сопротивления маленького кристалла полупроводника (или тока в цепи). Линейные размеры применяемых кристаллов составляют доли миллиметра, масса, а значит, и теплоемкость кристалла малы, и поэтому его температура весьма быстро сравнивается с температурой измеряемой среды. Точность таких измерений, достигающая тысячных долей градуса, обусловлена тем, что у некоторых полупроводников изменение температуры на 1° С приводит к изменению электрического сопротивления на 2—3%, и, следовательно, ничтожное изменение температуры приводит к измеримому изменению сопротивления.

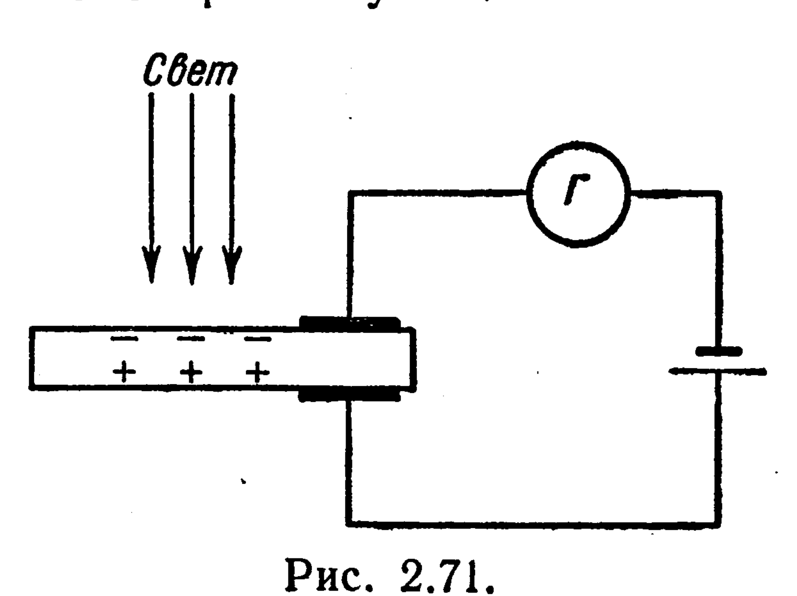


Рис. 2.71.

Благодаря сравнительно небольшой величине энергии ΔE, необходимой для выбрасывания электрона в зону проводимости, сопротивление ряда полупроводников чувствительно к освещению видимым светом. Если, как показано на рис. 2.71, направить свет на один конец полупроводника, то выброшенные светом в зону проводимости электроны будут диффундировать через весь кристалл, и произойдет уменьшение удельного сопротивления во всех точках полупроводника, а не только в том конце, который был освещен. Включая в цепь последовательно батарею и гальванометр, мы установим резкое возрастание тока в цепи при освещении полупроводника. Подобные **фотосопротивления**, электрическое сопротивление которых зависит от их освещенности, теперь применяются в качестве фотореле в различных схемах автоматического управления.

Существенным отличием от металлов, предопределяющим совершенно исключительные возможности технического использования

полупроводников, является двойственная природа носителей заряда в полупроводниках. Выбрасывание электрона из валентной зоны в зону проводимости означает не только появление электрона, способного реализовать прохождение тока в веществе. Такой переход означает также появление дырки в ранее заполненной зоне, т. е. вакантного места, на которое могут теперь переходить другие электроны заполненной зоны. Недостаток в данном месте одного элементарного электрического заряда эквивалентен наличию равного

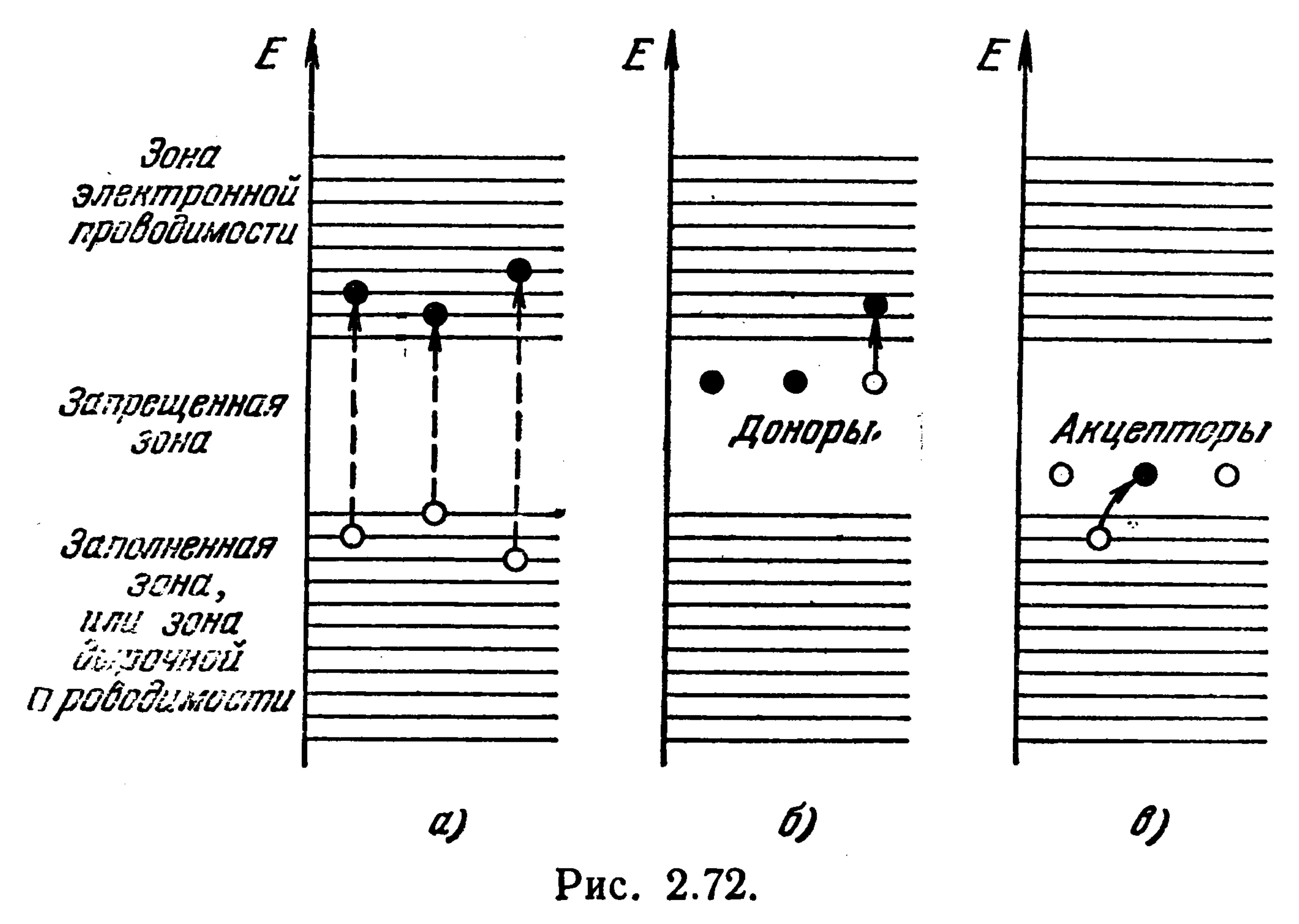


Рис. 2.72.

по величине избыточного положительного заряда. При возникновении электрического поля в движение придут не только отрицательно заряженные электроны зоны проводимости, но и дырки, которые начнут перемещаться, как положительно заряженные частицы. Электроны будут испытывать ускорение против поля, дырки — по полю. В результате ток будет обеспечиваться движением как электронов проводимости, так и дырок. Эти токи называются соответственно электронным и дырочным.

На рисунке 2.72, *а* показан механизм возникновения проводимости в полупроводнике. За счет энергии теплового движения ионной решетки или энергии поглощенного излучения некоторое число электронов преодолевает запрещенную зону, переходя из заполненной зоны в верхнюю разрешенную (пунктирные стрелки). Эти электроны могут реализовать обычный для металлов электронный ток проводимости. Вот почему верхняя зона называется зоной электронной проводимости.

В нижней зоне, которая была прежде полностью укомплектована (все состояния были заняты), теперь появились незанятые состояния — дырки, число которых в точности равно числу электронов,

перешедших в верхнюю зону. Наличие дырок — вакантных состояний означает для других электронов зоны возможность менять свое состояние, в конечном итоге — участвовать в механизме проводимости. В соответствии с этим рассматриваемую зону можно назвать зоной дырочной проводимости. Механизм дырочной проводимости столь существен, что нам хотелось бы, чтобы читатель ясно представил себе его природу.

Мы говорили уже о том, что отсутствие отрицательного заряда — дырку — можно формально описать как наличие добавочного положительного заряда. Очевидно, однако, что движение дырки есть результат коллективного движения электронов зоны дырочной проводимости. Приведем простой механический пример.

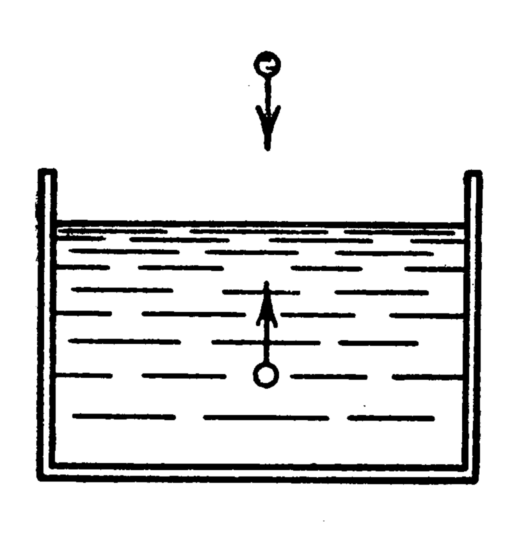


Рис. 2.73.

Заменим в сосуде с водой каплю воды, поднятую вверх пузырьком воздуха (рис. 2.73). Пузырек воздуха это «дырка» в распределении капель воды ниже уровня поверхности жидкости. В поле тяжести все капельки жидкости испытывают силу, направленную вниз. В рассматриваемом случае движение вниз (по полю) реализуется в результате действия двух механизмов. Поднятая над поверхностью жидкости капелька падает вниз (по полю!). Пузырек воздуха в жидкости движется вверх (против поля!). Но совершенно очевидно, что движение пузырька вверх есть не что иное, как результат коллективного движения капель жидкости вниз. Оба механизма приводят к движению капель жидкости вниз. Но второй механизм выглядит как движение пузырька, который может быть описан как особая капля, обладающая отрицательной массой — движущаяся против поля тяжести. Модель, конечно, груба, но должна помочь воображению. Наличие вакансий в почти полностью заполненной зоне позволяет электронам этой зоны менять свои состояния, приобрести некоторую «подвижность». При этом одни вакантные состояния замещаются, другие — освобождаются: происходит перемещение дырки, которая может быть описана как квазичастица с зарядом, обратным заряду электрона.

Время жизни носителей тока в полупроводниках — электронов и дырок ограничено. Из зоны электронной проводимости электроны могут возвращаться на вакантные уровни нижней зоны (переходы, обратные по отношению к показанным на рис. 2.70, *а*). Такая рекомбинация электрона и дырки приводит к исчезновению обоих носителей тока. Среднее время жизни свободных носителей тока зависит от многих причин. При данных условиях постоянная концентрация носителей есть результат динамического равновесия: число образующихся пар носителей равно числу рекомбинирующих пар.

Ранее указывалось, что перемещение электрона в периодическом поле решетки напоминает движение свободного электрона. Одно из существенных отличий состоит в следующем. При движении свободного электрона его ускорение равно силе, деленной на массу. Взаимодействие электрона с решеткой приводит к тому, что отношения между силой и ускорением электрона меняются. Эффект можно описать, считая, что масса электрона равна некоторой «эффективной» массе. К сожалению, даже для данного вещества нельзя точно ввести определенную эффективную массу электрона: эта формально вводимая величина зависит не только от структуры решетки, но и от кинетической энергии электрона. Этим, когда возможно, пренебрегают, вводя в рассмотрение среднее значение эффективной массы. Для германия эта величина составляет примерно $^1/_4$ от истинной массы электрона. Дырке также сопоставляется эффективная масса, которая, как и для электрона, может меняться в широких пределах. Дырку можно также рассматривать как электрон с отрицательной эффективной массой.

Важной характеристикой электронов и дырок, как носителей тока, является их подвижность (см. также § 24) — средняя скорость перемещения, или скорость дрейфа, в электрическом поле с единичной напряженностью (один вольт на метр). Эта величина составляет для электронов и дырок в германии соответственно 0,38 и 0,18 *м²/в·сек*. Для кремния соответственно 0,13 и 0,05 *м²/в·сек*.

До сих пор мы рассматривали полупроводники, образованные одинаковыми атомами. Эти чистые полупроводники обладают, как мы видели, всегда равным числом электронов в зоне электронной проводимости и дырок. Обычно эти полупроводники называются полупроводниками с собственной проводимостью или собственными полупроводниками.

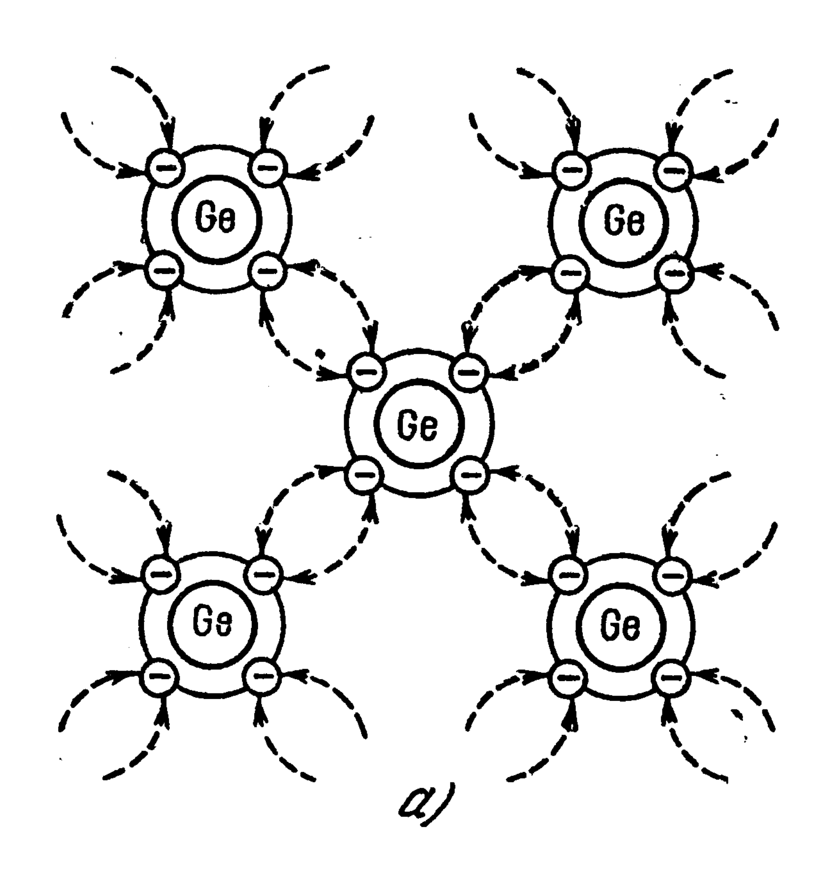
Особую роль в физике и технике играют, однако, так называемые примесные полупроводники. Ничтожные количества примесей резко меняют электрические свойства полупроводников. При этом примесью обычно для краткости называют не только наличие атомов других элементов, нарушающих правильность кристаллической решетки, но и любые ее нарушения: наличие атома того же элемента, находящегося не в узле, а в междоузлии решетки, либо отсутстие атома в узле. В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать нарушения решетки, обусловленные наличием реальных примесей — атомов других элементов.

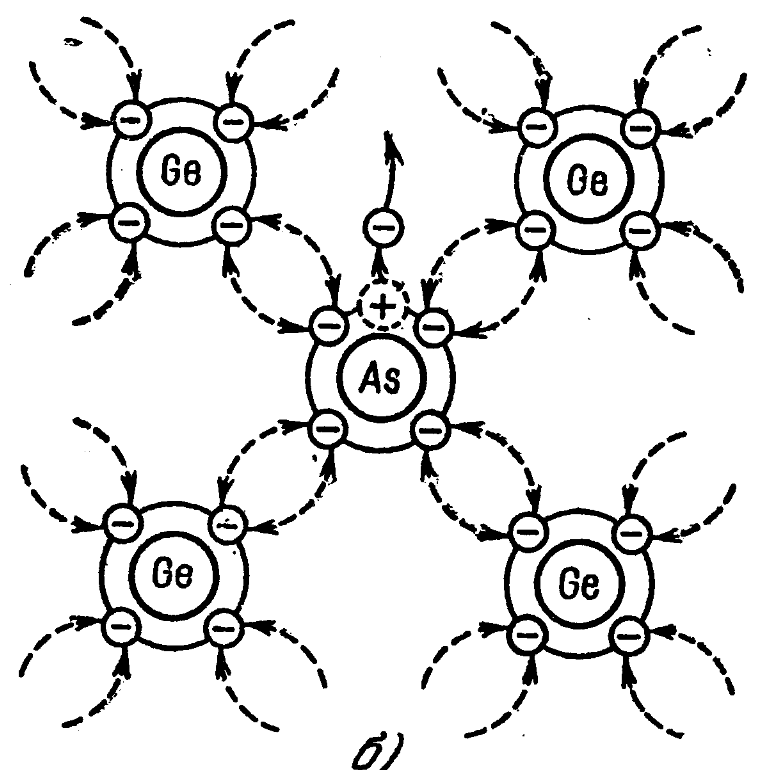
Наличие примесных атомов сказывается на поведении полупроводника двояко. Если, например, в кристаллической решетке чистого четырехвалентного полупроводника германия один из атомов заместить атомом пятивалентной сурьмы, то последний легко отдаст лишний пятый электрон. В той же решетке атом трехвалент-

ного индия, заместивший один из атомов германия, будет стремиться присоединить к себе четвертый электрон.

Примеси, отдающие электроны, называются **донорными**; примеси, стремящиеся присоединить к себе электроны, — **акцепторными**. Таким образом, атомы сурьмы в кристаллической решетке германия являются донорами, атомы индия — акцепторами.

Следующим весьма важным обстоятельством является тот факт, что наличие любых примесей с различной энергией связи валентных электронов (в том числе и простых искажений решетки) ведет к появлению отдельных разрешенных уровней в запрещенной зоне. Новые разрешенные уровни доноров и акцепторов могут располагаться в различных участках запрещенной зоны. Особенно резко меняются свойства полупроводника, если новые донорные уровни оказываются вблизи зоны проводимости (рис. 2. 72, *б*), либо акцепторные уровни — вблизи заполненной зоны (рис. 2.72, *в*). Рассмотрим оба этих весьма важных случая в отдельности.





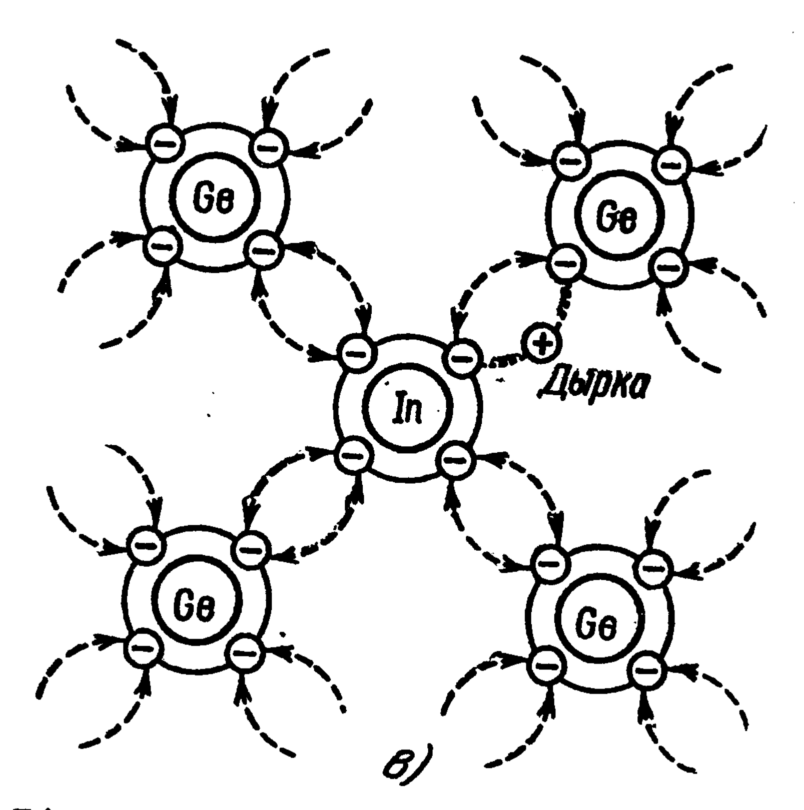


Рис. 2.74.

При донорных уровнях вблизи зоны электронной проводимости она обогащается электронами за счет атомов донора. Эти электроны обеспечивают хорошую электронную проводимость полупроводника. В то же время дырочная проводимость будет практически отсутствовать. Атом донора, отдав лишний (в структуре решетки) элект-

рон, становится положительным ионом. Но этот последний не способен перемещаться и не может участвовать в проводимости. Более того, дырочная проводимость, которая имела бы место при отсутствии доноров, снизится, поскольку избыточные электроны будут частично рекомбинировать с дырками, уменьшая тем самым их число.

Таким образом, при наличии донорной примеси, которой отвечают добавочные разрешенные уровни вблизи зоны проводимости, полупроводник приобретает в основном электронную проводимость.

Рассмотрим конкретный пример. На рис. 2.74, *а* изображена плоская схема кристалла германия. Германий четырехвалентен. Это значит, что во внешней оболочке его атомов имеются четыре слабо связанных электрона, которые осуществляют связь между данным и соседними атомами. На схеме эти связи показаны пунктирными стрелками.

Заместим теперь один из атомов германия каким-нибудь пятивалентным атомом (сурьма, мышьяк). Из пяти электронов внешней оболочки атома примеси четыре будут вести себя, как электроны атома германия. Пятый же электрон окажется свободным. Таким образом, атом примеси превратится в положительный ион (рис. 2.74, *б*). При отсутствии добавочных взаимодействий свободный электрон будет удерживаться вблизи положительного иона. Однако их связь будет слаба, и под действием уже небольшого поля этот электрон сможет перемещаться против него, участвуя тем самым в электронной проводимости кристалла.

Во втором из рассматриваемых случаев картина оказывается обратной. На расположенные вблизи занятой зоны уровни акцепторов переходят электроны из заполненной зоны. Эти электроны, присоединившись к атомам акцептора, превращают их в отрицательные ионы. Таким образом, в этом случае «примерзают» к своим местам отрицательные заряды, не способные теперь участвовать в механизме проводимости тока. Но зато в заполненной зоне после перехода части электронов на акцепторные уровни остаются дырки. Ток в полупроводнике будет осуществляться главным образом за счет передвижения этих дырок. Таким образом, при наличии акцепторных уровней вблизи занятой зоны полупроводник обладает в основном дырочной проводимостью.

Пусть, например, в рассмотренную выше решетку германия введены атомы трехвалентного индия (рис. 2.74, *в*), во внешней оболочке которых имеются три электрона. Вследствие структуры решетки, атом индия должен будет стремиться к захвату еще одного электрона, которым может быть один из свободных электронов (по принятой выше терминологии—электрон из зоны электронной проводимости). Таким образом, электроны, которые при отсутствии примеси были бы свободны, «оседают» на атомах акцептора и подвижностью будут обладать главным образом дырки.

В зависимости от механизма проводимости мы будем называть такие полупроводники электронными или дырочными и обозначать соответственно буквами n (от слова «negativ», что означает отрицательный знак подвижного заряда) или p (от слова «positiv» — положительный).

В § 36 (пример 3) описан эффект Холла, с помощью которого можно определить экспериментально знак электрического заряда носителей в проводнике.

Относительное количество свободных электронов и дырок в собственном полупроводнике при любых реальных условиях весьма мало. Отсюда следует, что ничтожные примеси доноров или акцепторов (порядка миллионных долей) весьма сильно меняют электрические свойства полупроводников. Поэтому дозировка примесей при изготовлении полупроводников имеет решающее значение. Естественно, что дозировке должно предшествовать изготовление идеально чистых, лишенных примесей полупроводников. Обычными химическими методами достижение необходимой степени чистоты вещества невозможно. В настоящее время с помощью ряда физических методов достигают такой степени чистоты, что атом примеси приходится на 10^{15} и даже 10^{18} атомов полупроводника. Описание этих методов выходит за рамки нашего учебника.

Однако и при наличии активных примесей количество свободных носителей заряда в полупроводниках много меньше (в 10^{9} — 10^{5} раз), чем в металлах. Поэтому электрическое сопротивление полупроводников значительно выше, чем металлов.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств контактов полупроводников с различными механизмами проводимости, т. е. n- и p-полупроводников. Выше, в § 22, мы рассмотрели явления, происходящие при контакте двух металлов. Различие в верхней границе энергии электронов в металлах приводило к их перераспределению. При контакте происходил переход части электронов из одного металла в другой; потенциалы металлов менялись так, что верхний уровень энергии электронов оказывался одинаковым в обоих металлах. При этом существенно, что из-за высокой концентрации электронов необходимый скачок потенциала (контактная разность потенциалов) обеспечивается переходом малой части электронов через тончайший поверхностный слой соприкасающихся металлов.

В полупроводниках концентрация свободных зарядов мала; возникающие в месте контакта поля́ проникают в полупроводники на значительную глубину (до 10^{-5} *см*, т. е. в десятки раз большую, чем в металлах) и существенным образом перераспределяют свободные носители заряда в области контакта. Рассмотрим практически важный случай, когда контактный потенциал дырочного полупроводника выше, чем электронного. Это как раз имеет место

в случае контакта примесных полупроводников германий + индий (р-кристалл) и германий + мышьяк или сурьма (n-кристалл).

Область контакта окажется обедненной подвижными зарядами, например, в силу взаимного уничтожения встречающихся электронов и дырок. В области контакта в n-кристалле останутся ионы атомов донора, заряженные положительно, а в р-кристалле — ионы атомов акцептора, заряженные отрицательно. Эти объемные заряды ионов создадут поле, скачок потенциала которого показан условно батареей, нарисованной пунктиром (рис. 2.75). Поле в области контакта препятствует диффузии в нее с одной стороны подвижных дырок, а с другой — электронов.

Присоединим теперь к этому кристаллу стороннюю э. д. с. так, как это показано на рис. 2.76, *а*: минус — к n-кристаллу и плюс — к р-кристаллу. Внешнее поле будет уменьшать поле, созданное в области контакта, т. е. облегчит передвижение свободных носителей заряда в этой области. Ток через кристалл будет сравнительно большим. Переменим теперь полюсы внешней э. д. с. (рис. 2.76, *б*). В этом случае внешнее поле в области контакта действует так же, как и внутреннее, т. е. обедняет ее подвижными носителями заряда. Сопротивление этой области сильно возрастает, ток проводимости резко уменьшается. При данном напряжении внешнего источника э. д. с. прямой ток в десятки и сотни раз превышает обратный ток.

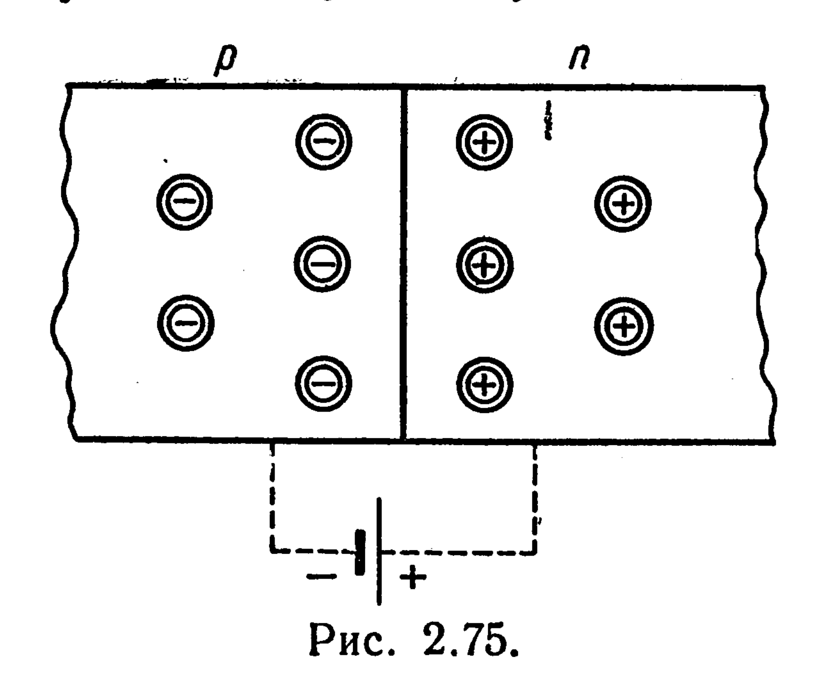


Рис. 2.75.

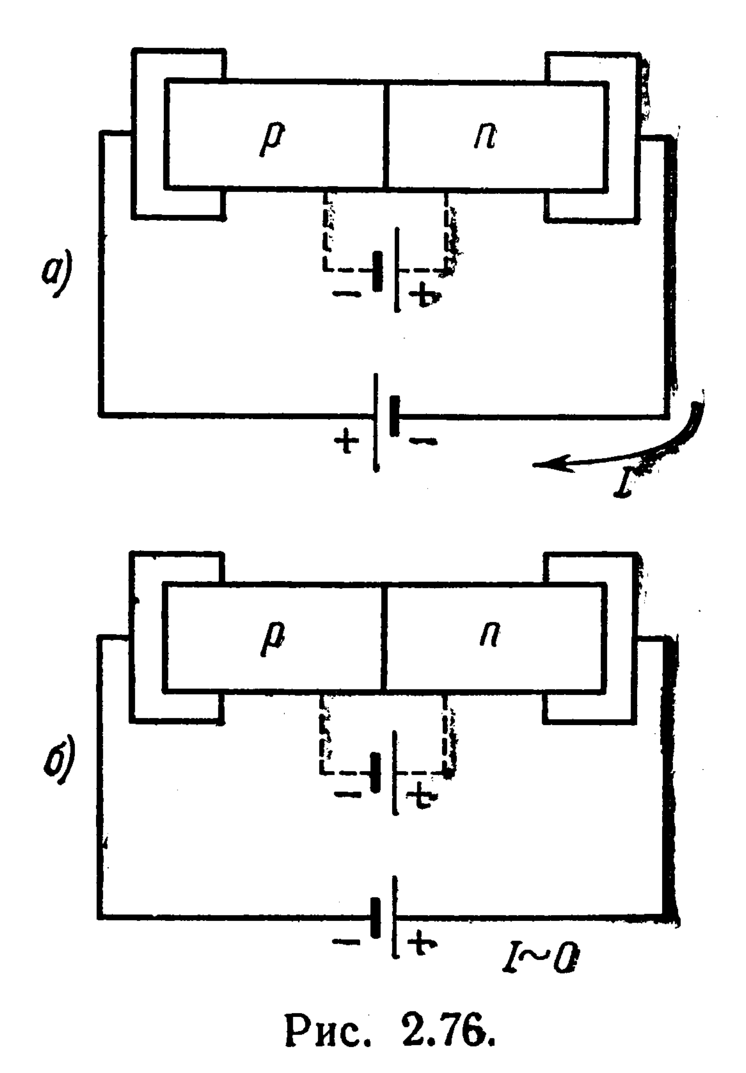


Рис. 2.76.

Приложим к нашему кристаллу с n — р-переходом переменную разность потенциалов U, меняющуюся со временем t по синусоидальному закону (рис. 2.77, *а*). Тогда в течение положительного полупериода, когда напряжение достигает максимальной величины $+U_{макс}$, в цепи будет идти сильный ток с наибольшим значением $I_{макс}$.

В отрицательном же полупериоде при $U = -U_{макс}$ имеем

$$i = -I_{мин}, \quad \text{где } I_{мин} \ll I_{макс}. \tag{28.1}$$

В результате в цепи пойдет почти выпрямленный ток, как показано на рис. 2.77, *б*, и полупроводник будет служить выпрямителем аналогично диоду (см. § 23).

При наличии контакта полупроводников различного типа друг с другом или с проводником в цепи возникают такие же термоэлектрические явления, как и при контакте различных металлов (см. § 22). Однако порядок величины этих эффектов в полупроводниках значительно выше. Дело в том, что в полупроводнике движущийся электрон переносит и может передавать ионам решетки не только энергию своего теплового движения, имеющую порядок kT, но и во много раз большую энергию «диссоциации» $\Delta\varepsilon$, которая может выделиться при рекомбинации его с дыркой. Поэтому коэффициент пропорциональности β_1 между потоком тепла и током зарядов в полупроводниках значительно выше, чем в металлах. Отсюда вытекает, что коэффициенты Пельтье $\Pi_{1,2} = \beta_1 - \beta_2$ и термоэдс $e_{1,2} = \frac{\Pi_{1,2}}{T}$ у полупроводников значительно больше, чем у металлов.

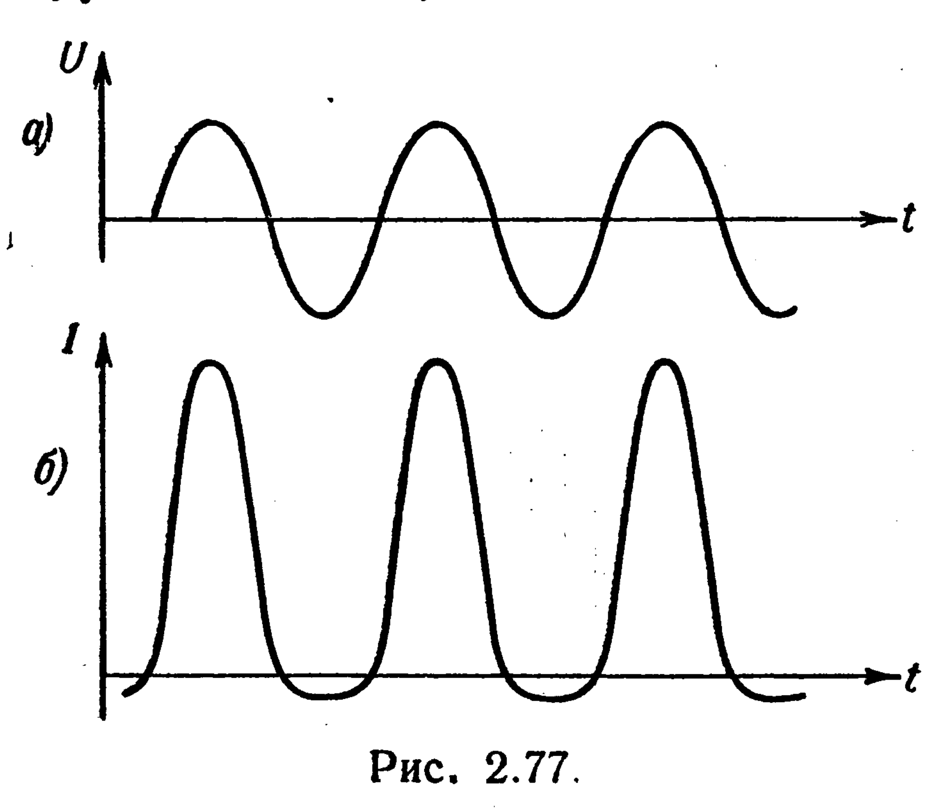


Рис. 2.77.

Полупроводниковые термоэлементы обладают в сотни раз большей чувствительностью, чем металлические термопары, и значительно большим к. п. д. преобразования тепловой энергии в электрическую. Составленные из них термобатареи могут стать весьма удобной «машиной» для получения электричества за счет тепла, машиной, отличающейся от других полным отсутствием движущихся частей. Например, небольшие полупроводниковые термогенераторы, изготовленные в виде абажуров, дают за счет тепла керосиновой лампы ток для питания лампового радиоприемника.

В СССР впервые в мире построен электрический генератор «Ромашка», который с помощью термоэлементов непосредственно превращает тепло, выделяемое при реакции деления атомных ядер («атомную энергию» — см. т. III, ч. III) в электрическую энергию.

Особенно широкие перспективы применения полупроводников в радиотехнике возникли после создания полупроводниковых усилителей (т р а н з и с т о р о в). Для уяснения принципа работы транзисторов

представим себе германиевый кристалл с двумя внутренними переходами p—n—p-типа. На рис. 2.78 изображена принципиальная схема получения такого кристалла. На пластинку германия n-типа помещают с двух сторон кусочки индия и нагревают до расплавления последнего. При этом атомы индия диффундируют внутрь пластинки, создавая с обеих ее сторон области с проводимостью p-типа. Центральная часть полученного кристалла называется основанием или базой транзистора.

Включим между основанием и обоими участками p-типа две батареи в противоположных направлениях, как это показано на

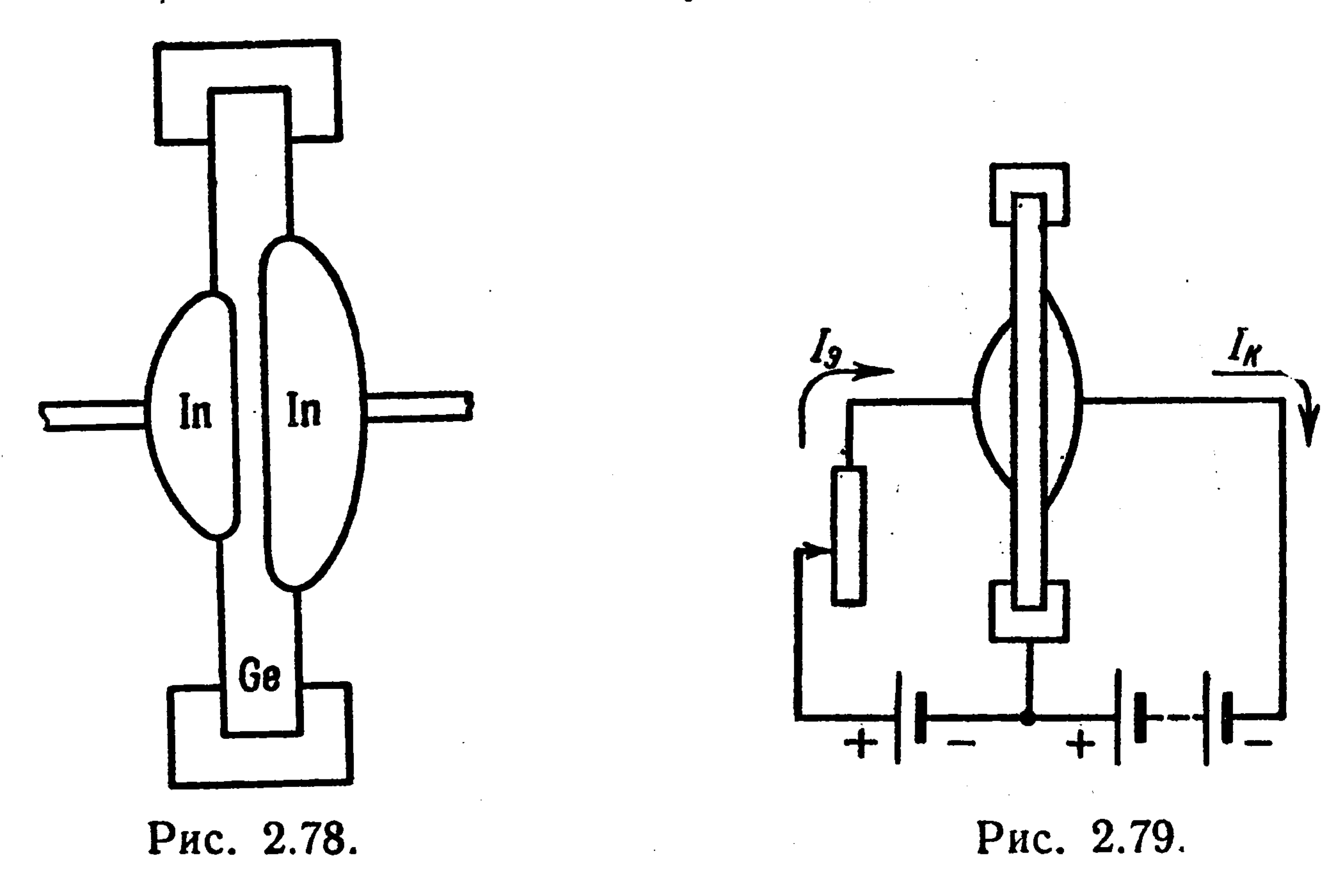


Рис. 2.78. Рис. 2.79.

рис. 2.79. Левая батарея включена в пропускном направлении p—n-перехода, и от эмиттера к базе идет ток $I_э$ при сравнительно низком сопротивлении r_{11}. Правая батарея включена в запорном направлении n—p-перехода, и от базы к коллектору идет ток $I_к$ при высоком сопротивлении переходного участка $r_{22} \gg r_{11}$.

Увеличим теперь ток эмиттера на некоторую величину $\Delta I_э$. При этом из эмиттера в базу будет поступать дополнительное количество дырок. Диффундируя к коллектору, эти дырки подхватываются полем батареи коллектора, и ток в цепи коллектора увеличивается на некоторую величину $\Delta I_к$, по порядку величины близкую к $\Delta I_э$. Изменения токов связаны с изменением напряжений по закону Ома; отношение

$$\alpha = \frac{\Delta U_к}{\Delta U_э} = \frac{r_{22}\Delta I_к}{r_{11}\Delta I_э} \gg 1 \qquad (28.2)$$

называется коэффициентом усиления транзистора по напряжению. Как видно из (28.2), этот коэффициент может быть достаточно большим, и, следовательно, небольшие изменения

напряжения в цепи эмиттера $\Delta U_э$ смогут вызывать большие изменения напряжения $\Delta U_к$ в цепи коллектора, аналогично тому, как это происходит в триоде (см. § 23). Роль управляющей сетки в данном случае играет левый электрод—эмиттер.

По сравнению с электронными лампами кристаллические полупроводниковые выпрямители и усилители имеют ряд преимуществ. Они малогабаритны, не имеют хрупких стеклянных частей и не нуждаются в затрате электрической энергии на нагрев катода. Они всегда готовы к работе, в отличие от электронных ламп, у которых предварительный разогрев требует нескольких минут. Недостатком транзисторов является сильная температурная зависимость их электрических характеристик. При перегреве полупроводника в нем возникает столь большое количество носителей электрического тока (электронов и дырок), что полупроводник становится проводником и теряет свои ценные свойства.

ЧАСТЬ III
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ГЛАВА VII
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ

§ 29. Развитие представлений о природе магнетизма

Магнитные свойства постоянных магнитов, их способность притягивать железные предметы были известны еще древним грекам. Земля также является магнитом, и явления земного магнетизма были использованы китайцами для создания компаса, т. е. свободно вращающейся магнитной стрелки, указывающей ориентацию стран света.

В пространстве, окружающем намагниченные тела, возникает магнитное поле. Помещенная в это поле маленькая магнитная стрелка устанавливается в каждой его точке вполне определенным образом, указывая тем самым направление поля. Тот конец стрелки, который в магнитном поле Земли указывает на север, называется северным, а противоположный конец— южным. При отклонении стрелки от направления магнитного поля на стрелку действует механический крутящий момент $\mathbf{M}_{кр}$, пропорциональный синусу угла отклонения α и стремящийся повернуть ее вдоль указанного направления (рис. 3.1).

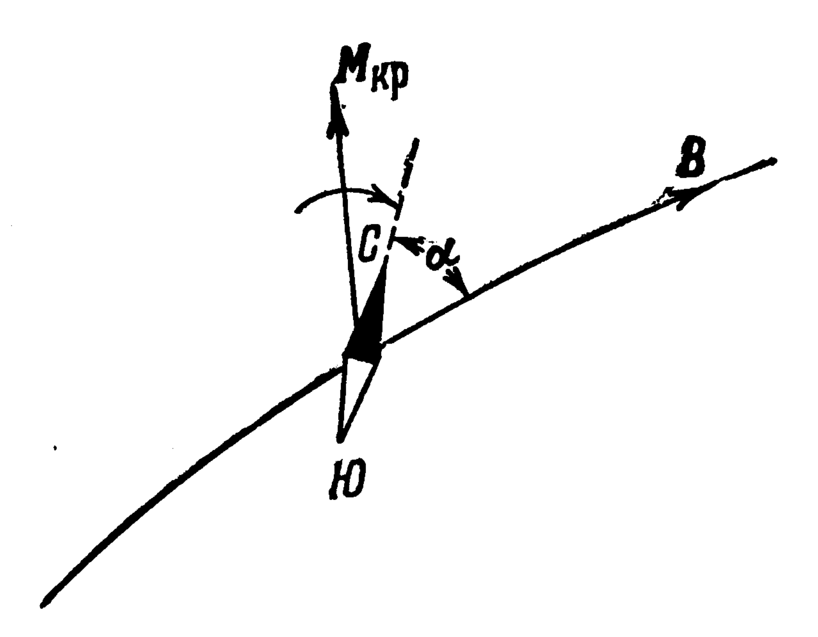


Рис. 3.1.

Как мы видим, взаимодействие постоянных магнитов отличается от взаимодействия электрических зарядов, но сходно с взаимодействием электрических диполей, испытывающих в однородном электрическом поле результирующий момент сил, но не силу (гл. III, § 10). Подобно электрическому диполю, постоянный магнит в однородном магнитном поле стремится повернуться по полю, но не перемещается в нем.

Существенное отличие постоянных магнитов от электрических диполей заключается в следующем. Электрический диполь всегда состоит из зарядов, равных по величине и противоположных по знаку. Эти заряды можно отделить друг от друга и расположить на различных телах, например, разрезав диполь пополам по плоскости, перпендикулярной к оси диполя. Постоянный же магнит, будучи разрезан таким образом пополам, превращается, как показано на рис. 3.2, в два меньших магнита, каждый из которых имеет и северный и южный полюсы. Никакое деление не дает возможности получить отдельно источники северного и южного магнетизма — магнитные заряды. Причина этого состоит в том, что «магнитных зарядов» (или, как иногда неточно говорят, «магнитных масс») в природе не существует.

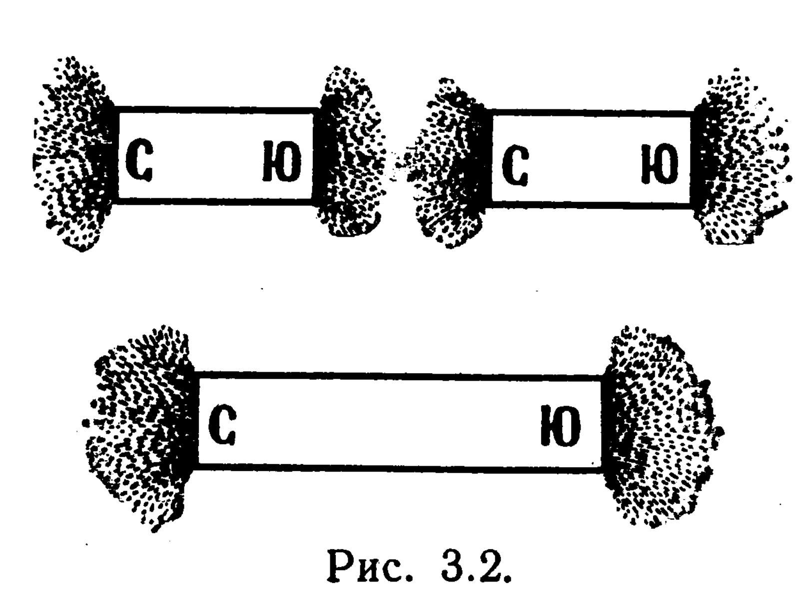


Рис. 3.2.

Подводя итоги сведениям о магнетизме, накопленным к 1600 г., Гильберт высказал мнение, что, несмотря на некоторое внешнее сходство, природа электрических и магнитных явлений различна. Все же к середине XVIII века окрепло убеждение о наличии тесной связи между электрическими и магнитными явлениями. Однако природа этой связи тогда установлена быть не могла из-за отсутствия достаточно мощных источников тока.

В 1820 г. Эрстед открыл явление отклонения магнитной стрелки гальваническим током и тем самым сделал первый существенный шаг в выяснении характера связи электрических и магнитных явлений. Затем Гей-Люссак и Араго наблюдали намагничение железа постоянным током, идущим в проводнике. Ампер обнаружил притяжение между проводами, по которым проходят параллельные токи, и отталкивание между противоположно направленными токами. Им же была выдвинута гипотеза о том, что свойства постоянных магнитов обусловлены циркулирующими в их толще постоянными круговыми токами (м о л е к у л я р н ы м и токами).

Многочисленные последующие опыты показали, что *магнитное поле тесно связано с электрическим током.* Электрический ток порождает в пространстве вокруг себя магнитное поле, а проходя в магнитном поле другого тока, испытывает со стороны последнего механические воздействия.

Поскольку электрический ток представляет собой поток движущихся заряженных частиц, то сказанное означает, что *магнитное поле порождается движущимися зарядами и что другие движущиеся заряды испытывают в этом поле механические силы.* Покоящиеся заряды взаимодействуют по закону Кулона (1.3.). Это

взаимодействие сохраняется и при любом движении зарядов. Но в случае движения зарядов возникает дополнительное магнитное поле, обусловливающее появление добавочного, магнитного взаимодействия.

Однако начинать изучение магнитного поля с рассмотрения взаимодействия отдельных движущихся зарядов было бы слишком сложно. Поле отдельно взятого движущегося заряда состоит из электрического и магнитного полей, причем оба поля определяются положением заряда в пространстве, а значит, — для движущегося заряда — зависят от времени.

Значительно проще обстоит дело в случае электрических токов в проводах. При прохождении постоянного тока в линейном проводнике последний в целом остается нейтральным, так что электрическое поле вне проводников практически отсутствует, и мы имеем возможность изучать магнитное поле в чистом виде. Кроме того, это поле в случае постоянного тока не будет зависеть от времени: каждый из движущихся в проводнике зарядов дает свой переменный вклад в общее магнитное поле, но поток заряженных частиц в каждом участке проводника не меняется со временем.

При этом, однако, возникает следующая трудность. Контур с постоянным током всегда замкнут. Очевидно, что магнитное поле контура с током зависит от его размеров и формы. От этих же величин зависит и механическое воздействие, испытываемое контуром с током, помещенным во внешнее магнитное поле.

В электростатике подобного рода трудность не имеет места; любое распределение зарядов можно рассматривать как систему точечных зарядов, взаимодействие которых легко может быть изучено. В случае магнитного поля токов этого сделать нельзя: реально неосуществим бесконечно малый отрезок постоянного тока.

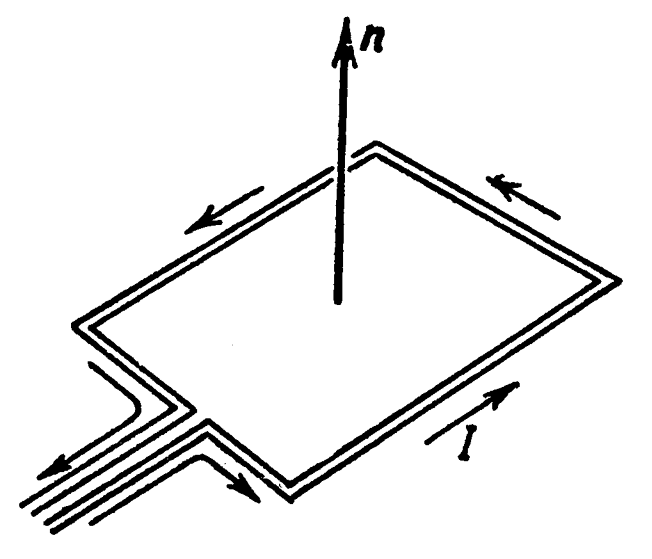


Рис. 3.3.

Для непосредственного измерения механических воздействий в магнитном поле пробный элементарный ток целесообразно выбрать не в виде отрезка проводника с током, а в виде самостоятельного замкнутого тока — плоской рамки площадью S, обтекаемой постоянным током I. В качестве положительной нормали, или, для краткости, просто нормали, к поверхности рамки выберем нормаль, связанную с током I правилом правого винта. На рис. 3.3 изображена пробная рамка с током и единичный вектор нормали $\mathbf{n}$. Как следует из опыта, в однородном магнитном поле рамка с током не перемещается в пространстве, а лишь поворачивается, т. е. на нее

действует некоторый крутящий момент сил $\mathbf{M}_{кр}$. Рамка находится в равновесии (устойчивом), если направление ее нормали $\mathbf{n}$ совпадает с направлением магнитной стрелки (от южного полюса к северному), помещенной в то же место магнитного поля (см. рис. 3.4).

Магнитное поле будем характеризовать с помощью вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. За направление $\mathbf{B}$ в данной точке примем в соответствии со сказанным выше направление вектора нормали $\mathbf{n}$ к поверхности элементарного контура с током, установившегося в положении равновесия (устойчивого) в этой точке поля. Как и в случае электрического поля, мы можем ввести для наглядности линии индукции магнитного поля. Эти линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением

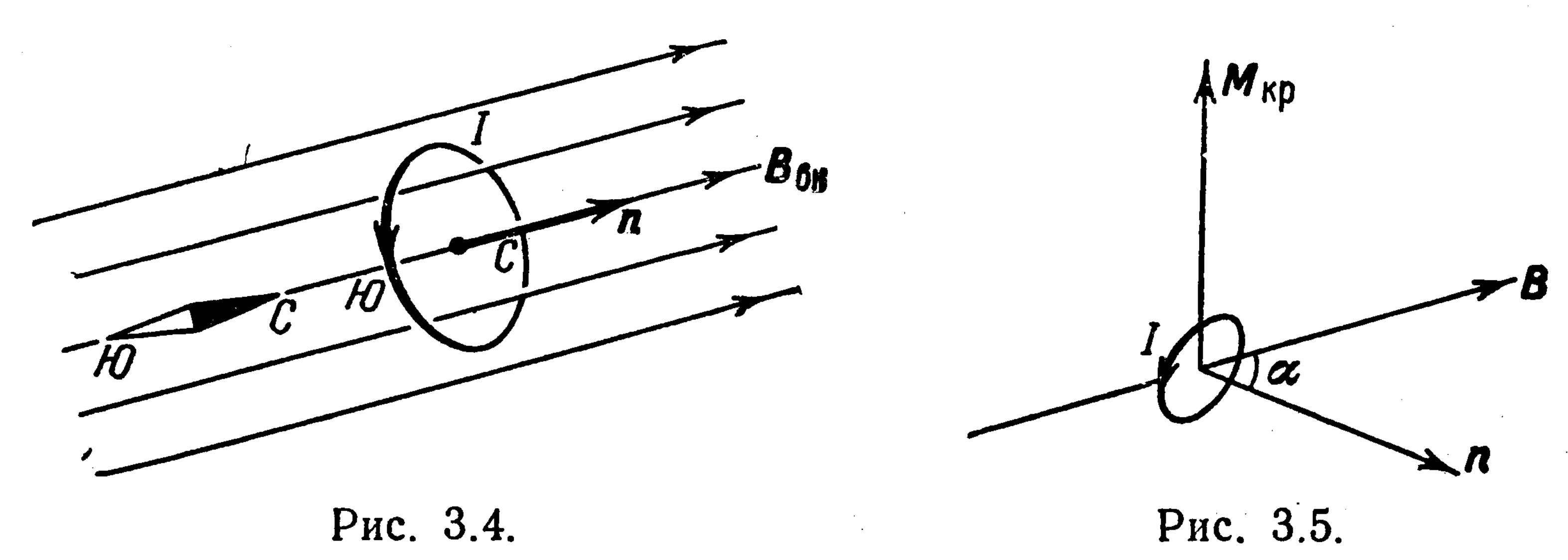


Рис. 3.4. Рис. 3.5.

вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ в этой точке, изображены на том же рис. 3.4. О величине вектора магнитной индукции B мы будем судить по величине крутящего момента, испытываемого пробной рамкой при ее повороте в магнитном поле, и определим B как величину, прямо пропорциональную этому моменту:

$$B \sim M_{кр}. \qquad (29.1)$$

Опыт показывает, что в данной точке поля *крутящий момент, действующий на рамку, прямо пропорционален ее площади* S (независимо от формы рамки), *току* I *и синусу угла* α *между направлением вектора индукции* $\mathbf{B}$ *и нормалью к поверхности рамки* $\mathbf{n}$:

$$M_{кр} \sim IS \sin \alpha. \qquad (29.2)$$

Вводя обычным образом коэффициент пропорциональности k', численное значение которого определяется выбором системы единиц, можно объединить соотношения (29.1) и (29.2) в одно:

$$M_{кр} = k' ISB \sin \alpha. \qquad (29.3)$$

Крутящий момент есть вектор. Этот вектор $\mathbf{M}_{кр}$ перпендикулярен к плоскости вращения, проходящей через векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$, как показано на рис. 3.5, так что векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{M}_{кр}$ образуют правую систему координат. Так как абсолютная величина векторного

произведения $[\mathbf{n}\times\mathbf{B}]$ равна $|[\mathbf{n}\times\mathbf{B}]| = 1\cdot B\sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{B}}) = B\sin\alpha$, то соотношение (29.3) в векторной форме примет вид

$$\mathbf{M}_{\text{кр}} = k'IS[\mathbf{n}\times\mathbf{B}] = [k'IS\mathbf{n}\times\mathbf{B}]. \qquad (29.4)$$

Сопоставляя (29.3) и (29.4) с формулой (10.2), мы видим, что величина $IS\mathbf{n}$ играет ту же роль, что и вектор момента электрического диполя в однородном электрическом поле. Обозначим эту величину через $\mathbf{p}_m$ и назовем ее по аналогии магнитным моментом контура с током:

$$\mathbf{p}_m = k'IS\mathbf{n} = p_m\mathbf{n}. \qquad (29.5)$$

Тогда выражение (29.4) для крутящего момента, действующего на контур с током в магнитном поле, примет вид

$$\mathbf{M}_{\text{кр}} = [\mathbf{p}_m\times\mathbf{B}], \qquad (29.6)$$

так что для модуля $M_{\text{кр}}$ имеем

$$M_{\text{кр}} = p_m B\sin(\widehat{\mathbf{p}_m, \mathbf{B}}). \qquad (29.7)$$

Соотношение (29.6) позволяет определить величину вектора магнитной индукции B в данной точке. Если поместить в эту точку элементарную рамку с единичным магнитным моментом $p_m = 1$ и повернуть ее плоскость вдоль линий поля так, чтобы угол $(\widehat{\mathbf{p}_m, \mathbf{B}}) = \alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$, то $B = M_{\text{кр}}$.

Таким образом, располагая пробной рамкой с известным магнитным моментом $\mathbf{p}_m$, мы можем изучать различные магнитные поля. Единственное условие состоит в том, что поверхность рамки должна быть настолько малой, чтобы поле в области рамки было практически однородно, т. е. вектор **B** был бы одинаковым во всех точках на поверхности рамки.

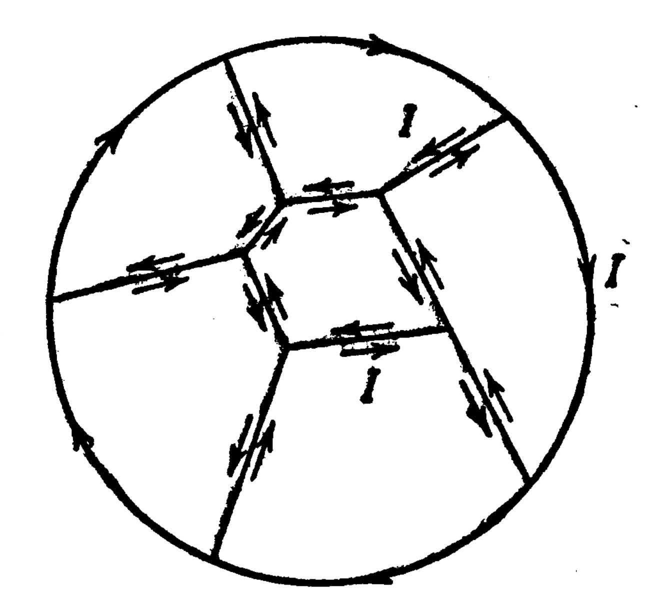


Рис. 3.6.

Если контур с током достаточно велик, то уже нельзя считать магнитное поле внутри контура однородным и применять к нему формулы (29.3)—(29.7). Для нахождения воздействия магнитного поля на такой контур следует мысленно расчленить его на совокупность большого числа бесконечно малых контуров с тем же током I, как это показано на рис. 3.6. Как видно из рисунка, токи на соприкасающихся границах выделенных внутренних контуров взаимно уничтожаются, так что суммарный ток не отличается от исходного. Внутри каждого из этих элементарных контуров можно считать магнитное поле практически однородным и вычислять $M_{\text{кр}}$

по приведенным выше формулам. Механическое действие магнитного поля на весь контур определится тогда сложением механических воздействий на каждый из элементарных контуров.

Помимо макроскопических токов, идущих в проводниках, в любом теле существуют микроскопические токи, создаваемые движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях внешних токов. Если возле какого-либо тела поместить проводник с током (макроток), создающий вокруг себя магнитное поле, то под действием этого поля микроскопические токи во всех атомах будут определенным образом поворачиваться и создадут в теле дополнительное поле. Таким образом, вектор магнитной индукции **B** характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками. При одном и том же токе I в проводе и прочих равных условиях величина вектора **B** в различных средах будет иметь разные значения.

Для характеристики магнитного поля, создаваемого самим макротоком, введем вспомогательное понятие вектора напряженности магнитного поля **H**, не зависящего от свойств среды. В абсолютной гауссовой системе единиц при отсутствии намагничивающихся тел, т. е. в вакууме *), вектор **H** совпадает с вектором **B**:

$$\mathbf{B}_{\text{вак}} = \mathbf{H}. \qquad (29.8)$$

В системе единиц СИ $\mathbf{B}_{\text{вак}}$ отличается от **H** постоянным численным и размерным множителем μ_0:

$$\mathbf{B}_{\text{вак}} = \mu_0 \mathbf{H}. \qquad (29.8a)$$

По аналогичному поводу (введение размерной электрической постоянной ε_0) мы уже сделали ряд замечаний (см. § 5). Здесь также следует отметить, что представление магнитного поля тока в вакууме $\mathbf{B}_{\text{вак}}$ в виде двух зависимым образом определяемых величин лишено физического смысла. Не обсуждая здесь вопроса о том, окупается ли это более простой записью формул, мы приводим эту систему как общепринятую.

В системе СИ величину μ_0 принято называть магнитной постоянной. В абсолютной гауссовой системе единиц при наличии среды

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (29.9)$$

и безразмерная величина μ показывает, во сколько раз магнитное поле макроскопических токов **H** усилено за счет поля микротоков

*) Практически достаточно хорошим приближением часто является замена вакуума воздухом, который вследствие невысокой плотности при нормальном давлении обладает весьма слабо выраженными магнитными свойствами.

среды. Как мы видели, μ_0 этого не отражает, поскольку **H** в системе СИ есть не физически наблюдаемая, а просто вспомогательная величина.

В системе СИ характеристикой среды является размерная величина μ_a:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{B}_{\text{вак}}=\mu\mu_0\mathbf{H}=\mu_a\mathbf{H}. \tag{29.10}$$

Эту величину, равную, как это следует из (29.10),

$$\mu_a=\mu\mu_0, \tag{29.11}$$

называют в системе СИ абсолютной магнитной проницаемостью, а величину μ — магнитной проницаемостью данной среды.

Легко видеть, что можно для общности написания формул писать в них множитель μ_0, помня, что в гауссовой системе единиц величина $\mu_0=1$ и безразмерна.

Мы начнем изучение магнитных полей с простейшего случая магнитного поля линейных токов в вакууме, т. е. с изучения поля вектора напряженности **H**.

§ 30. Магнитное поле тока

Магнитное поле постоянных токов изучалось Био и Саваром, окончательная формулировка найденного ими закона принадлежит Лапласу. Поэтому закон, с помощью которого выражается магнитное поле постоянных токов, носит название закона Био—Савара—Лапласа.

Выше отмечалась основная трудность, связанная с формулировкой такого закона. Магнитное поле линейного тока зависит не только от величины тока I, но и от формы контура с током. В электростатике поле распределенных зарядов **E** также зависит от их расположения в пространстве. Однако там это поле можно было представить как сумму полей точечных зарядов $d\mathbf{E}$, причем поле точечного заряда могло быть непосредственно выделено и изучено. В случае постоянных токов мы также можем полагать, что результирующее поле **H** есть сумма полей $d\mathbf{H}$, созданных отдельными элементами тока. Но измерить и изучить поле одного изолированного элемента постоянного тока невозможно: любой постоянный ток течет по замкнутому контуру.

Единственный путь преодоления этой трудности состоит в следующем.

а) Предположим, что в любой точке пространства магнитное поле **H**, создаваемое всем током в целом, складывается из полей $d\mathbf{H}$, создаваемых элементами этого тока в этой точке. Будем считать, что для магнитных полей, как и для электрических, имеет место

принцип суперпозиции (наложения), и полная напряженность магнитного поля **H** дается векторной суммой (или интегралом) элементарных напряженностей:

$$\mathbf{H}=\int d\mathbf{H}. \qquad (30.1)$$

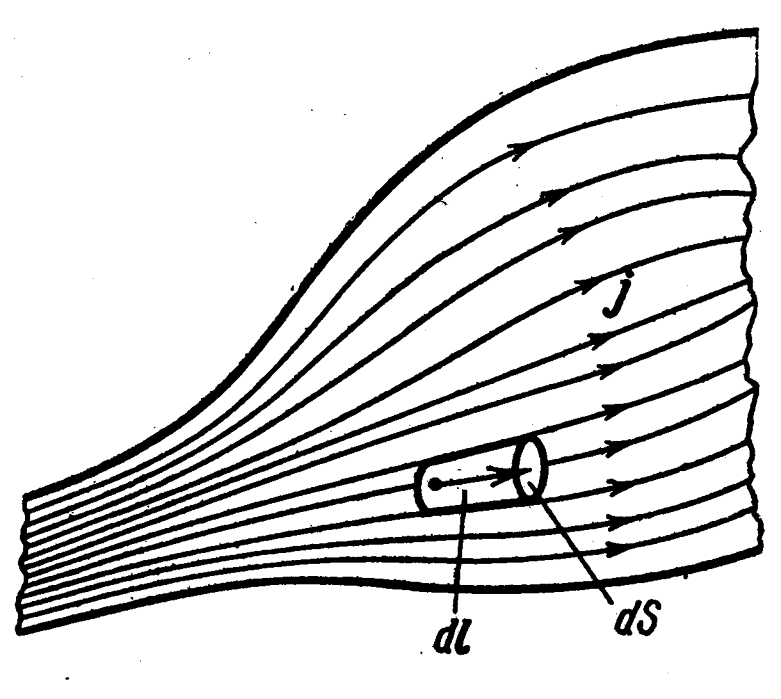


Рис. 3.7.

б) На основании изученных полей предположим математическую формулу закона, дающего выражение магнитного поля $d\mathbf{H}$ мысленно выделенного элемента тока. Если вычисленные на основе б) и с учетом а) магнитные поля для любых контуров будут иметь значения, подтверждающиеся опытом, то высказанные предположения можно считать правильными.

Пространственное распределение токов в каждой точке характеризуется вектором плотности тока $\mathbf{j}$. Выделим бесконечно малый элемент объема dV в виде цилиндра, площадь основания которого dS перпендикулярна к $\mathbf{j}$, а высота dl направлена вдоль $\mathbf{j}$ ($d\mathbf{l}\uparrow\uparrow\mathbf{j}$), как показано на рис. 3.7. Элемент тока, создающий магнитное поле, характеризуется величинами $\mathbf{j}$ и dV и равен

$$\mathbf{j}\,dV=\mathbf{j}\,dS\,dl=j\,dS\,d\mathbf{l}=I\,d\mathbf{l}, \qquad (30.2)$$

где $I=j\,dS$ — полный ток, проходящий через площадку dS.

Для линейных проводников, толщина которых пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием от них r, на котором определяется напряженность магнитного поля, мы будем пользоваться выражением (30.2), где I — ток в проводнике, а $d\mathbf{l}$ — элемент длины проводника. По закону Био — Савара — Лапласа *магнитное поле dH, создаваемое элементом тока $I\,dl$ на расстоянии r от него, обратно пропорционально квадрату расстояния и прямо пропорционально величине элемента тока и синусу угла β между векторами $I\,d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$*, т. е.

$$dH=k\frac{I\,dl\sin\beta}{r^2}. \qquad (30.3)$$

Как показано на рис. 3.8, вектор $d\mathbf{H}$ перпендикулярен к плоскости, проведенной через векторы $I\,d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ по направлению их векторного произведения $[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]$. Поэтому в векторной форме закон Био — Савара — Лапласа может быть записан в виде

$$d\mathbf{H}=k\frac{\left[I\,d\mathbf{l}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right]}{r^2}=k\,\frac{[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (30.4)$$

где $\mathbf{r}/r$ — единичный вектор, указывающий направление радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Коэффициент пропорциональности k зависит от выбора системы единиц расстояний, токов и полей и, следовательно, должен быть связан с введенным выше по формуле (29.8а) множителем μ_0.

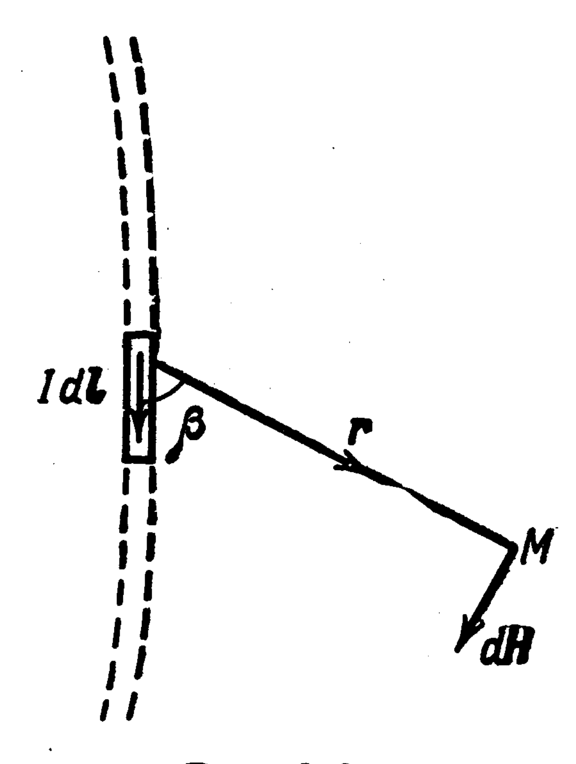


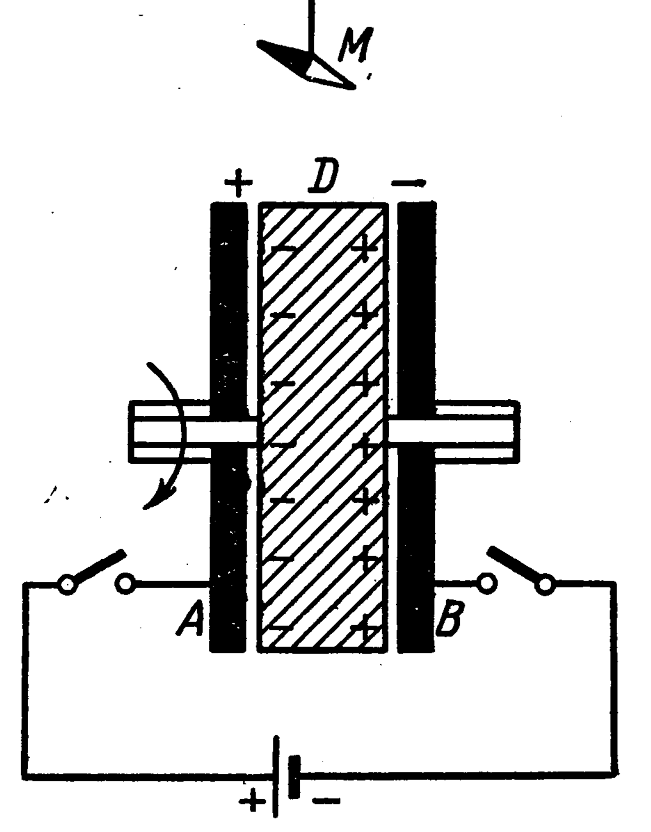
Рис. 3.8.

Закон Био — Савара — Лапласа был первоначально установлен для постоянного тока в проводниках — тока проводимости. В дальнейшем справедливость этого закона была подтверждена и для других форм движения электрических зарядов.

Для изучения магнитных полей конвекционных токов русский физик А. А. Эйхенвальд в 1901 г. сконструировал специальную установку, схема которой изображена на рис. 3.9. Два соосных диска A и B могут независимо вращаться с произвольной угловой скоростью. Изнутри диски по краю обклеены станиолем. Оба станиолевых колечка заряжаются от противоположных полюсов батареи и тем самым образуют плоский конденсатор. На каждой из пластин конденсатора распределен заряд $\pm q$, численно равный

$$q = CU, \tag{30.5}$$

где C — электроемкость конденсатора, а U — приложенное напряжение.



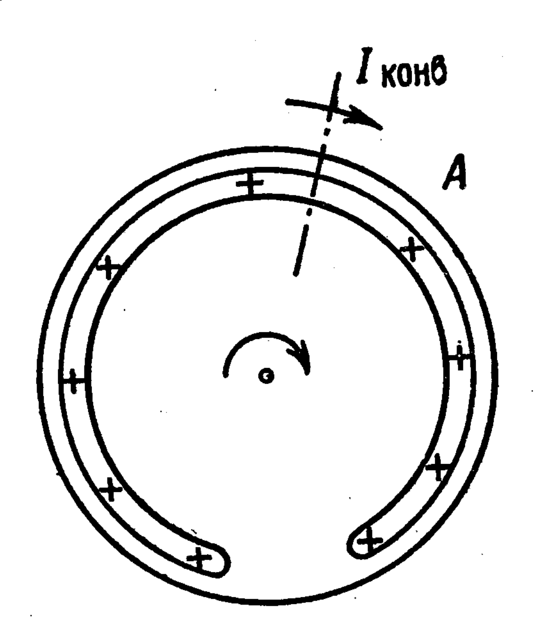


Рис. 3.9.

Приведем во вращение, например, положительно заряженный диск со скоростью n *об/сек*. Тогда через любое неподвижное сечение, например показанное на рис. 3.9 штрих-пунктиром, заряд q

будет в единицу времени проходить n раз. Следовательно, конвекционный ток через это сечение равен

$$I_{\text{конв}}=qn. \tag{30.6}$$

Величина и направление магнитного поля $\mathbf{H}$, создаваемого этим током в произвольной точке M, измерялись с помощью маленькой магнитной стрелки, помещавшейся в эту точку. То же самое можно было сделать и при вращении второго диска или обоих вместе. Затем вращение дисков прекращалось, диски отключались от батареи, и через станиолевый электрод пропускался постоянный ток проводимости. Для этого колечко включалось во внешнюю цепь, как показано на рис. 3.10. Ток проводимости I измерялся гальванометром Γ и регулировался реостатом R. Когда величина I становилась равной $I_{\text{конв}}$, то магнитное поле в точке M оказывалось точно таким же, как и в случае вращения пластины конденсатора.

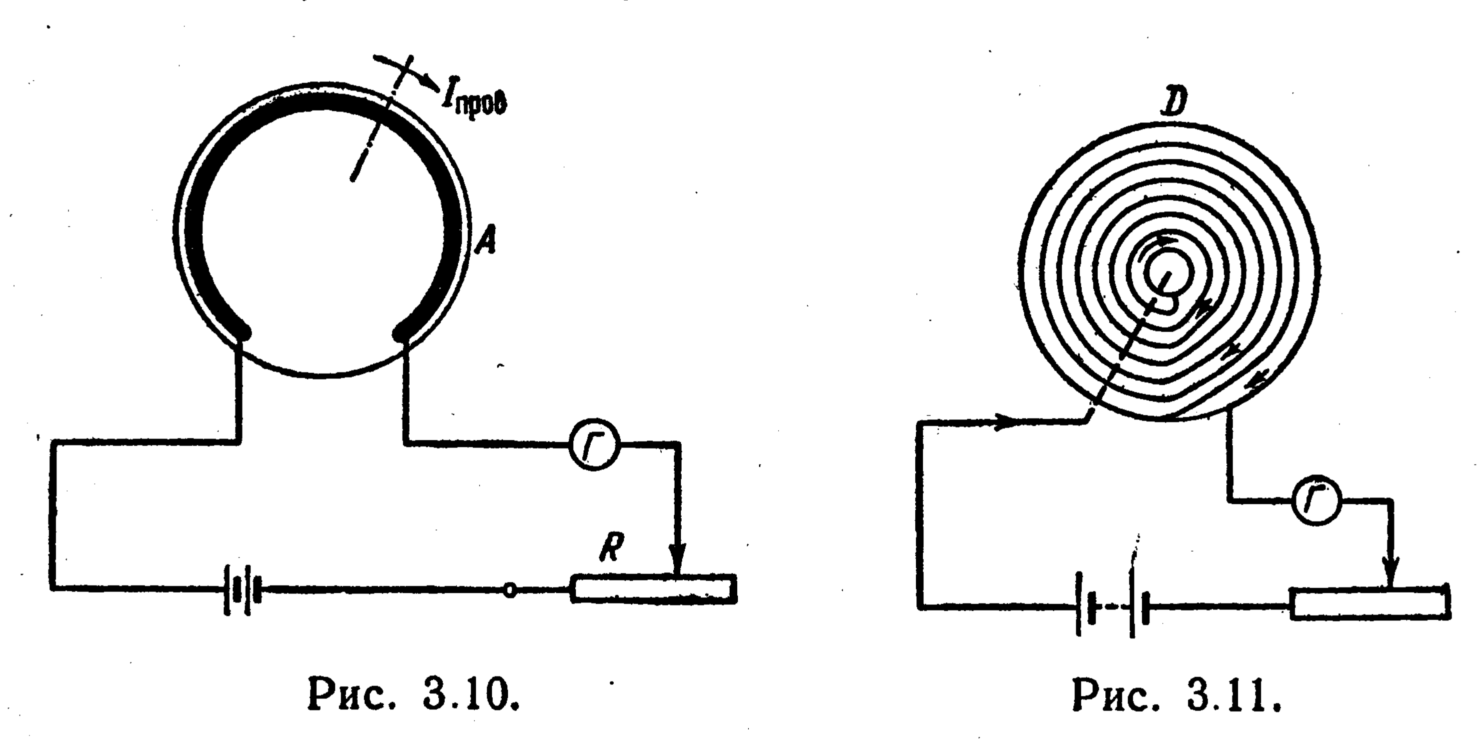


Рис. 3.10. Рис. 3.11.

Видоизменяя опыт, Эйхенвальд помещал между дисками A и B пластинку из диэлектрика D. Эта пластинка поляризовалась, и на внешних ее поверхностях появлялись связанные с диэлектриком поляризационные заряды. Вращение одного диэлектрика создавало в колечках два тока взаимно противоположных направлений, магнитные поля которых в точке M не полностью компенсировало друг друга. Чтобы создать такой же ток проводимости, стороны пластинки покрывались проволочными спиралями, ток по которым шел в противоположных направлениях (рис. 3.11).

Во всех случаях Эйхенвальд наблюдал, что конвекционный ток, возникающий при переносе свободных или связанных зарядов, создает точно такое же магнитное поле, как и ток проводимости той же величины. Следовательно, магнитное поле конвекционных токов может также рассчитываться по закону Био — Савара — Лапласа (30.4).

Наконец, в 1911 г. А. Ф. Иоффе проверил на опыте справедливость этого закона для пучка электронов, летящих в вакууме. Схема

установки Иоффе изображена на рис. 3.12. Пучок электронов, вылетающий из накаленного катода, ускорялся электрическим полем и выпускался через щель в аноде A. Двигаясь далее по инерции в вакууме, электроны собирались металлическим цилиндром и отводились в землю. Электронный ток измерялся гальванометром $Г$. Напряженность магнитного поля определялась по углу закручивания тонкой нити, к которой были подвешены две магнитные стрелочки, как это показано на рисунке. После измерения электронная трубка заменялась прямым проводом, по которому пропускался точно такой же ток проводимости. Опыт подтвердил, что угол закручивания нити, а следовательно, и напряженность магнитного поля в обоих случаях одинаковы.

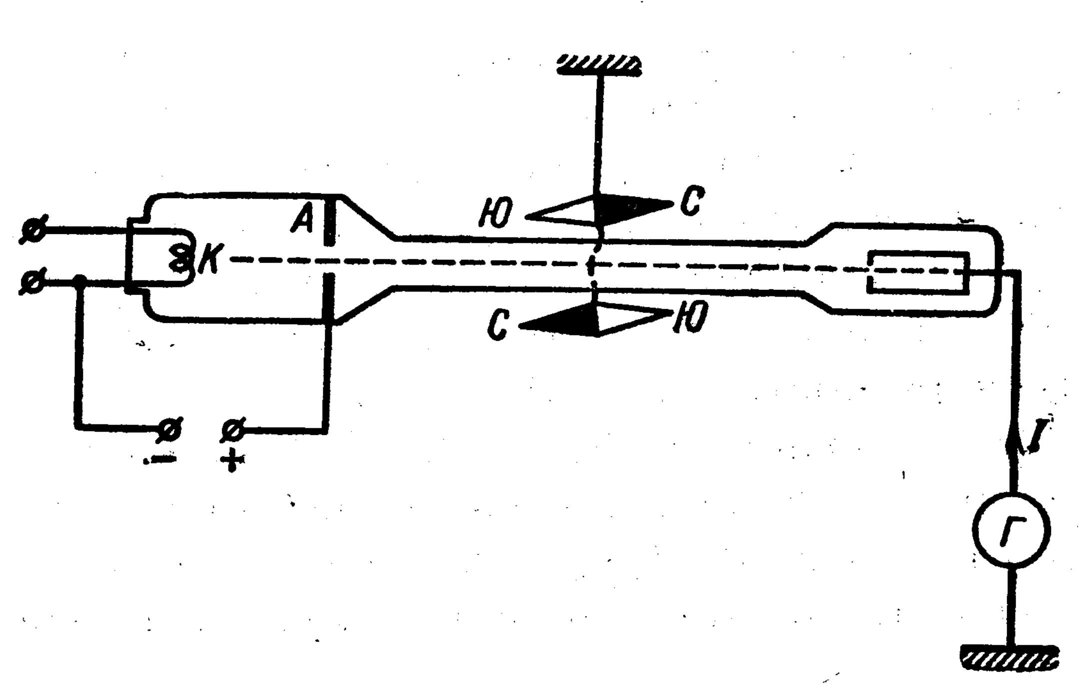


Рис. 3.12.

С помощью закона Био—Савара—Лапласа (30.4), применяя принцип суперпозиции (30.1), можно вычислить магнитное поле любых систем токов. В случае распределенных по объему токов в этих формулах, в соответствии с соотношением (30.2), следует заменить выражение для элемента тока $I\,d\mathbf{l} = \mathbf{j}\,dS\,dl$ на $\mathbf{j}\,dV$. Таким образом, закон Био—Савара—Лапласа играет в учении о магнетизме ту же роль, что и выражение (2.2) для напряженности электрического поля точечного заряда.

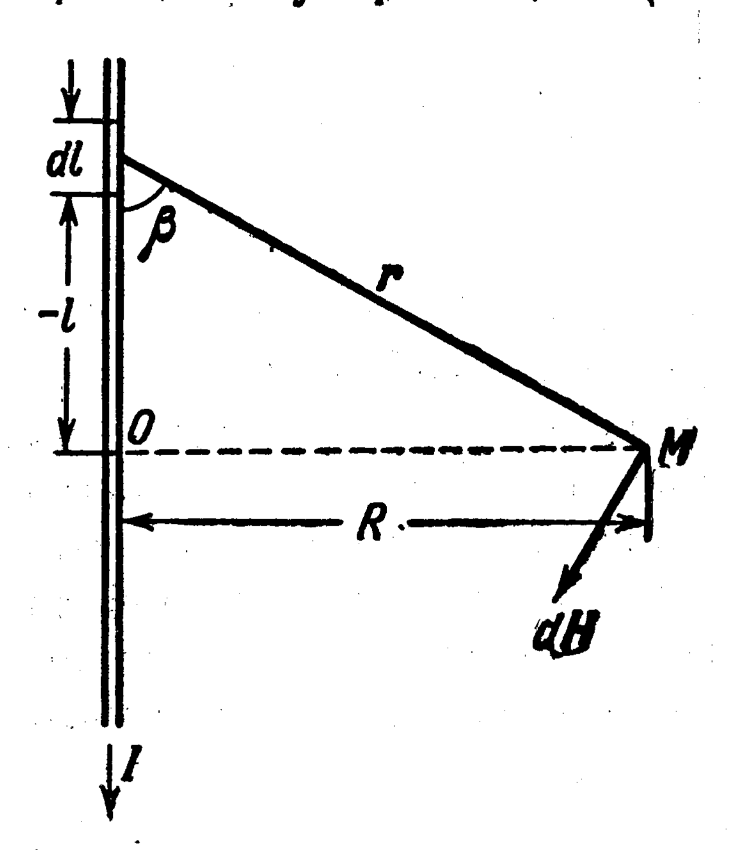


Рис. 3.13.

Рассмотрим два примера применения закона Био—Савара—Лапласа для вычисления магнитных полей линейных проводников с током.

Вычислим с помощью (30.4) напряженность поля $\mathbf{H}$, создаваемого бесконечным линейным током, в точке M, находящейся на расстоянии R от этого тока (рис. 3.13). Как видно из чертежа, направление $d\mathbf{H}$ в точке M остается одинаковым для любых элементов тока $I\,d\mathbf{l}$: $d\mathbf{H}$ перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ (т. е. плоскости рисунка) и направлено

на нас, независимо от положения отрезка dl на линейном токе. Следовательно, геометрическая сумма полей $d\mathbf{H}$ превращается в алгебраическую, и, зная направление $d\mathbf{H}$, а следовательно, и результирующего поля $\mathbf{H}$, нам достаточно определить лишь его величину. Закон Био—Савара—Лапласа дает согласно (30.3)

$$dH = k\frac{I \sin\beta}{r^2}\,dl. \tag{30.7}$$

Для интегрирования нужно переменные r, l, β выразить через одну какую-либо из них. В качестве переменной интегрирования выберем угол β. Имеем

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{R}{\sin\beta},\\ -l &= R\operatorname{ctg}\beta,\\ dl &= \frac{R\,d\beta}{\sin^2\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{30.8}$$

Подставляя (30.8) в (30.7), находим

$$dH = kI\frac{\sin^2\beta}{R^2}\sin\beta\,\frac{R\,d\beta}{\sin^2\beta} = k\frac{I}{R}\sin\beta\,d\beta. \tag{30.9}$$

Интегрируя по всему интервалу $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, отвечающему области проводника от $l = -\infty$ до $l = +\infty$, находим

$$H_{\text{л. т}} = k\frac{I}{R}\int_0^{\pi}\sin\beta\,d\beta = k\frac{I}{R}\,[\cos\beta]_{\pi}^{0} = k\frac{I}{R}\,[1-(-1)] = k\frac{2I}{R}. \tag{30.10}$$

Таким образом, напряженность магнитного поля бесконечного линейного тока $H_{\text{л. т}}$ по величине пропорциональна току и обратно пропорциональна расстоянию от него. Направление $\mathbf{H}$ видно из рисунка.

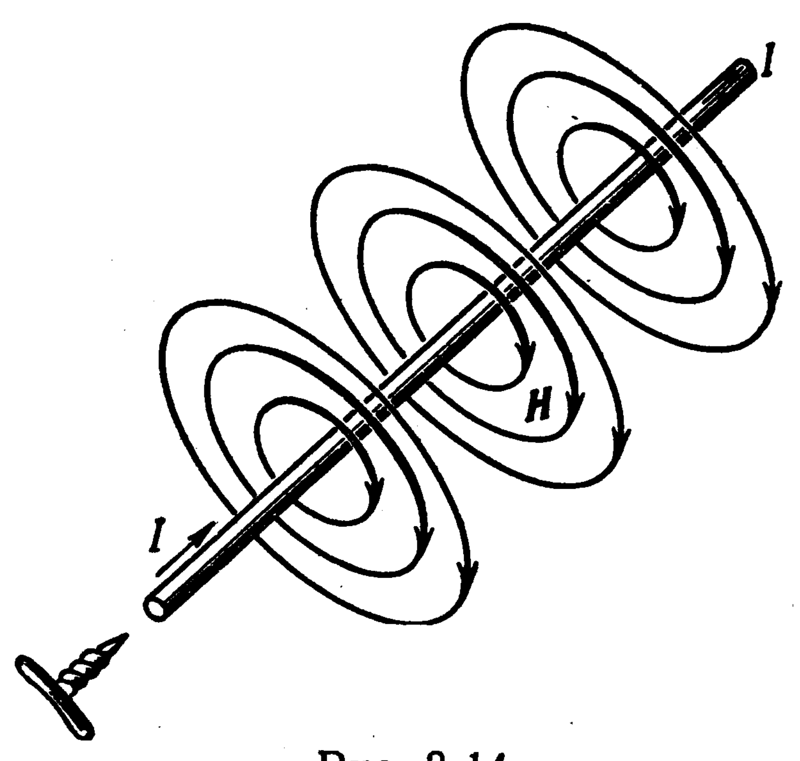


Рис. 3.14.

Полученный результат останется неизменным, если вращать всю плоскость, в которой лежат ток I и точка M (т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}$), вокруг оси, совпадающей с линией тока. Отсюда следует, что линии напряженности магнитного поля, касательными к которым являются векторы $\mathbf{H}$, представляют собой концентрические окружности, изображенные на рисунке 3.14.

Этот результат является хорошим приближением для поля линейного тока в точках, близких от проводника и далеких от его границ.

Так как согласно (30.10) $H \sim 1/R$, то чем ближе к току, тем гуще расположены линии напряженности. На оси тока ($R=0$) напряженность поля должна быть бесконечно велика. Однако бесконечно тонких проводов не бывает. Следует помнить, что

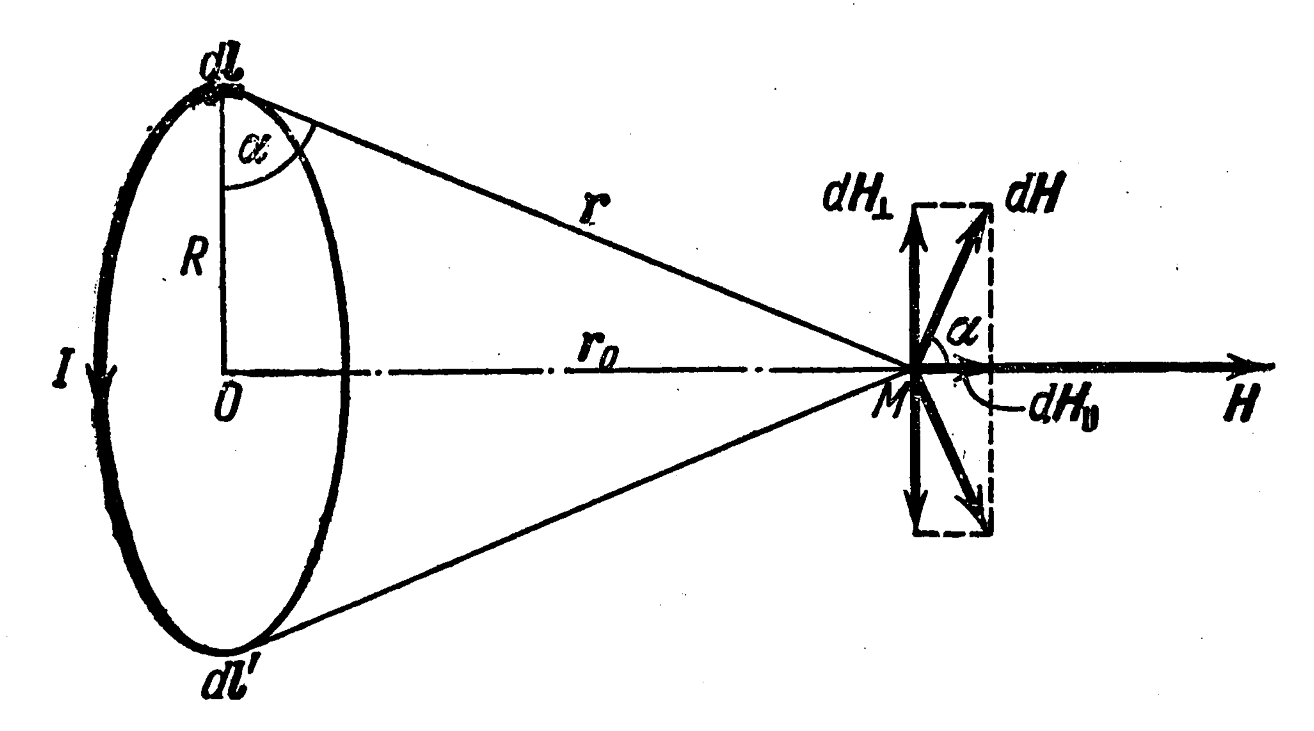


Рис. 3.15.

в соответствии с выводом (30.10) это выражение справедливо на расстояниях R, больших по сравнению с диаметром провода d.

Бесконечно длинных проводников также не бывает. Однако если длина проводника L достаточно велика по сравнению с R, то выражением (30.10) без большой погрешности можно пользоваться. Таким образом, это выражение практически пригодно для расчета магнитного поля тока, идущего по прямому проводу конечных размеров, при условии

$$d \ll R \ll L. \tag{30.11}$$

В качестве второго примера применения закона Био—Савара—Лапласа вычислим напряженность магнитного поля на оси кругового тока. Пусть окружность, обтекаемая током I, имеет радиус R (рис. 3.15). Определим напряженность магнитного поля H в точке M, лежащей на оси окружности с током на расстоянии r_0 от ее центра.

Как видно из рисунка, $d\mathbf{l} \perp \mathbf{r}$, следовательно, $d\mathbf{H}$ по величине равно

$$dH = k\frac{I\,dl}{r^2}. \tag{30.12}$$

При этом $d\mathbf{H}$ составляет с осью OM угол α. Заметим, что любому элементу $d\mathbf{l}$ отвечает диаметрально противоположный элемент $d\mathbf{l}'$, который дает такую же составляющую на ось OM: $d\mathbf{H}'_{\parallel} = d\mathbf{H}_{\parallel}$, а также перпендикулярную к OM составляющую $d\mathbf{H}'_{\perp} = -d\mathbf{H}_{\perp}$. Следовательно, при сложении всех составляющих $d\mathbf{H}_{\perp}$ (интегрировании по всему контуру) все они взаимно уничтожатся, в то время

как составляющие $d\mathbf{H}_{\parallel}$ будут складываться. Следовательно, результирующее поле $\mathbf{H}$ будет направлено по оси OM (что можно было, впрочем, сразу сказать по условию симметрии задачи относительно оси). Зная направление, мы можем теперь определить величину H, сложив составляющие $dH_{\parallel}$ всех элементов контура. Имеем

$$dH_{\parallel} = dH\cos\alpha = k\frac{I\,dl^{*}}{r^2}\cos\alpha. \qquad (30.13)$$

Следовательно,

$$H = k\frac{I\cos\alpha}{r^2}\int_0^{2\pi R} dl = k\frac{2\pi IR\cos\alpha}{r^2}. \qquad (30.14)$$

Заменяя r^2 его выражением через радиус тока R и расстояние точки наблюдения поля от центра окружности r_0:

$$r^2 = R^2 + r_0^2$$

и аналогично

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+r_0^2)^{1/2}},$$

получаем окончательное выражение для H:

$$H_{\text{оси}} = k\frac{2\pi IR^2}{(R^2+r_0^2)^{3/2}}. \qquad (30.15)$$

Магнитное поле $H_{\text{ц}}$ в центре окружности с током мы найдем, положив в выражении (30.15) $r_0 = 0$:

$$H_{\text{ц}} = k\frac{2\pi I}{R}. \qquad (30.16)$$

На расстояниях $r_0 \gg R$ величиной R^2 в знаменателе можно пренебречь, и тогда

$$H_{\text{оси}} \approx k\frac{2\pi IR^2}{r_0^3}. \qquad (30.17)$$

Вспоминая, что величина $I\pi R^2 = IS$ есть магнитный дипольный момент витка p_m, можем переписать последнее выражение в виде

$$H_{\text{оси}} \approx \frac{k}{k'}\frac{2p_m}{r_0^3}. \qquad (30.18)$$

Таким образом, магнитное поле витка с магнитным моментом p_m на его оси меняется по такому же закону, как и электрическое поле электрического диполя на его оси (с точностью до коэффициента k/k', определяемого выбором системы единиц). Точный расчет показывает, что на больших расстояниях от витка вся структура

магнитного поля витка будет такой же, как и электрического поля диполя:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{k'} \frac{p_m}{r_0^3} \left(3 \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \cos\theta - \mathbf{n} \right). \tag{30.19}$$

Этим мы установили некоторую эквивалентность витка по отношению к магнитному полю и диполя — к электрическому полю: 1) магнитное поле витка с током на большом расстоянии от него имеет ту же структуру, что и электрическое поле диполя также на соответствующем расстоянии от него, и 2) механические силы, испытываемые витком с током в магнитном поле, такие же, как для диполя в электрическом поле.

Подчеркнем еще раз, что это не означает одинаковой природы электрического и магнитного полей: электрическое поле обладает источниками — электрическими зарядами; магнитное же поле такими источниками не обладает — магнитных зарядов в природе нет. И если механические силы, испытываемые электрическим диполем в поле **E** и витком с током в поле **B**, одинаковы, как одинакова структура полей **E** диполя и **H** витка, то внутри диполя и витка с током вид полей **E** и **H** совершенно различен. К этому вопросу мы вернемся ниже (см. § 48).

§ 31. Действие магнитного поля на ток. Взаимодействие параллельных токов

Крутящий момент, испытываемый рамкой с током в магнитном поле, есть результат воздействия на отдельные элементы рамки $I\,d\mathbf{l}$ механических сил $d\mathbf{F}$. В предыдущем параграфе указывалось, что нельзя наблюдать поле $d\mathbf{H}$, создаваемое одним элементом постоянного тока $I\,d\mathbf{l}$, так как этот элемент нельзя отделить от остального участка цепи с током, создающей результирующее магнитное поле **H**. В отличие от этого механическое действие $d\mathbf{F}$, испытываемое отдельным элементом контура с током, помещенного во внешнее поле **B**, может быть непосредственно измерено.

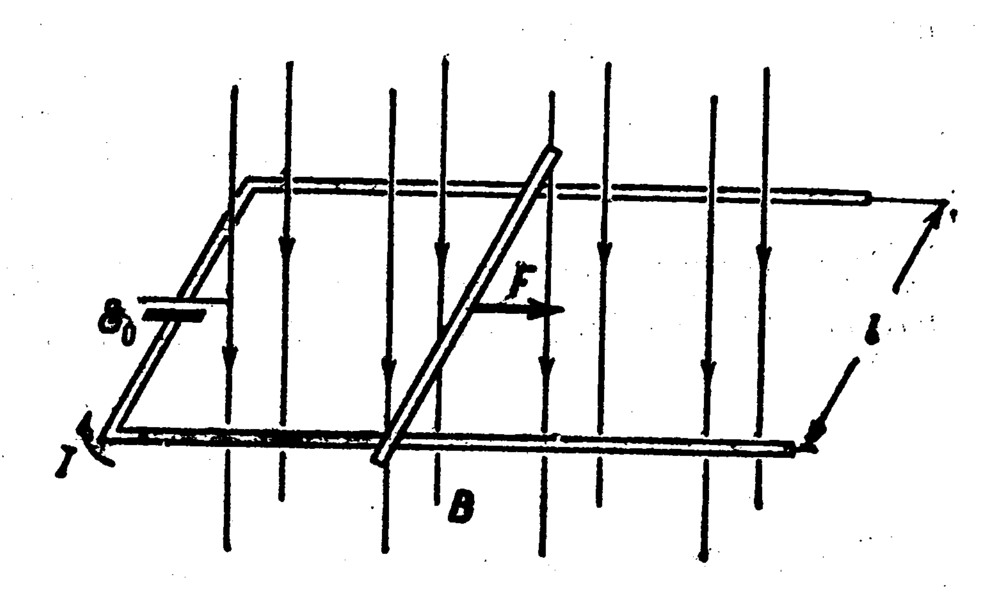


Рис. 3.16.

На рис. 3.16 изображена схема подобного опыта. Батарея $\mathscr{E}_0$ создает ток I в контуре, одна из сторон которого длиною l сделана подвижной и может скользить (или катиться) вдоль двух других. Если внести этот контур во внешнее магнитное

поле **B**, то на подвижную сторону будет действовать механическая сила **F**, величину которой можно измерить с помощью динамометра. Опыт показывает, что величина этой силы может быть выражена через вектор магнитной индукции **B** (см. (29.3)):

$$F = k' I l B, \qquad (31.1)$$

где k' — коэффициент пропорциональности, величина и размерность которого, как всегда, определяются выбором системы единиц, а сама сила **F** направлена перпендикулярно току и линиям индукции, как это показано на рис. 3.16.

В общем случае элемента тока $I d\mathbf{l}$, расположенного под некоторым углом к линиям индукции **B**, выражение для величины механической силы $d\mathbf{F}$ дается законом Ампера:

$$dF = k' I\, dl\, B \sin(\widehat{I d\mathbf{l}, \mathbf{B}}), \qquad (31.2)$$

или в векторной форме:

$$d\mathbf{F} = k' [I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = k' I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \qquad (31.3)$$

Направление вектора $d\mathbf{F}$ может быть найдено согласно (31.3) по общим правилам векторного произведения или по различным мнемоническим правилам. Приведем одно из них — правило левой руки (рис. 3.17): *если направить указательный палец по полю, а средний — по направлению тока, то отогнутый большой палец левой руки будет показывать направление силы, действующей на ток.*

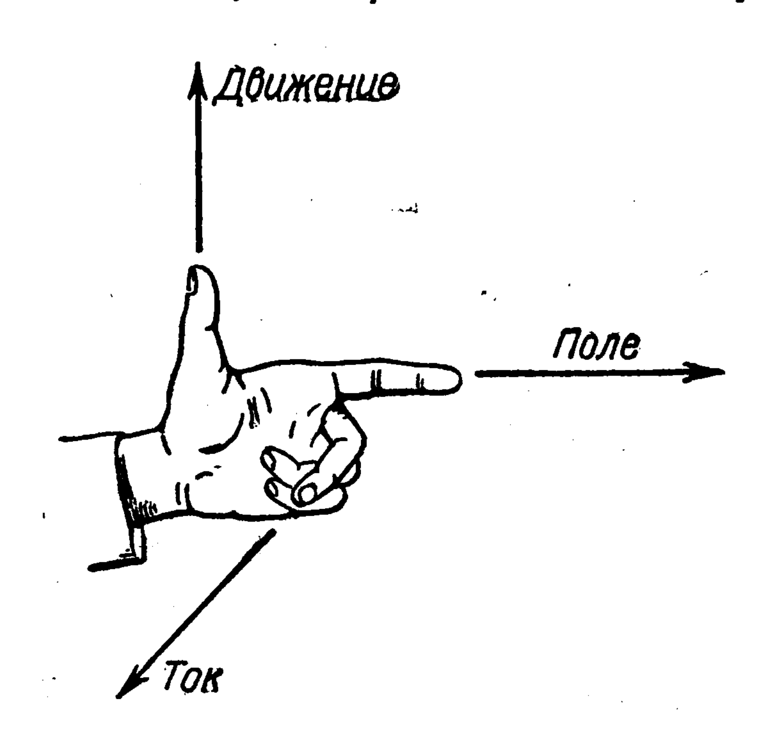


Рис. 3.17.

Можно установить, что из закона Ампера (31.3) вытекает выражение (29.4) для крутящего момента, действующего на виток с током в магнитном поле, и что, следовательно, эти два выражения эквивалентны. Покажем это для простейшего случая рамки со сторонами l и a, ориентированной в поле так, как это изображено на рис. 3.18.

На рис. 3.18, *а* ось вращения OO' прямоугольной рамки перпендикулярна к вектору индукции однородного поля **B**. На рис. 3.18, *б* та же рамка изображена «сверху» так, что ось OO' перпендикулярна к плоскости рисунка; видно, что силы, действующие на вертикальные стороны рамки, не проходят через ось OO' и образуют пару, момент которой $\mathbf{M}_{кр}$, согласно (31.2), по модулю равен

$$M_{кр} = F_1 h = k' I l B a \sin\alpha = k' I S B \sin\alpha = p_m B \sin\alpha. \qquad (31.4)$$

Под действием этой пары сил рамка стремится повернуться так, чтобы ее нормаль **n**, а следовательно, и магнитный момент $\mathbf{p}_m$ совпали по направлению с вектором индукции поля **B**.

Величина (31.4) крутящего момента и его направление для рамки с магнитным моментом $\mathbf{p}_m$ в поле **B** полностью совпадают с приведенными ранее в формулах (29.3) и (29.7). Совершенно такой же результат, но много более сложным путем получаем для рамки произвольной формы (плоской). Тем самым мы будем считать доказанным полную эквивалентность данного в § 29 определения действия магнитного поля на элементарную рамку с током и формулы Ампера.

На рис. 3.19 изображена рамка с током, плоскость которой совмещена с плоскостью чертежа. Вектор **B** перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к нам (на рисунке это изображено точками). Ток I в рамке идет по часовой стрелке; нормаль к рамке **n** и ее магнитный момент $\mathbf{p}_m$ направлены за плоскость чертежа (что изображено крестиком). По закону Ампера (31.3) на каждый элемент тока $I\,d\mathbf{l}$ действует сила $d\mathbf{F}$ в плоскости чертежа, перпендикулярная к элементу тока и направленная внутрь рамки. Момент всех этих сил относительно любой оси, лежащей в плоскости рамки, равен нулю, так как линия действия каждой силы $d\mathbf{F}$ пересекает эту ось. Поэтому полный вращающий момент $\mathbf{M}_{кр}$ рамки также равен нулю. То же следует и из формулы (29.7), так как в данном случае векторы $\mathbf{p}_m$ и **B** антипараллельны, а $\sin 180° = 0$. В однородном поле $\mathbf{B} = \mathrm{const}$ геометрическая сумма элементарных сил $d\mathbf{F}$ будет равна нулю, и рамка останется неподвижной. Действующие по контуру элементарные силы лишь сжимают рамку со всех сторон.

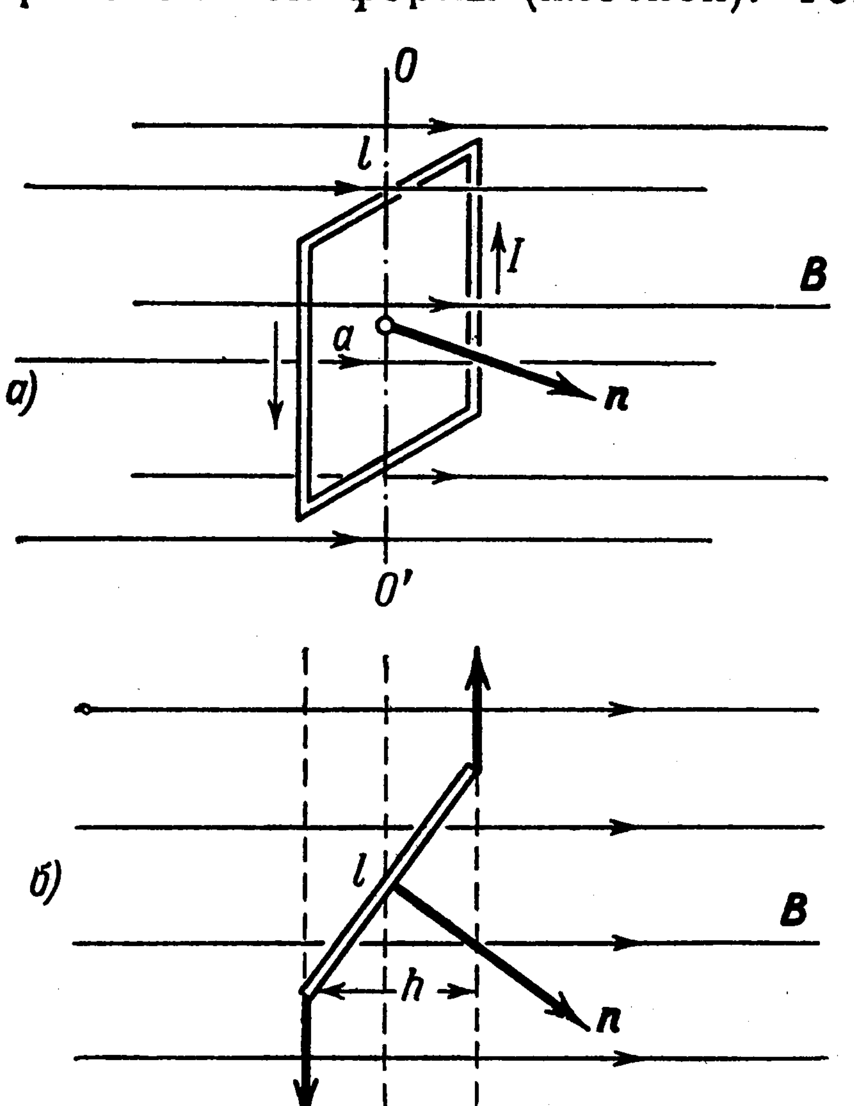


Рис. 3.18.

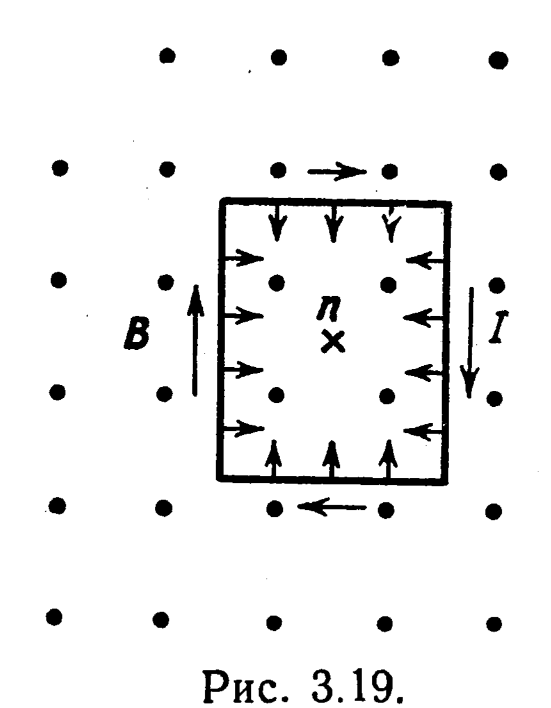


Рис. 3.19.

Легко видеть, что это равновесие рамки в поле ($\mathbf{p}_m \uparrow\downarrow \mathbf{B}$) неустойчиво. При малейшем повороте $\mathbf{p}_m$ возникнет пара, которая будет стремиться поворачивать рамку далее так, чтобы $\mathbf{p}_m$ стало параллельно $\mathbf{B}$. В дальнейшем, говоря о равновесии рамки в поле, мы будем иметь в виду именно это устойчивое равновесие ($\mathbf{p}_m \uparrow\uparrow \mathbf{B}$), которое изображено на рис. 3.20. Ток I в этом случае идет против часовой стрелки, и магнитный момент $\mathbf{p}_m = k'IS\mathbf{n} = k'Ial\mathbf{n}$ параллелен вектору индукции $\mathbf{B}$. Линии суммарных сил, действующих на стороны рамки, либо проходят через ось OO', либо параллельны ей и не дают крутящего момента, а лишь растягивают рамку во все стороны.

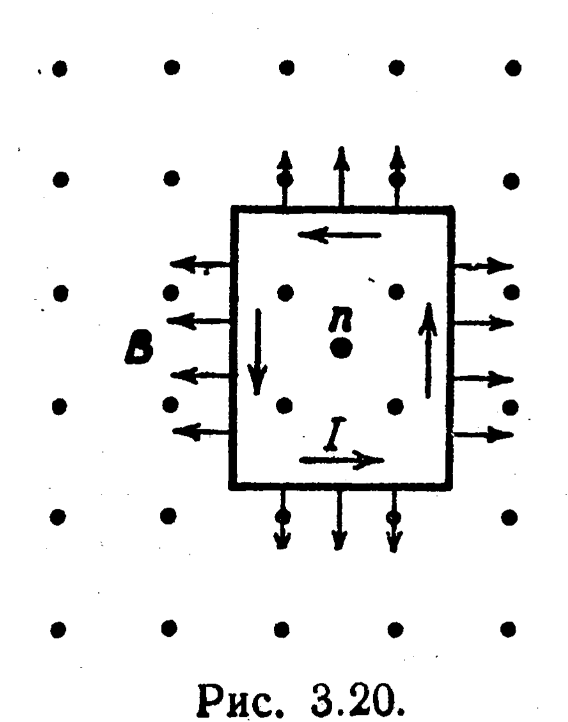


Рис. 3.20.

Разберем важный случай применения формулы Ампера для расчета механического (иногда называемого «пондеромоторным») взаимодействия токов, позволяющий установить системы единиц. Рассмотрим два практически бесконечных параллельных линейных тока I_1 и I_2, расположенных на расстоянии R друг от друга в однородной среде

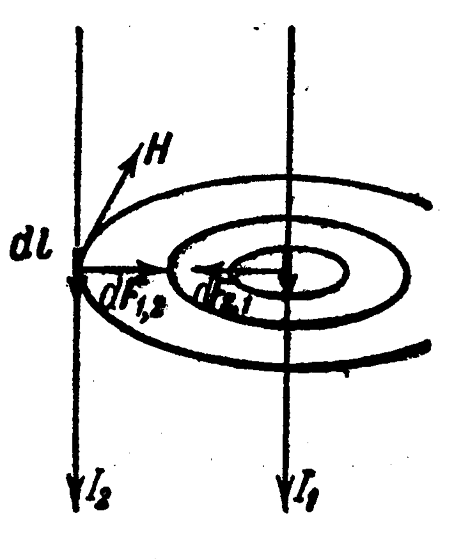


Рис. 3.21.

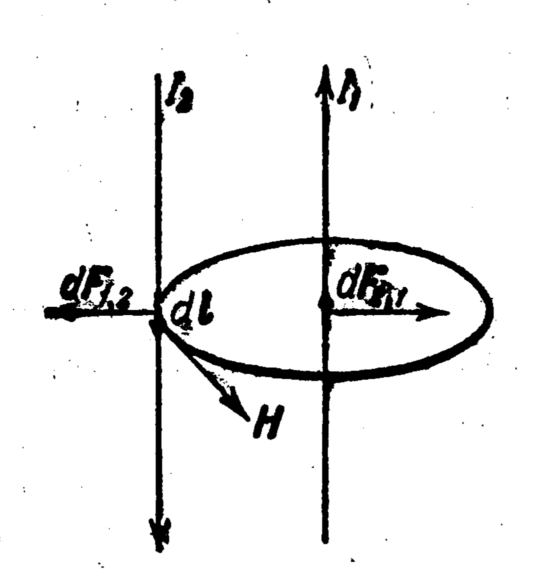


Рис. 3.22.

с магнитной проницаемостью μ. Ток I_1 создает вокруг себя магнитное поле, линии напряженности которого представляют концентрические окружности (рис. 3.21). Согласно (30.10) напряженность этого поля в точках, где находится второй проводник, равна

$$H_{1,2} = k\frac{2I_1}{R}. \qquad (31.5)$$

Вектор магнитной индукции в однородном веществе («магнетике») равен

$$B_{1,2} = \mu_a H_{1,2} = \mu\mu_0 k\frac{2I_1}{R}. \qquad (31.6)$$

По закону Ампера сила, действующая со стороны этого магнитного поля на элемент тока второго проводника, равна

$$dF_{1,2} = k'B_{1,2}I_2\,dl\sin(I_2\,d\mathbf{l}, \widehat{\;}\,\mathbf{B}_{1,2}) = k'\mu\mu_0 k\frac{2I_1I_2}{R}\,dl \qquad (31.7)$$

и направлена в сторону первого тока. Эта сила притяжения на единицу длины проводника составит

$$f_{1,2} = \frac{dF_{1,2}}{dl} = \mu\mu_0 kk'\,\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (31.8)$$

Выражение (31.8) симметрично относительно токов I_1 и I_2, и, следовательно, на единицу длины первого проводника со стороны второго действует точно такая же сила притяжения $f_{2,1}=f_{1,2}$.

Если оба тока I_1 и I_2 идут в противоположных направлениях (рис. 3.22), то между ними действуют силы отталкивания, величина которых может быть вычислена по той же формуле (31.8).

§ 32. Системы единиц. Единицы измерения тока, магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Рассмотрим взаимодействие двух параллельных проводников в вакууме ($\mu=1$). Тогда согласно (31.8) сила взаимодействия на единицу длины проводника равна

$$\frac{dF}{dl} = \mu_0 kk'\,\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.1)$$

Мы уделим основное внимание двум наиболее важным в наши дни системам — СИ и абсолютной гауссовой, с которой, как более простой, мы и начнем.

В гауссовой системе единиц (как и других абсолютных системах) $\mu_0=1$, так что (32.1) принимает вид:

$$\frac{dF}{dl} = kk'\,\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.2)$$

Произведение коэффициентов kk', входящее в выражение (32.2), подлежит опытному определению. Их численные значения и размерности зависят от выбора единиц измерения остальных входящих в (32.1) механических и электрических величин.

Гауссова абсолютная система единиц. Напомним, что единица заряда в системе СГС уже определена (см. § 1). Тем самым определена и единица тока: *сила тока равна единице, если через поперечное сечение проводника в 1 сек проходит единица заряда.*

Как уже указывалось выше, при определении величины магнитной индукции B по крутящему моменту рамки мы должны в общем случае положить

$$M_{кр} = k'ISB\sin\alpha, \qquad (29.3)$$

что следует из закона Ампера

$$d\mathbf{F}=k'I[d\mathbf{l}\times\mathbf{B}]. \qquad (31.3)$$

Для вычисления силы взаимодействия линейных токов в вакууме мы должны применить закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{H}=kI\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3} \qquad (30.4)$$

и закон Ампера (31.3) при $\mathbf{B}=\mathbf{H}$

$$d\mathbf{F}=k'I[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}]. \qquad (32.3)$$

Отсюда для силы, действующей на единицу длины одного из двух параллельных токов I_1 и I_2, находящихся на расстоянии R, получим (32.2):

$$\frac{dF}{dl}=k'k\frac{2I_1I_2}{R}.$$

В этой формуле определены единицы всех входящих в нее величин. Задача состоит, следовательно, в определении размерности и величины произведения kk'. Сравнивая размерности левой и правой частей равенства

$$\frac{г\ см}{сек^2\ см}=[kk']\frac{см^3\ сек^{-4}}{см}, \qquad (32.4)$$

находим

$$[kk']=см^{-2}\ сек^2=\frac{1}{[v^2]}, \qquad (32.5)$$

т. е. размерность kk' равна размерности квадрата обратной величины скорости. Численное значение этой величины может быть определено только на опыте. Эксперимент дает

$$kk'=\frac{1}{c^2}, \qquad (32.6)$$

где $c\approx 3\cdot 10^{10}$ *см/сек*—скорость света в вакууме.

Соотношение (32.6) оставляет произвол в выборе k и k'.

В абсолютной гауссовой системе единиц полагают:

$$k'=k=\frac{1}{c}. \qquad (32.7)$$

Таким образом, выведенные выше основные законы приобретают симметричный вид:

закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{H}=\frac{I}{c}\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (32.8)$$

закон Ампера

$$d\mathbf{F}=\frac{I}{c}[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}] \qquad (32.9)$$

или, при наличии среды,

$$dF = \frac{I}{c}[dl \times B]. \tag{32.9a}$$

Выражение (32.2) в гауссовой системе примет вид

$$\frac{dF}{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{2I_1 I_2}{R}, \tag{32.10}$$

где F выражено в динах, dl и R — в сантиметрах, c — в *см/сек* и I_1 и I_2 — в гауссовых единицах силы тока.

Магнитное поле бесконечного линейного тока (30.10) при указанном значении постоянной k примет вид

$$H_{\text{л. т}} = \frac{1}{c}\frac{2I}{R}. \tag{32.11}$$

Отсюда определение единицы напряженности магнитного поля — эрстед: *эрстед есть напряженность магнитного поля бесконечного линейного тока силой в с СГС ед. тока* (= 10 *а*) *на расстоянии* 2 *см от тока* (учет двойки в числителе).

Размерности напряженности магнитного поля **H** и индукции **B** совпадают, так как в системе СГС $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, где μ — безразмерная величина. В вакууме $\mu = 1$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Единица индукции **B** носит название гаусса (*гс*) (**B** гауссов = $= \mu$**H** эрстед).

В электронике, физике атома и атомного ядра, физике элементарных частиц величины ε_0 и μ_0, как правило, не вводятся. Для этих и ряда других разделов физики и техники абсолютная система единиц Гаусса остается одной из наиболее удобных.

Остановимся кратко еще на двух абсолютных системах единиц — электростатической (СГСЭ) и электромагнитной (СГСМ). Обе эти системы, как и система Гаусса (СГС), исходят из трех основных единиц: массы (*г*), длины (*см*), времени (*сек*) и никаких добавочных произвольных единиц не вводят (отсюда и термин — пожалуй, не совсем удачный — «абсолютные» системы, хотя в них, конечно, три исходные единицы выбраны произвольно).

Система СГСЭ. Отличие системы СГСЭ от СГС состоит лишь в том, что вместо (32.7) принимается

$$k' = 1, \quad k = \frac{1}{c^2}. \tag{32.7a}$$

В результате единицы всех электрических величин и тока оказываются такими же, как в гауссовой системе, магнитные же единицы отличаются, притом весьма неудобным образом (см. приложение I). ε и μ определяются, как и в СГС.

Система СГСМ практически удобнее и использовалась чаще, чем СГСЭ. Ее отличие в ином определении производных единиц.

В качестве исходного берется уравнение (32.5), описывающее взаимодействие токов, а не (1.4), описывающее взаимодействие зарядов. В соответствии с этим коэффициент пропорциональности kk' в (32.5) принимается равным единице:

$$kk' = 1, \tag{32.7б}$$

и далее, из (32.5) определяется единичный ток:

Бесконечный линейный ток в 1 СГСМ *ед. тока взаимодействует с параллельным и равным ему током, находящимся от него на расстоянии в* 2 *см, так что отрезок тока в* 1 *см испытывает силу в* 1 *дину.*

Читатель легко проверит, что 1 СГСМ ед. тока $=10$ *а*. ε и μ определяются так же, как в системе СГС. Заметим, что удобная единица силы тока — единственное, но часто решающее преимущество этой системы перед системой СГС, где единица тока, равная 10 *а/с*, как правило, неудобна.

Единица заряда определяется в СГСМ через единицу тока: при токе в 1 СГСМ через поперечное сечение проводника проходит в 1 *сек* 1 СГСМ-ед. заряда (10 кулонов).

Сказанного достаточно, чтобы читатель мог при желании определить все интересующие его величины и писать формулы в этих системах. Сводка единиц, их размерностей и переводных коэффициентов систем СГС, СГСЭ, СГСМ и СИ приведена в приложении I.

Ныне принятая международная система единиц СИ, оперирующая практически удобными единицами, широко применяется в электро- и радиотехнике и ряде других разделов техники. К определению этой системы мы и переходим.

Международная система единиц СИ (Система Интернациональная). Три исходные единицы: масса (*кг*), длина (*м*) и время (*сек*). Основной особенностью этой системы является введение четвертой «независимой» единицы — силы тока — ампера. Это удобно практически, хотя введение добавочной единицы физически не оправдано.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу в* $2\cdot10^{-7}$ *н/м.*

Единица заряда, как и в СГСМ, определяется через единицу силы тока и равна кулону.

В этой системе для «рационализации» записи формул принимают

$$k' = 1, \quad k = \frac{1}{4\pi},$$

так что в единицах СИ формула (32.1) имеет вид

$$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}. \qquad (32.12)$$

В этом выражении все величины кроме μ_0 определены в единицах СИ (ток I — в независимых единицах — амперах). Следовательно, размерность μ_0 определяется в этих же единицах из (32.12), а величина — из опыта. Иными словами, в СИ величина μ_0 определяется так, чтобы при I, выраженном в амперах, dl и R — в метрах сила F была выражена в ньютонах.

Чтобы получить значение μ_0, перейдем в (32.12) к конечным величинам, положив dl равным одному метру. Полагая далее $R=1$ *м*, $I_1=I_2=1$ *а*, получим, учитывая приведенное выше определение ампера:

$$2\cdot 10^{-7}\ н=\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,а^2.$$

Отсюда размерность и величина μ_0:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\ н/а^2. \qquad (32.13а)$$

Поскольку

$$1\ н=дж/м=вт\cdot сек\cdot м^{-1}=а\cdot в\cdot сек\cdot м^{-1},$$

можем переписать μ_0 в более удобном для использования виде:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\ в\cdot сек\cdot м^{-1}\cdot а^{-1}. \qquad (32.13б)$$

Для читателя, не забывшего из школьного курса определение единицы индуктивности генри (*гн*), приведем еще одно удобное выражение для μ_0, которое будет выведено нами далее, на стр. 270:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\ гн\cdot м^{-1}. \qquad (32.13в)$$

Таким образом, k, k' и μ_0 определены. Закон Био — Савара — Лапласа (при отсутствии среды) принимает вид

$$d\mathbf{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{[d\mathbf{l}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (32.14)$$

что в соответствии с (30.10) для напряженности магнитного поля бесконечного линейного тока дает

$$H=\frac{1}{4\pi}\frac{2I}{R}=\frac{I}{2\pi R}. \qquad (32.15)$$

Отсюда получаем единицу напряженности магнитного поля ампер на метр (*а/м*) — это напряженность поля бесконечного линейного тока в 1 *а* на расстоянии $R=\frac{1}{2\pi}$ метров от него.

Соотношение между этой величиной и напряженностью магнитного поля в гауссовой системе единиц—эрстедом найдем, сопоставляя (32.15) с соответствующей формулой в системе СГС (32.11):

$$H = \frac{1}{c}\frac{2I}{R}\ \text{э}. \qquad (32.11\text{a})$$

Подставляя сюда $I = 1\ a = \frac{c}{10}$ СГС ед. тока и $R = \frac{1}{2\pi}\ м$ в сантиметрах, получим $H = 1\ a/м$:

$$1\ \frac{a}{м} = \frac{1}{c}\frac{2\frac{c}{10}}{\frac{1}{2\pi}100}\ \text{э} = 4\pi\ 10^{-3}\ \text{э}, \qquad (32.16)$$

или

$$1\ \text{э} = 79{,}3\ \frac{a}{м} \approx 80\ \frac{a}{м}. \qquad (32.17)$$

В соответствии с (29.8′) в системе единиц СИ индукция в вакууме $\mathbf{B}_{вак}$ отличается от $\mathbf{H}$ и равна

$$\mathbf{B}_{вак} = \mu_0\mathbf{H} = 4\pi\ 10^{-7}\ \frac{н}{a^2}\cdot\mathbf{H}\ \frac{a}{м} = 4\pi\ 10^{-7}\ \mathbf{H}\ \frac{н}{ам}. \qquad (32.18)$$

Единица индукции в системе СИ называется тесла (*тл*). Соотношение единиц индукции легко находим. Действительно, при

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 1\ \frac{a}{м}$$

индукция B численно равна μ_0, т. е.

$$B = 4\pi\cdot 10^{-7}\ тл.$$

Но при $H = 1\ a/м$, как это следует из (32.16), индукция в вакууме составляет $4\pi\ 10^{-3}$ *гс*. Следовательно, имеем

$$4\pi\ 10^{-7}\ тл = 4\pi\ 10^{-3}\ гс,$$

или

$$1\ гс = 10^{-4}\ тл. \qquad (32.19)$$

Закон Ампера в системе СИ принимает вид

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\times\mathbf{B}] = \mu\mu_0 I[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}]. \qquad (32.20)$$

В случае вакуума $\mu = 1$ и

$$d\mathbf{F} = \mu_0 I[d\mathbf{l}\times\mathbf{H}]. \qquad (32.21)$$

Ряд формул, которые нам придется рассматривать в дальнейшем, необходимо записать так, чтобы читатель мог пользоваться по собственному выбору как гауссовой системой единиц, так и едини-

цами СИ. Для этого следует сохранить при написании формул величины (смысл которых следует хорошо понимать) k_0 (стр. 13, 14, 34), k (стр. 194, 195), k' (стр. 190, 202), ε_0 (стр. 14, 79) и μ_0 (стр. 192, 209, 270), придавая им нужные значения в соответствии с выбранной системой единиц:

В гауссовой абсолютной системе единиц (СГС):

$$k_0=1,\quad k=\frac{1}{c},\quad k'=\frac{1}{c},\quad \varepsilon_0=1,\quad \mu_0=1.$$

В Международной системе единиц (СИ):

$$k_0=\frac{1}{4\pi},\quad k=\frac{1}{4\pi},\quad k'=1,$$

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\, м^{-1}\, сек\, а\, в^{-1}=ф\cdot м^{-1}=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\, м^{-3}\, кг^{-1}\, сек^4\, а^2,$$

$$\mu_0=4\pi\, 10^{-7}\, м^{-1}\, сек\, а^{-1}\, в=гн\cdot м^{-1}=4\pi\, 10^{-7}\, м\, кг\, сек^{-2}\, а^{-2}.$$

Обратим внимание читателя на то, что

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}\, 4\pi\, 10^{-7}\, м^{-2}\, сек^2=\frac{1}{(3\cdot 10^8\, м/сек)^2}=\frac{1}{c^2}.$$

Таким образом, одна и та же величина $1/c^2$, что, естественно, входит в обе системы. Однако в абсолютной гауссовой системе она делится на два равных множителя. В системе СИ выбор практически удобной добавочной единицы силы тока приводит к разделению величины $1/c^2$ на множители, различающиеся численно и по размерности.

Сводка электромагнитных физических величин, их размерностей в системах СГС, СИ, СГСЭ и СГСМ, а также соотношений между ними приведена в приложении I.

§ 33. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля. Магнитное поле соленоида

Теорема о циркуляции вектора **H**, которая будет изложена в этом параграфе, имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике. В частности, подобно тому, как при симметричном распределении зарядов теорема Гаусса позволяла вычислить вектор **E**, не прибегая к закону Кулона, теорема о циркуляции **H** позволит находить напряженность магнитного поля при наличии симметрии токов без применения закона Био — Савара — Лапласа, что часто очень облегчает вычисления.

Мы докажем теорему о циркуляции **H** в целях упрощения вычислений лишь для случая прямолинейного бесконечного тока. Как показывает строгий расчет, тот же результат имеет место и в случае контуров произвольной формы, чем мы и воспользуемся без строгого доказательства.

Циркуляцией магнитного поля H по заданному замкнутому контуру L называется интеграл следующего вида:

$$\oint\limits_{(L)} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \oint\limits_{(L)} H\, dl \cos(\widehat{\mathbf{H}, d\mathbf{l}}) = \oint\limits_{(L)} H_l dl, \qquad (33.1)$$

где направление обхода по контуру также должно быть задано. H_l — составляющая H в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода).

Рассмотрим контур L произвольной формы, лежащий в плоскости, перпендикулярной к бесконечному линейному току I (рис. 3.23). Ток перпендикулярен к плоскости рисунка и направлен от нас (крестик на чертеже). Линии напряженности магнитного поля представляют собой концентрические окружности в плоскости рисунка, направленные по часовой стрелке.

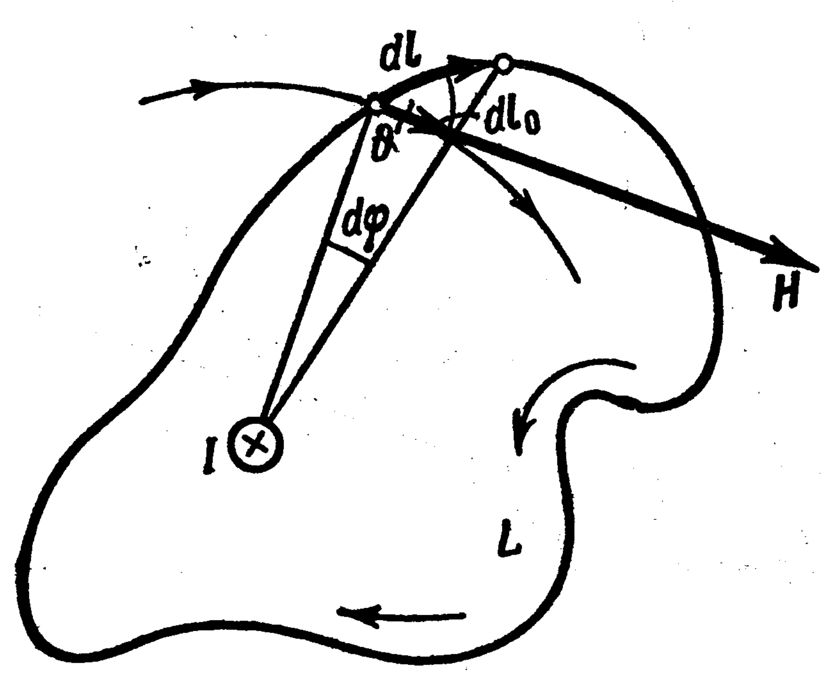


Рис. 3.23.

Выберем направление обхода контура L также по часовой стрелке. Рассмотрим отрезок контура $d\mathbf{l}$. Вектор напряженности магнитного поля направлен перпендикулярно к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ и составляет с отрезком $d\mathbf{l}$ угол ϑ. Таким образом,

$$\mathbf{H}\, d\mathbf{l} = H\, dl \cos\vartheta. \qquad (33.2)$$

Проведем два бесконечно близких радиуса-вектора, проходящих через начало и конец $d\mathbf{l}$ и составляющих друг с другом угол $d\varphi$, и вектор $d\mathbf{l}_0$, перпендикулярный к этим радиусам-векторам. Из рисунка видно, что

$$dl_0 = dl \cos\vartheta \quad \text{и} \quad dl_0 = r\, d\varphi. \qquad (33.3)$$

Следовательно, $dl \cos\vartheta = r\, d\varphi$, а значит,

$$\mathbf{H}\, d\mathbf{l} = H\, dl \cos\vartheta = Hr\, d\varphi. \qquad (33.4)$$

Подставляя сюда значение напряженности поля линейного тока

$$H = k\frac{2I}{r}, \qquad (33.5)$$

находим

$$\mathbf{H}\, d\mathbf{l} = k\frac{2I}{r} r\, d\varphi = k \cdot 2I\, d\varphi. \qquad (33.6)$$

Циркуляцию по всему контуру L получим, интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π:

$$\oint\limits_{L} H_l dl = k2I \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = k \cdot 4\pi I. \qquad (33.7)$$

В системе СИ, как уже указывалось, $k=1/4\pi$ и, следовательно,

$$\oint H_l\,dl = I. \tag{33.8}$$

В системе Гаусса $k=1/c$ и

$$\oint H_l\,dl = \frac{4\pi}{c} I. \tag{33.9}$$

Легко видеть, что полученный результат будет верен не только для контура, лежащего в плоскости, перпендикулярной к току, но и для любого пространственного (не плоского) контура. Действительно, перемещая любой отрезок $d\mathbf{l}$ контура из его плоскости параллельно линии тока, мы не меняем значения величины $\mathbf{H}\,d\mathbf{l}$.

Таким образом, *циркуляция напряженности магнитного поля не зависит от формы контура*. Как уже отмечалось, можно строго доказать, что этот результат верен не только для линейных токов, но для токов любой формы.

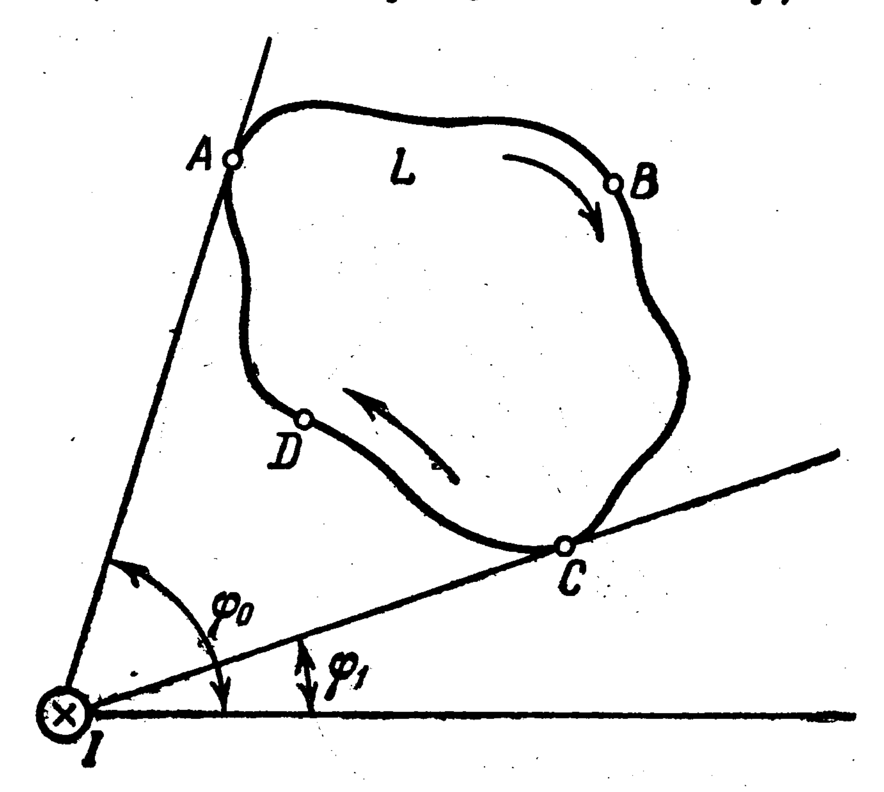


Рис. 3.24.

В рассмотренном случае направление обхода по контуру и направление тока связаны правилом правого винта. При обратном направлении обхода значение циркуляции, сохранив величину, изменит знак.

Если контур, расположенный в магнитном поле, не охватывает тока, то циркуляция магнитного поля по этому контуру будет равна нулю. Рассмотрим случай, аналогичный разобранному выше, но с током, вынесенным за пределы контура (рис. 3.24).

Вычисляя долю циркуляции по участку $A\to B\to C$, будем иметь

$$\int\limits_{A\to B\to C} H_l\,dl = k\cdot 2I\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi.$$

Вторая часть интеграла циркуляции по участку $C\to D\to A$ будет равна первой с обратным знаком, так как интегрирование по φ ведется между теми же пределами, но в обратном порядке:

$$\int\limits_{C\to D\to A} H_l\,dl = k\cdot 2I\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi.$$

Следовательно,

$$\oint H_l\,dl = k\cdot 2I\left\{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} d\varphi\right\} = 0. \qquad (33.10)$$

Этот результат, как и предыдущий, справедлив для контуров любой формы и для любых токов.

Возможны и более сложные случаи, когда контур несколько раз охватывает ток. В этом случае величину I надо считать столько раз, сколько раз контур обвивается вокруг тока с учетом направления вращения и соответственно знака тока. Так, на рис. 3.25, *а* контур охватывает ток два раза, и

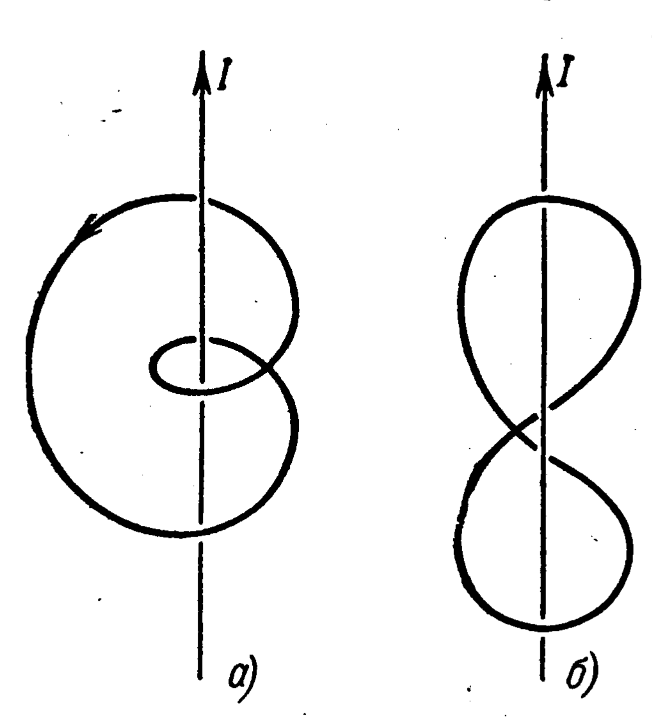


Рис. 3.25.

$$\oint H_l\,dl = k\cdot 4\pi\,(+I+I) = k\cdot 4\pi 2I.$$

На рис. 3.25, *б* контур также охватывает ток два раза, но в противоположных направлениях, и

$$\oint H_l\,dl = k\cdot 4\pi\,(+I-I) = 0.$$

Если магнитное поле создано системой токов $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots, I_N$, то вектор напряженности поля **H** будет равен геометрической сумме полей, создаваемых каждым током в отдельности, а проекция H_l на любое направление будет равна алгебраической сумме проекций отдельных векторов. Циркуляция вектора **H** тогда будет равна сумме слагаемых типа (33.7) или (33.10). Поэтому теорема о циркуляции может быть записана в виде

$$\oint H_l\,dl = k\cdot 4\pi \sum_{n=1}^{n=N} I_n \qquad (33.11)$$

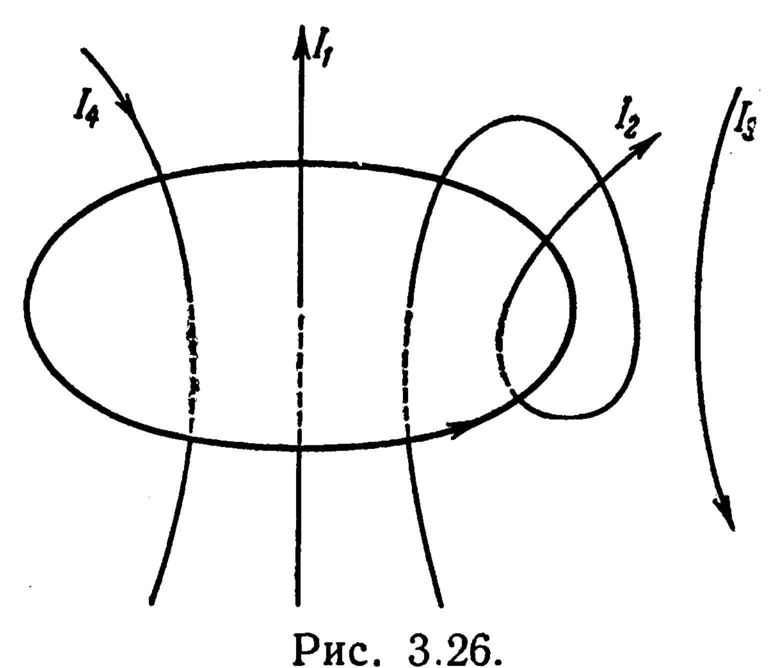


Рис. 3.26.

и читается так: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру численно равна $k\cdot 4\pi$, умноженному на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.* Каждый ток считается столько раз, сколько раз он охватывается нашим контуром. Для системы токов, изображенной на рис. 3.26,

$$\sum_n I_n = I_1 + 2I_2 + 0\cdot I_3 - I_4,$$

т. е. ток I_2 считается два раза, а ток I_3, не охватываемый ни разу, не считается вовсе.

В системе Гаусса соотношение (33.11) примет вид

$$\oint H_l\,dl = \frac{4\pi}{c}\sum_a I_n. \qquad (33.12)$$

В системе СИ $k = \frac{1}{4\pi}$ и

$$\oint H_l\,dl = \sum_a I_n. \qquad (33.13)$$

Теорему о циркуляции (33.11) в электротехнике принято называть **законом полного тока**. Эта теорема в конечном счете является прямым следствием закона Био—Савара—Лапласа.

В качестве примера найдем с помощью теоремы о циркуляции напряженность магнитного поля внутри **соленоида**. Соленоидом называется совокупность одинаковых последовательно соединенных витков, равномерно навитых на общий каркас или сердечник

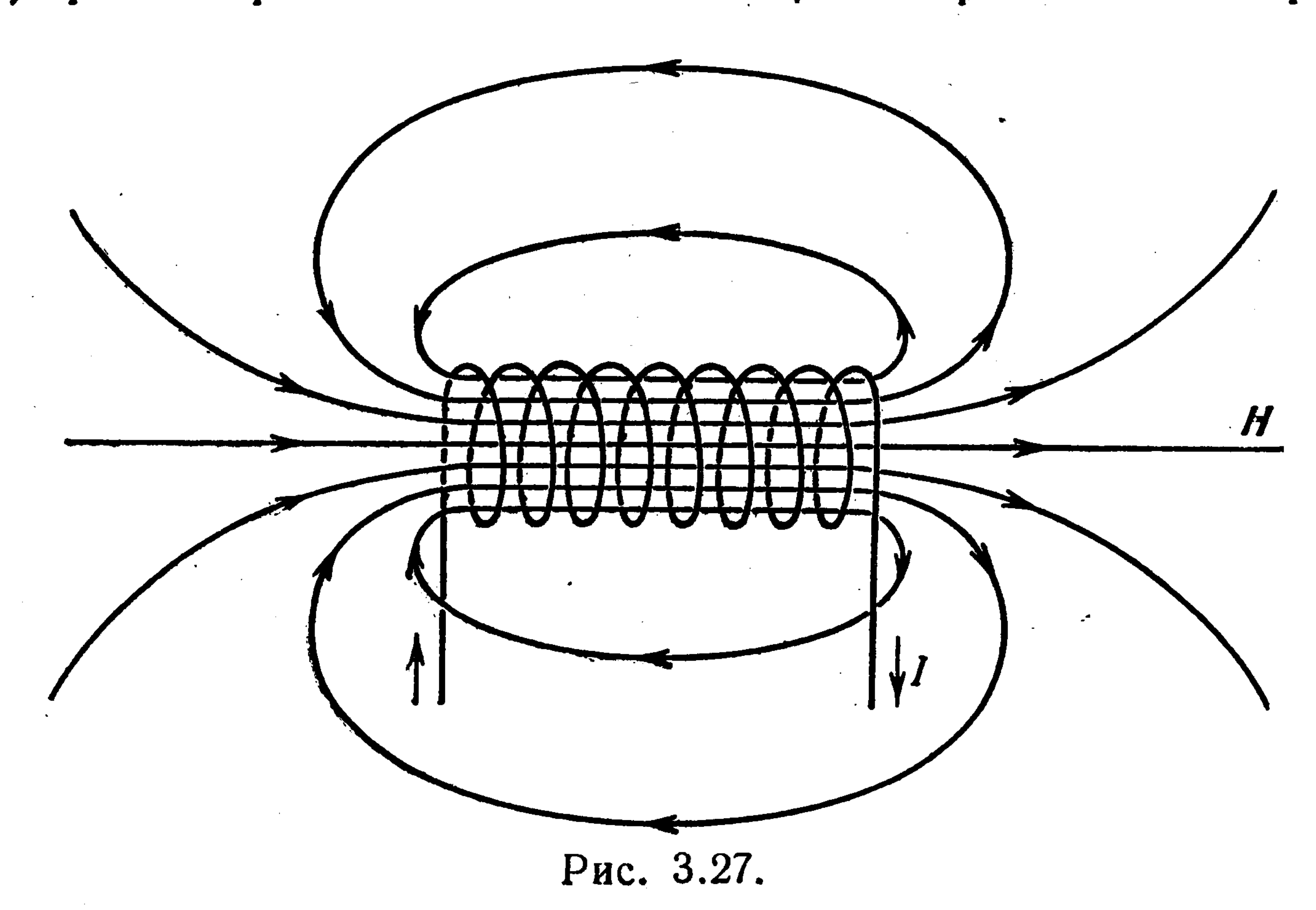


Рис. 3.27.

(рис. 3.27). По виткам проходит одинаковый ток I. Если полная длина соленоида l и полное число витков w, то на единицу длины соленоида приходится

$$w_0 = \frac{w}{l} \qquad (33.14)$$

витков.

Магнитные поля, созданные каждым витком в отдельности, складываются. Линии вектора **H**, охватывающие токи, внутри соленоида расположены густо, а вне его — на больших расстояниях друг от друга, как это показано на рис. 3.27, т. е. напряженность

поля H внутри соленоида велика, а вне его мала и стремится к нулю для бесконечного соленоида.

Если длина соленоида во много раз больше диаметра его витков, то соленоид можно практически считать бесконечно длинным. Магнитное поле такого соленоида целиком сосредоточено внутри него. Вне соленоида $\mathbf{H}=0$, внутри же соленоида линии вектора $\mathbf{H}$, очевидно, могут быть направлены только параллельно его оси,

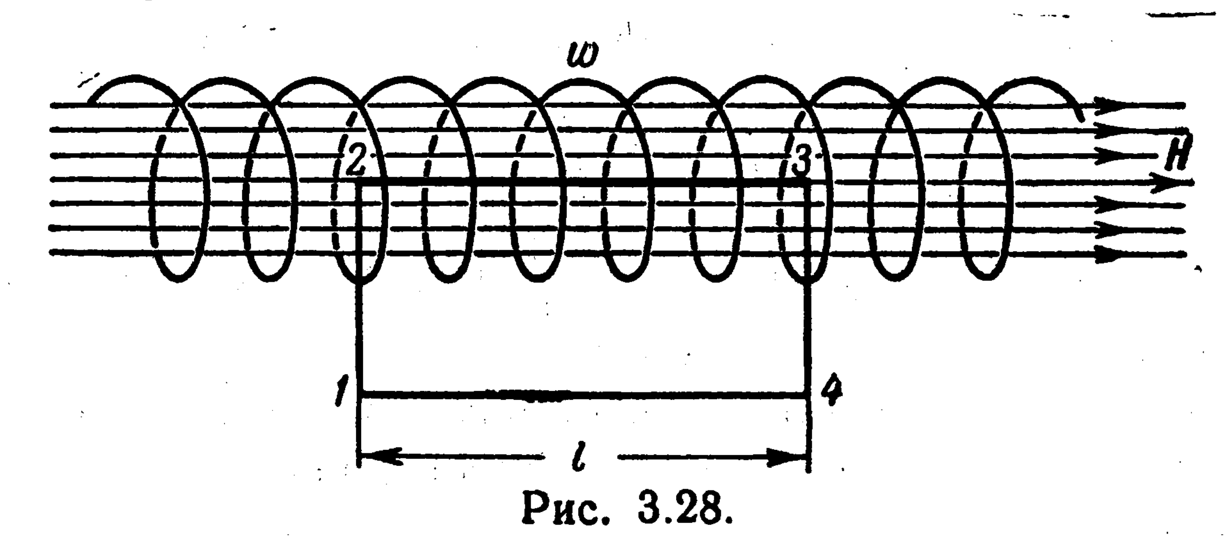


Рис. 3.28.

а величина H может зависеть лишь от расстояния до оси. Для нахождения H в этом случае выделим мысленно конечный участок длины l, на котором расположены w витков, и проведем контур *1 2 3 4 1* (рис. 3.28).

Применяя теорему о циркуляции к этому контуру, получим

$$\int_1^2 H_l\,dl+\int_2^3 H_l\,dl+\int_3^4 H_l\,dl+\int_4^1 H_l\,dl=k\cdot 4\pi wI.$$

На участках *1 2* и *3 4* контур перпендикулярен к линиям поля и $H_l=0$. На участке *4 1* вне соленоида $H=0$, а значит, также и $H_l=0$. Поэтому из четырех интегралов остается один

$$\int_2^3 H_l\,dl=\int_2^3 H\,dl=H\int_2^3 dl=Hl.$$

Следовательно,

$$Hl=k\cdot 4\pi wI$$

и окончательно

$$H_{\text{сол}}=k\frac{4\pi Iw}{l}=k\cdot 4\pi Iw_0=\text{const}. \tag{33.15}$$

Выражение (33.15) показывает, что во всех точках внутри бесконечно длинного прямого соленоида напряженность магнитного поля одинакова по величине и направлению:

$$\mathbf{H}=\text{const}. \tag{33.16}$$

Таким образом, магнитное поле соленоида о д н о р о д н о.

В гауссовой системе ток выражается в СГС единицах, w_0 — числом витков на 1 *см* длины соленоида, H — в *э*, $k = 1/c$ и формула (33.15) принимает вид

$$H_{\text{сол}} = \frac{4\pi}{c} I w_0. \tag{33.17}$$

В системе СИ ток выражается в *a*, w_0 — в числе витков на 1 *м* длины соленоида, H — в *а/м*, $k = 1/4\pi$ и формула (33.15) принимает вид

$$H_{\text{сол}} = I w_0 \frac{a}{м}. \tag{33.18}$$

Благодаря рационализации $\left(k = \frac{1}{4\pi}\right)$ в системе СИ для однородного поля множитель 4π исчезает.

На практике предпочитают иногда измерять ток в амперах, а величины w_0 и H — в единицах СГС. Тогда формулу (33.15) можно записать в виде

$$H(э) = 0{,}4\pi I w_0 \text{ ампер-витков на сантиметр.} \tag{33.19}$$

Формула (33.15) справедлива для достаточно длинного соленоида ($D \ll l$) вдали от его краев. При приближении к концам соленоида линии вектора **H** начинают расходиться и величина напряженности поля падает.

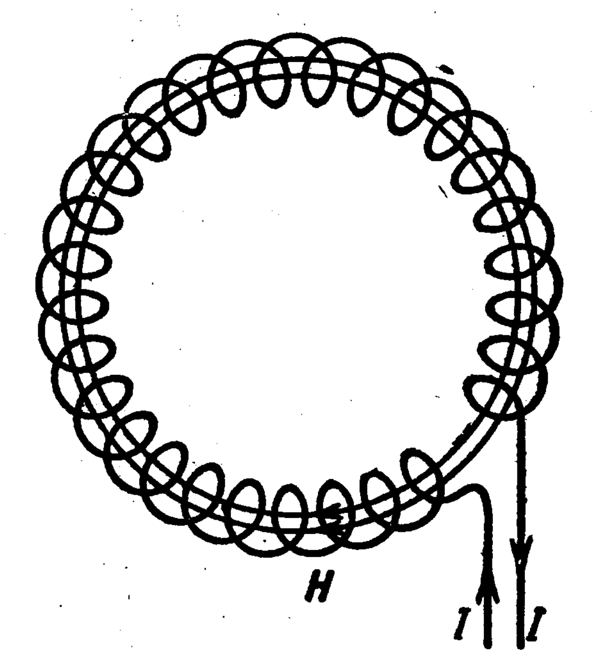


Рис. 3.29.

Подобный краевой эффект отсутствует у соленоида, свитого в кольцо (так называемого т о р о и д а), показанного на рис. 3.29. При этом все магнитное поле сосредоточивается внутри соленоида и линии вектора **H** представляют собой замкнутые концентрические окружности. Выбирая одну из таких окружностей за контур обхода и применяя теорему о циркуляции, легко доказать, что при том же условии $D \ll l$ напряженность магнитного поля в тороиде рассчитывается по прежней формуле (33.15). Длину тороида l при этом следует считать по средней линии, пренебрегая небольшим различием между длинами внутренней и внешней окружностей кольца.

§ 34. Поток вектора магнитной индукции. Магнитные цепи

Поток вектора магнитной индукции вводится так же, как и поток вектора электростатической индукции (см. § 5).

В поле магнитной индукции **B** через площадку dS с единичной нормалью **n** проходит поток магнитной индукции или просто

магнитный поток $d\Phi$, равный, по определению:

$$d\Phi = (\mathbf{Bn})\, dS = B \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{B}})\, dS \tag{34.1}$$

(рис. 3.30). Замечая, что $B\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{B}})$ есть проекция вектора **B** на направление нормали **n**, получим

$$d\Phi = B_n dS. \tag{34.2}$$

Из (34.2) следует, что магнитный поток является скаляром. Считая положительной стороной площадки ту, из которой выходит вектор нормали **n**, мы видим, что если линии индукции выходят из этой стороны площадки, то угол $\alpha = (\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{n}})$ острый, $\cos\alpha > 0$

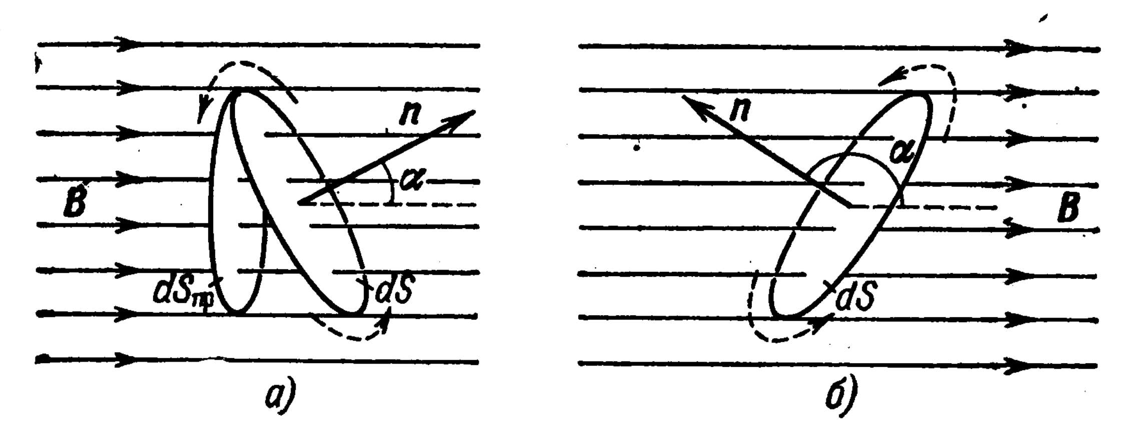


Рис. 3.30.

и магнитный поток положителен (рис. 3.30, *а*). В противоположном случае, когда линии индукции входят в положительную сторону площадки, угол $\alpha = (\widehat{\mathbf{B}, \mathbf{n}})$ тупой, $\cos\alpha < 0$ и магнитный поток отрицателен (рис. 3.30, *б*).

Так, если площадка dS перпендикулярна к линиям магнитной индукции **B**, могут иметь место два случая: векторы $\mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$, тогда $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{B}}) = 1$ и $d\Phi = BdS$; векторы $\mathbf{n} \uparrow\downarrow \mathbf{B}$, тогда $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{B}}) = -1$ и $d\Phi = -BdS$. Что касается направления **n**, то в случае незамкнутой поверхности оно связывается с выбранным направлением обхода по кривой, ограничивающей поверхность по правилу правого винта. На рис. 3.30 выбранное направление обхода показано пунктирными стрелками.

Для вычисления магнитного потока, пронизывающего произвольную криволинейную поверхность S в неоднородном магнитном поле, следует эту поверхность мысленно разбить на бесконечно малые площадки dS, которые можно считать плоскими и в пределах которых поле практически однородно. Для каждой из таких площадок элементарный магнитный поток $d\Phi$ рассчитывается по формуле (34.2). Полный же магнитный поток Φ через всю поверхность S равен алгебраической сумме элементарных потоков, т. е.

представляет собой интеграл по поверхности S:

$$\Phi = \int_S B_n dS. \tag{34.3}$$

Рассмотрим замкнутую поверхность (рис. 3.31). В этом случае поверхность не имеет границы — контура, с направлением обхода которого можно было бы связать направление нормали к точкам поверхности. Здесь можно исходить из другого критерия.

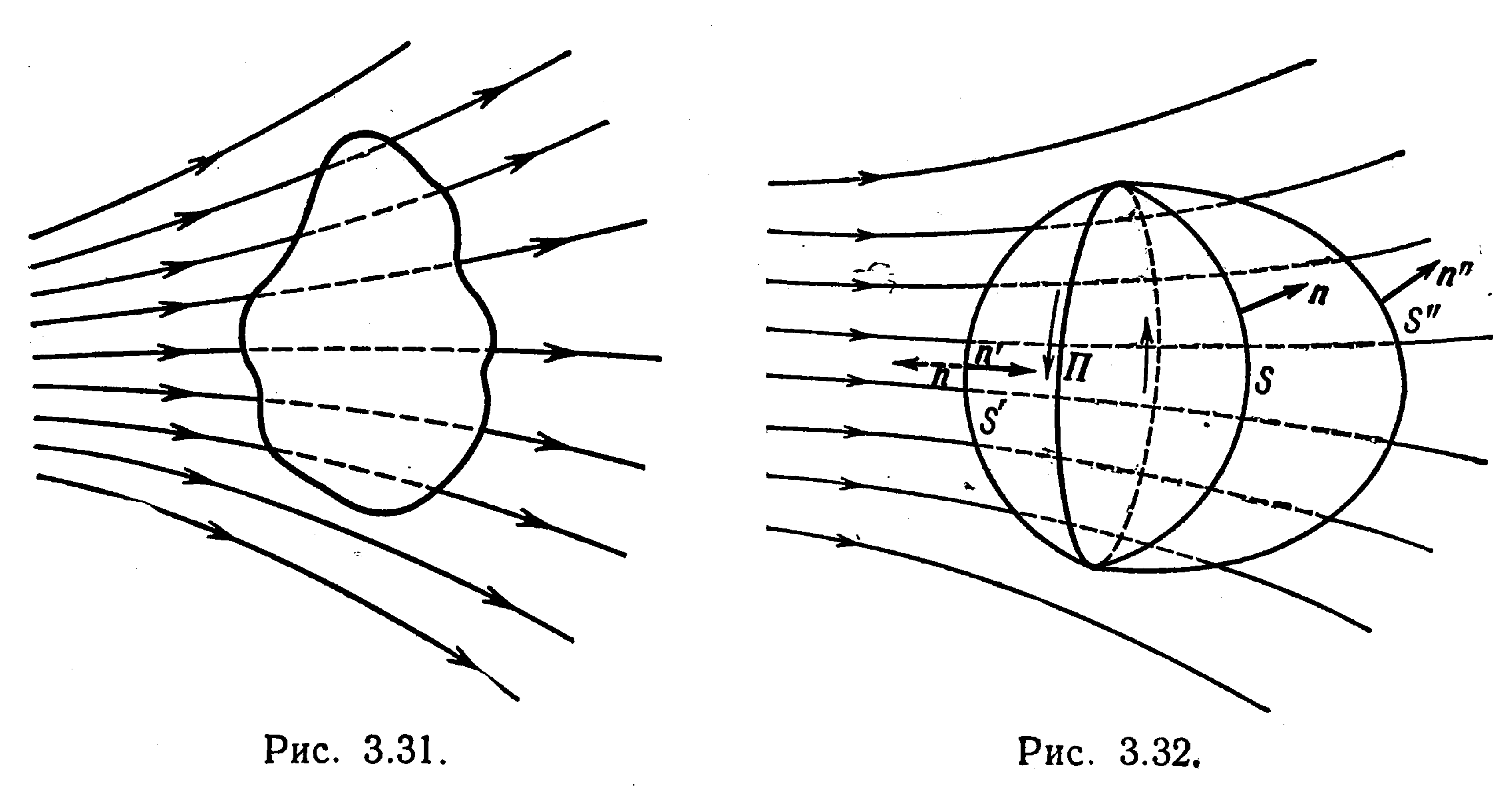


Рис. 3.31. Рис. 3.32.

Если мы хотим, как и в электростатике, приписать потоку выходящему (изнутри поверхности наружу) положительный знак, а входящему — отрицательный, то следует (как и там) пользоваться единичной внешней нормалью к рассматриваемой поверхности (рис. 3.32). Поскольку линии магнитной индукции не имеют источников и являются замкнутыми, число линий, входящих с одной стороны поверхности, в точности равно числу линий, выходящих с другой ее стороны, и сумма (34.3) равна нулю:

$$\oint B_n dS = 0, \tag{34.4}$$

т. е. *магнитный поток через замкнутую поверхность тождественно равен нулю.*

Выделим в магнитном поле произвольный замкнутый контур П и построим произвольную поверхность S, опирающуюся на этот контур (рис. 3.32). Ее будет пронизывать магнитный поток. Но на контур П может опираться любая другая поверхность S', S'' и т. д. Легко видеть, что магнитный поток через любую из этих поверхностей один и тот же — он равен магнитному потоку, пронизывающему П.

Формально это следует из того, что любая поверхность, например S', образует вместе с S замкнутую поверхность, к которой применим результат (34.4). Для этого нужно только нормаль $\mathbf{n}'$ к поверхности S', определенную направлением обхода вокруг П (показанному на рисунке), заменить обратной нормалью $\mathbf{n}$, показанной пунктиром, с тем чтобы эта нормаль, как и $\mathbf{n}$, на поверхности S была внешней к получившемуся замкнутому объему. Разбивая (34.4) на два интеграла по S и S', имеем

$$\oint\limits_{S+S'} B_n ds = \int\limits_{S'(\mathbf{n})} B_n dS + \int\limits_{S(\mathbf{n})} B_n dS = 0.$$

Переходя в первом интеграле от нормали $\mathbf{n}$ к $\mathbf{n}'$, мы меняем тем самым знак этого интеграла, откуда следует

$$\int\limits_{S(\mathbf{n})} B_n dS = \int\limits_{S'(\mathbf{n}')} B_n dS,$$

что и доказывает сделанное утверждение.

О линиях индукции (напряженности) или потоке индукции (напряженности), пронизывающих произвольную поверхность S, натянутую на контур П, мы будем говорить, что они *сцеплены* с контуром П. Согласно сказанному выше поток индукции, сцепленный с контуром П, не зависит от формы поверхности, натянутой на этот контур и пронизываемой потоком.

Таким образом, любая замкнутая линия П в магнитном поле сцеплена с вполне определенным магнитным потоком Φ. Величина этого потока рассчитывается по формуле

$$\Phi_{\Pi} = \int\limits_{S_{\Pi}} B_n dS, \qquad (34.5)$$

где интегрирование производится по *любой* поверхности, опирающейся на контур П.

Из (34.1) определяются единицы магнитного потока: в гауссовой системе такой единицей является *максвелл* (*мкс*):

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \textit{мкс} = 1\ \textit{гс}\cdot 1\ \textit{см}^2, \\ \text{в системе СИ — вебер } (\textit{вб}) \\ \dfrac{1\ \textit{в}\cdot\textit{сек}}{\textit{м}^2}\, 1\ \textit{м}^2 = 1\ \textit{в}\cdot\textit{сек} = 1\ \textit{вб} \end{array}\right\} \qquad (34.6)$$

связь между ними:

$$1\ \textit{вб} = 10^4\ \textit{гс}\cdot 10^4\ \textit{см}^2 = 10^8\ \textit{мкс}. \qquad (34.7)$$

Введение вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ и магнитного потока Φ позволяет сравнительно просто рассчитывать *магнитные цепи*,

содержащие элементы с различными сечениями и магнитными проницаемостями. Рассмотрим для примера простейшую магнитную цепь, состоящую из кольцеобразного сердечника с узким воздушным зазором (рис. 3.33). Магнитное поле создается током I в обмотке сердечника, имеющей w витков. Проведем показанную на рисунке штрих-пунктиром замкнутую линию, охватывающую все токи. Часть этой линии l_c проходит внутри сердечника, а часть $l_в$ — в воздушном зазоре. Тогда по закону полного тока (33.11)—(33.13)

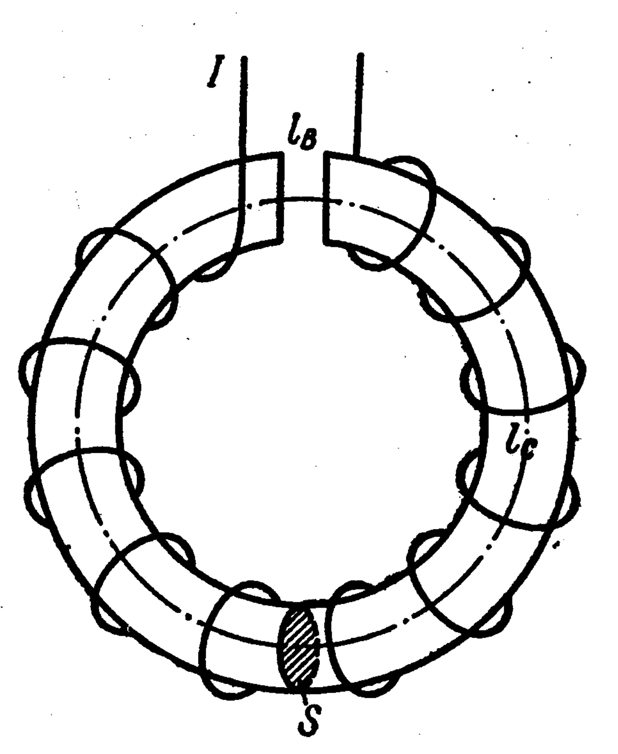


Рис. 3.33.

$$\oint H_l dl = k \cdot 4\pi I w. \tag{34.8}$$

Обозначим магнитную проницаемость материала сердечника через $\mu_с$ и магнитную проницаемость воздуха через $\mu_в$. Поле внутри сердечника и в воздушном зазоре будем считать однородным, т. е. пренебрежем некоторым рассеянием линий индукции. Последние непрерывны, и величина B в сердечнике и зазоре практически одинакова. Напряженности же поля в сердечнике $H_с$ и в зазоре $H_в$ различны и равны соответственно

$$H_с = \frac{B}{\mu_с \mu_0} \text{ и } H_в = \frac{B}{\mu_в \mu_0}. \tag{34.9}$$

Следовательно,

$$\oint H_l dl = H_с l_с + H_в l_в = B\left(\frac{l_с}{\mu_с \mu_0} + \frac{l_в}{\mu_в \mu_0}\right) \tag{34.10}$$

и из (34.8) и (34.10) имеем

$$B = k\mu_0 \frac{4\pi I w}{\frac{l_с}{\mu_с} + \frac{l_в}{\mu_в}}. \tag{34.11}$$

В отсутствие воздушного зазора, если его заполнить тем же материалом, из которого сделан сердечник, магнитная индукция равна

$$B_0 = k\mu_0 \frac{4\pi I w}{\frac{l_с}{\mu_с} + \frac{l_в}{\mu_с}}. \tag{34.12}$$

Так как сердечники катушек делаются обычно из ферромагнитных материалов, у которых $\mu_с \gg \mu_в$, то из сравнения (34.11) и (34.12) видно, что $B < B_0$, т. е. наличие воздушного зазора ослабляет магнитное поле во всей катушке. Чтобы этого не происходило, длина воздушного промежутка должна быть очень мала по

сравнению с длиной сердечника и должна удовлетворять неравенству

$$\frac{l_в}{\mu_в} \ll \frac{l_с}{\mu_с}, \quad \text{т. е.} \quad l_в \ll \frac{\mu_в}{\mu_с} l_с \ll l_с. \tag{34.13}$$

Умножив обе части равенства (34.11) на площадь поперечного сечения сердечника S, можно привести его к виду

$$\Phi = BS = k \frac{4\pi I w}{\frac{1}{\mu_с \mu_0} \frac{l_с}{S} + \frac{1}{\mu_в \mu_0} \frac{l_в}{S}}, \tag{34.14}$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий сердечник и воздушный зазор.

Равенство (34.14) по внешнему виду напоминает закон Ома для постоянного тока I, идущего под действием электродвижущей силы $\mathscr{E}$ через цепь из двух линейных проводников с длинами l_1 и l_2, удельными проводимостями γ_1 и γ_2 и сечением S:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathscr{E}}{\frac{1}{\gamma_1} \frac{l_1}{S} + \frac{1}{\gamma_2} \frac{l_2}{S}}, \tag{34.15}$$

где $R_1 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{l_1}{S}$ и $R_2 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{l_2}{S}$ — электрические сопротивления этих проводников, а $R = R_1 + R_2$ — полное сопротивление всей цепи. По аналогии с (34.15) соотношение (34.14) называют **законом Ома для магнитной цепи**.

Величина

$$k \cdot 4\pi I w = \mathscr{E}_м, \tag{34.16}$$

создающая магнитный поток Φ, называется намагничивающей или **магнитодвижущей силой**. Величины

$$R_{м.\,с} = \frac{1}{\mu_с \mu_0} \frac{l_с}{S} \quad \text{и} \quad R_{м.\,в} = \frac{1}{\mu_в \mu_0} \frac{l_в}{S} \tag{34.17}$$

называются соответственно **магнитными сопротивлениями** сердечника и воздушного зазора, а их сумма

$$R_м = R_{м.\,с} + R_{м.\,в} \tag{34.18}$$

— **полным магнитным сопротивлением цепи** при последовательном соединении.

При введенных обозначениях закон Ома для магнитной цепи (34.14) принимает вид

$$\Phi = \frac{\mathscr{E}_м}{R_м} = \frac{\mathscr{E}_м}{R_{м.\,с} + R_{м.\,в}}. \tag{34.19}$$

Для расчета сложных разветвленных магнитных цепей применяются правила, аналогичные используемым для разветвленных

электрических цепей правилам Кирхгофа. В узлах, где сходятся несколько магнитопроводов, выполняется первое правило Кирхгофа

$$\sum_i \Phi_i = 0, \qquad (34.20)$$

т. е. алгебраическая сумма магнитных потоков, сходящихся в узел, равна нулю.

Для замкнутых участков магнитной цепи, содержащих несколько магнитодвижущих сил $\mathscr{E}_{\text{м.}\,j} = k \cdot 4\pi I_j w_j$ и несколько магнитных сопротивлений $R_{\text{м},\,i} = \frac{1}{\mu_i \mu_0} \frac{l_i}{S_i}$, которые пронизываются соответствующими магнитными потоками Φ_i, выполняется второе правило Кирхгофа

$$\sum_i \Phi_i R_{\text{м},i} = \sum_j \mathscr{E}_{\text{м},j} \qquad (34.21)$$

— алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления последовательных участков замкнутого контура равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этом контуре.

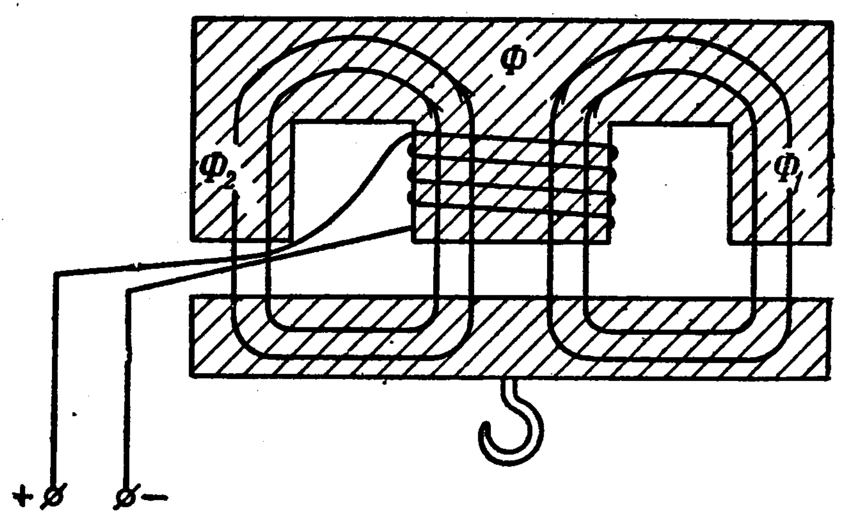


Рис. 3.34.

Для примера на рис. 3.34 приведен разветвленный контур, состоящий из электромагнита и якоря с воздушными зазорами. Как указывалось выше, при рассмотрении предыдущего примера, по мере уменьшения воздушного зазора уменьшается магнитное сопротивление цепи и возрастают магнитные потоки, магнитная индукция и намагниченность сердечника и якоря. Вследствие этого по мере приближения якоря к электромагниту резко возрастают силы притяжения между ними.

§ 35. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Проводник с током, помещенный в магнитное поле, испытывает пондеромоторную силу. При перемещении проводника с током поле производит работу. Для вычисления этой работы рассмотрим линейный проводник длиной l с током I, перемещающийся в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = \text{const}$. Расположение деталей прибора изображено на рис. 3.35, *а*; схема поля, тока, сил и перемещений приведена на рис. 3.35, *б*. Вектор **B** перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за эту плоскость, что изображено на чертеже крестиками. На элемент тока Il действует со стороны магнитного поля,

согласно (31.2), сила

$$F = k'IlB, \tag{35.1}$$

так как угол β между направлением тока и линиями индукции равен 90° и $\sin\beta = 1$.

Переместим провод параллельно самому себе на расстояние dx по направлению действия силы F. При этом магнитное поле совершит работу

$$dA = F\,dx = k'IBl\,dx = k'IB\,dS = k'I\,d\Phi,$$

так как $l\,dx = dS$ есть площадь, очерчиваемая проводом при его перемещении в магнитном поле, а $B\,dS = d\Phi$ — магнитный поток, пронизывающий эту площадь. Таким образом,

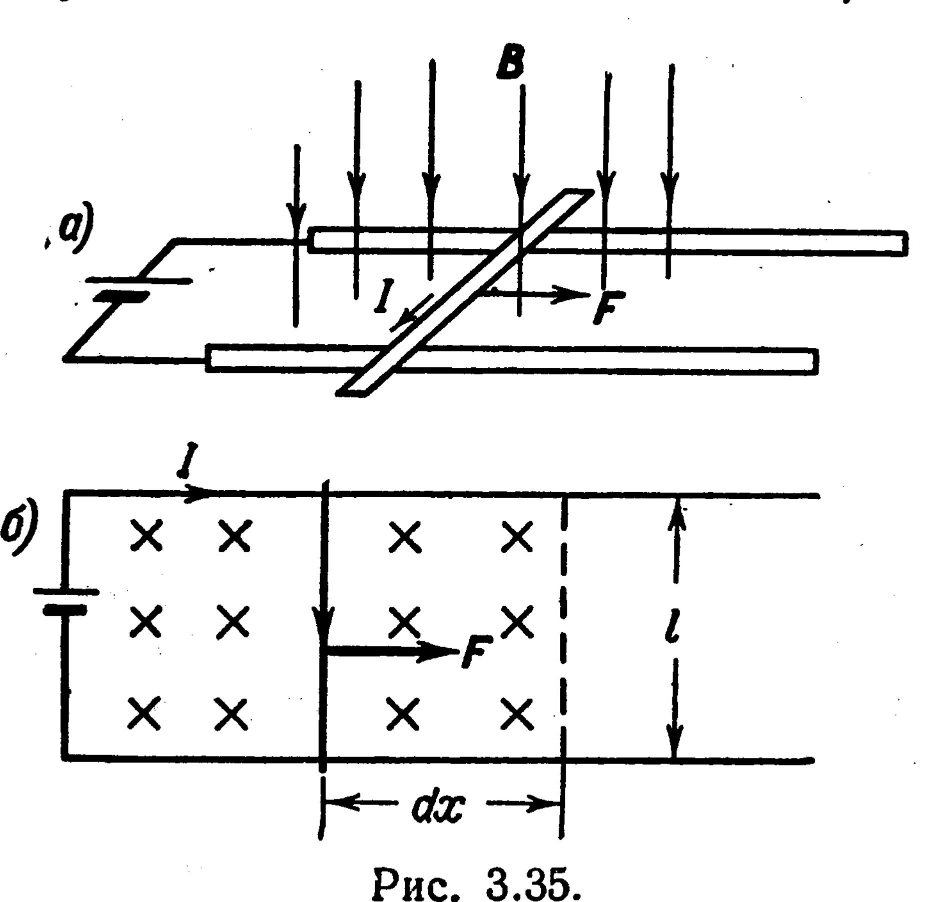


Рис. 3.35.

$$dA = k'I\,d\Phi, \tag{35.2}$$

т. е. работа, совершаемая проводником с током при перемещении его в магнитном поле, численно равна произведению тока I на магнитный поток $d\Phi$, ***пересеченный движущимся проводником.***

Формула (35.2) остается справедливой и в случае, если проводник движется не перпендикулярно к линиям магнитной индукции, а под некоторым углом к ним. В системе СГС ток I выражается в СГС ед. тока, магнитный поток $d\Phi$ — в *мкс* и работа dA — в *эрг*. В системе СИ ток выражается в *а*, магнитный поток — в *в·сек* (*вб*), $k' = 1$ и работа получается в *дж*.

Выведем теперь выражение для работы перемещения замкнутого контура с током в магнитном поле. Для упрощения вычислений рассмотрим прямоугольный контур с током *1 2 3 4 1*, плоскость которого перпендикулярна к линиям вектора магнитной индукции **B** (рис. 3.36). Линии индукции направлены за плоскость чертежа. Ток направлен по часовой стрелке, и магнитный поток Φ_1, сцепленный с контуром, положителен.

Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение *1′ 2′ 3′ 4′ 1′*. Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным, и в новом положении с контуром будет сцеплен магнитный поток Φ_2. Проведем пунктирные линии *3 2′* и *4 1′*, вдоль которых двигались стороны контура. Эти линии выделяют площадку *3 2′ 1′ 4*, расположенную между старым и новым

положениями контура и пронизываемую некоторым магнитным потоком Φ'.

Полная работа A по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершенных магнитным полем по перемещению каждой из четырех сторон:

$$A = A_{1,2} + A_{2,3} + A_{3,4} + A_{4,1}. \tag{35.3}$$

Величины $A_{2,3} = A_{4,1} = 0$, так как соответствующие стороны при своем перемещении очерчивают нулевую площадь и не перерезают магнитного потока. Сторона *3 4* пересекает поток $\Phi' + \Phi_2$, и

$$A_{3,4} = k'I(\Phi' + \Phi_2). \tag{35.4}$$

Провод *1 2* пересекает поток $\Phi_1 + \Phi'$, но движется против сил действия магнитного поля, и

$$A_{1,2} = -k'I(\Phi_1 + \Phi'). \tag{35.5}$$

Из (35.3)—(35.5) окончательно находим

$$A = k'I(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{35.6}$$

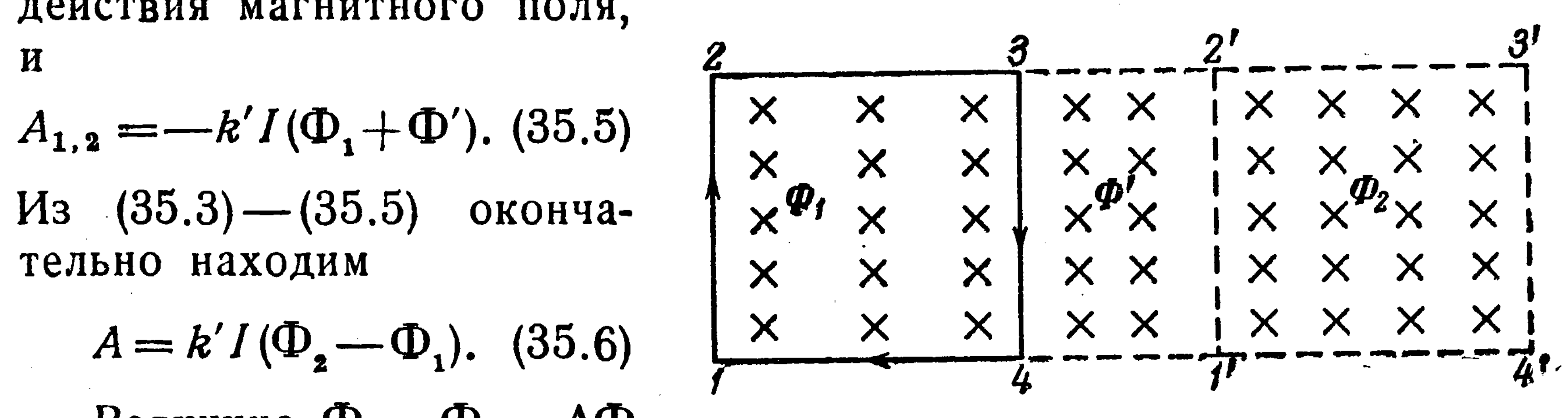


Рис. 3.36.

Величина $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ представляет собой и з м е н е н и е магнитного потока, сцепленного с контуром. Для элементарного перемещения

$$dA = k'I\,d\Phi, \tag{35.7}$$

т. е. работа dA, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле, численно равна произведению величины тока I на *изменение* магнитного потока, *сцепленного с контуром*. Формулы (35.2) и (35.7) внешне тождественны, но физический смысл величин $d\Phi$ в них существенно различен.

Соотношение (35.7), выведенное нами для простейшего случая, остается справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле. Более того, *если контур неподвижен, а меняется вектор магнитной индукции (в результате перемещения источников магнитной индукции или изменения токов в них), то при изменении магнитного потока в контуре на величину $d\Phi$ магнитное поле совершает работу dA, рассчитываемую по той же формуле* (35.7).

ГЛАВА VIII

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 36. Движение зарядов в магнитном поле

Сила, которую испытывает элемент тока, помещенный в магнитное поле, есть результирующая всех сил, действующих на отдельные заряды, движущиеся в этом элементе. Это позволяет найти силу, действующую на одиночный заряд, перемещающийся в магнитном поле.

Элемент тока, изображенный на рис. 3.37, имеет длину dl и конечную площадь поперечного сечения S. Для упрощения рассуждений примем, что в проводнике имеет место ток зарядов одного знака. Величину каждого заряда обозначим через e, число таких зарядов в единице объема проводника — через n и среднюю скорость их направленного движения в проводнике — через v. Тогда ток I равен

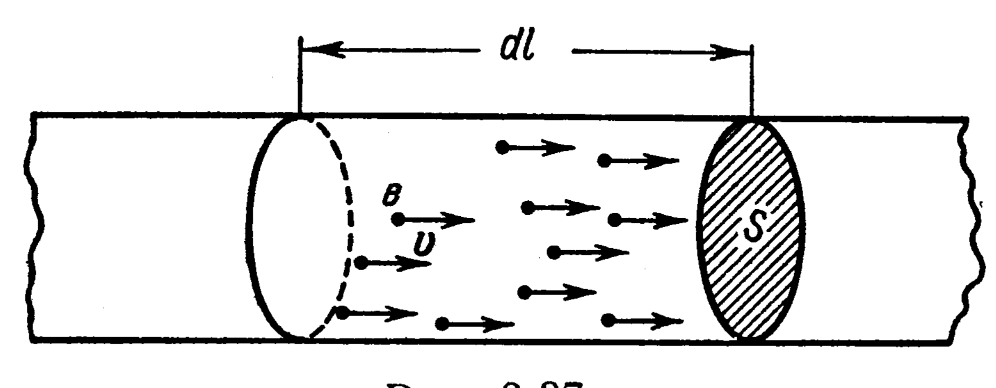


Рис. 3.37.

$$I = jS = nevS$$

и

$$I\,dl = evnS\,dl = evN, \qquad (36.1)$$

где $N = nS\,dl$ есть полное число движущихся зарядов в элементе тока. Поскольку векторы $d\mathbf{l}$ и $e\mathbf{v}$ параллельны друг другу (при $e > 0$ $\mathbf{v}\uparrow\uparrow d\mathbf{l}$, при $e < 0$ $\mathbf{v}\uparrow\downarrow d\mathbf{l}$, так что $e\mathbf{v}\uparrow\uparrow d\mathbf{l}$ при любом знаке заряда e), то

$$I\,d\mathbf{l} = Ne\mathbf{v}. \qquad (36.2)$$

В этой главе мы будем рассматривать движение заряженных частиц в магнитных и в электрических полях. Как уже указывалось, для расчета электромагнитных воздействий на отдельные заряженные

частицы удобно применять абсолютную гауссову систему единиц, которой мы и будем пользоваться в этой главе.

Поместим рассматриваемый элемент тока в постоянное магнитное поле. По закону Ампера (32.9) на этот элемент тока будет действовать сила

$$d\mathbf{F}=\frac{1}{c}[I\,d\mathbf{l}\times\mathbf{B}]=\frac{Ne}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \qquad (36.3)$$

Отсюда сила, действующая на одиночный заряд e, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$, будет равна

$$\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{F}}{N}=\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \qquad (36.4)$$

Величина этой силы равна

$$f=\frac{e}{c}vB\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{B}}). \qquad (36.5)$$

Сила, действующая на одиночный электрический заряд в магнитном поле,

$$\mathbf{f}=e\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right], \qquad (36.6)$$

называется лоренцовой силой.

Поскольку в данной главе мы будем изучать движение заряженных частиц в вакууме или достаточно разреженном газе, а в абсолютных системах $\mathbf{B}_{\text{вак}}=\mathbf{H}$, то формулу (36.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{f}=\frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]. \qquad (36.7)$$

Здесь e измеряется в СГС ед. заряда, H — в *э*, v и c — в *см/сек* и f — в *дин**).

Взаимная ориентация векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{f}$ показана для случая положительных зарядов ($e>0$) на рис. 3.38, *а* и для случая отрицательных зарядов ($e<0$) на рис. 3.38, *б*. Величина этой силы зависит от угла β между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ и равна

$$f=\frac{e}{c}vH\sin\beta. \qquad (36.8)$$

Отсюда видно, что магнитное поле не действует на заряженную частицу в двух случаях: если $\mathbf{v}=0$, т. е. частица неподвижна, или если $\sin\beta=0$ и $\mathbf{v}\parallel\mathbf{H}$, когда частица движется вдоль линий магнитного поля.

---

*) В системе СИ формулы (36.6) и (36.7) примут вид

$$\mathbf{f}=e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]=\mu_0 e[\mathbf{v}\times\mathbf{H}].$$

Обозначим массу движущейся частицы через m. Тогда по второму закону Ньютона частица получает ускорение $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}=\frac{\mathbf{f}}{m}. \qquad (36.9)$$

Подставляя в (36.9) значение $\mathbf{f}$ из (36.7), получаем

$$\mathbf{w}=\frac{e}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]. \qquad (36.10)$$

При произвольном движении вектор ускорения $\mathbf{w}$ имеет две составляющие — касательное ускорение $\mathbf{w}_к$ и нормальное $\mathbf{w}_н$. Анализируя (36.10), мы видим, что при движении заряда в магнитном поле его ускорение $\mathbf{w}$ перпендикулярно к скорости $\mathbf{v}$, т. е. всегда направлено по нормали к траектории. Это следует из того, что вектор $[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]$, в соответствии с правилами векторного умножения, перпендикулярен к вектору $\mathbf{v}$ (и, конечно, к вектору $\mathbf{H}$). Следовательно, в этом случае

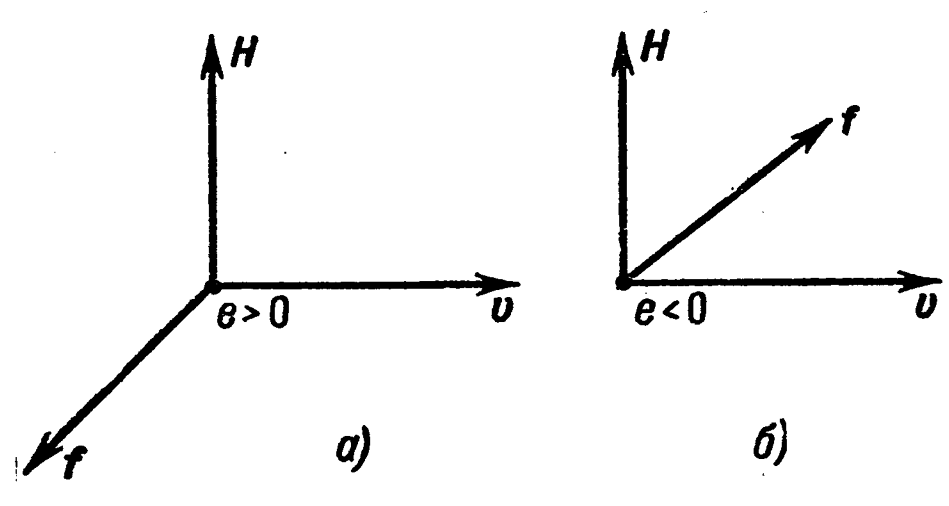


Рис. 3.38.

$$\left.\begin{aligned} w_к&=0,\\ w_н&=\frac{e}{mc}vH\sin(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{H}}). \end{aligned}\right\} \qquad (36.11)$$

Вспомним (том I, часть I), что изменение **величины** вектора скорости обусловлено составляющей ускорения $w_к=\frac{dv}{dt}$, в то время как составляющая ускорения $w_н$ изменяет направление вектора скорости, **не меняя его величины**. Следовательно, в нашем случае имеем

$$\frac{dv}{dt}=0, \quad \text{или} \quad v=\text{const}. \qquad (36.12)$$

Значит, при движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле скорость ее движения $\mathbf{v}$ **может изменяться лишь по направлению**. Абсолютная же величина скорости v остается неизменной, а значит, не меняется и кинетическая энергия частицы:

$$E_{кин}=\frac{mv^2}{2}=\text{const}, \qquad (36.13)$$

т. е. *постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей*. Это может быть получено и из непосредственного рассмотрения выражения для силы $\mathbf{f}$, дей-

ствующей на заряд, движущийся в магнитном поле. Согласно (36.7) эта сила перпендикулярна к скорости, т. е. перпендикулярна к направлению траектории частицы, и поэтому работа силы равна нулю.

Следует подчеркнуть, что *неизменность величины скорости и кинетической энергии заряженной частицы в магнитном поле имеет место лишь в том случае, если это поле постоянно, не зависит от времени.* В главе IX будет показано, что переменное магнитное поле ускоряет заряженные частицы (точнее, меняет не только направление, но и величину скорости).

Нормальное ускорение $w_н$ всегда равно v^2/r, где r есть радиус кривизны траектории в данной точке (см. т. I, гл. I). Из (36.11) тогда получаем соотношение

$$\frac{v^2}{r}=\frac{e}{mc}vH\sin\beta, \quad \text{или} \quad r=\frac{mcv}{eH\sin\beta}, \tag{36.14}$$

позволяющее определить радиус кривизны во всех точках траектории частицы. Разберем два простейших примера.

Пример 1. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле $\mathbf{H}=\mathrm{const}$ с начальной скоростью $\mathbf{v}$, направленной перпендикулярно к вектору напряженности магнитного поля ($\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$). Поскольку $\mathbf{f}$ и $\mathbf{w}$ тоже перпендикулярны к $\mathbf{H}$, то в дальнейшем вектор скорости будет оставаться перпендикулярным к $\mathbf{H}$, и вся траектория будет лежать в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля. Тогда $\sin\beta=\sin 90^\circ=1$, и из (36.14) получаем, что

$$r=\frac{mcv}{eH}=\mathrm{const} \tag{36.15}$$

— радиус кривизны траектории остается постоянным, а сама траектория есть окружность радиуса r. Этот радиус для частиц данной природы (т. е. для данных значений m и e или для частиц с данным отношением e/m) прямо пропорционален скорости частицы v и обратно пропорционален напряженности магнитного поля H. Длина окружности

$$L=2\pi r=2\pi\frac{mcv}{eH} \tag{36.16}$$

также пропорциональна скорости частицы, а период обращения ее в поле

$$T=\frac{L}{v}=2\pi\frac{mc}{eH} \tag{36.17}$$

зависит не от скорости v, а только от напряженности магнитного поля H, заряда e и массы m частицы. Независимость периода обращения T от скорости v и кинетической энергии частицы играет важную роль в практических приложениях (например, в ускорителе тяжелых частиц — циклотроне, см. стр. 231, 232).

Пример 2. Частица влетает в однородное магнитное поле $H = \text{const}$, и направление вектора ее скорости $\mathbf{v}$ составляет с линиями магнитного поля угол β, отличный от 90°. Мы можем разложить $\mathbf{v}$ на две составляющие: перпендикулярную ($\mathbf{v}_\perp$) и параллельную ($\mathbf{v}_\parallel$) полю, как показано на рис. 3.39. Величины этих составляющих равны

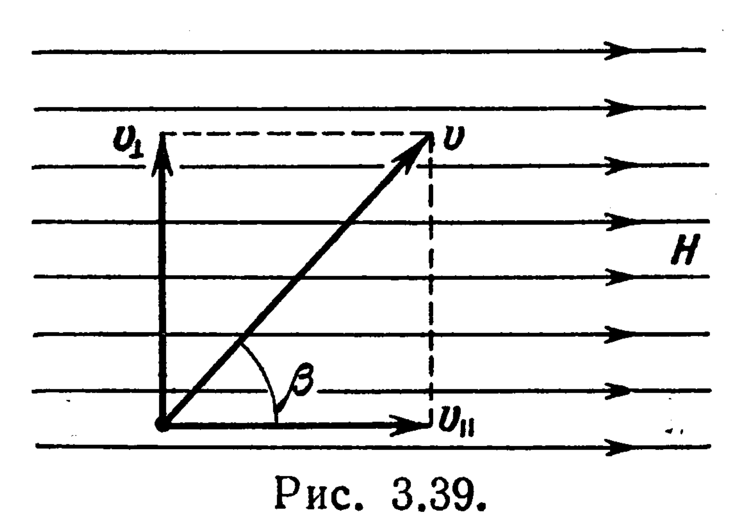


Рис. 3.39.

$$v_\parallel = v \cos\beta \text{ и } v_\perp = v \sin\beta. \tag{36.18}$$

Сила, действующая на частицу,

$$f = \frac{e}{c} Hv \sin\beta = \frac{e}{c} Hv_\perp \tag{36.19}$$

лежит в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, определяется величиной вектора $\mathbf{v}_\perp$ и изменяет его направление.

Движение частицы при этом можно представлять как сумму двух независимых движений. Одно из них происходит в направлении $\mathbf{H}$, а другое — в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{H}$, в которой действует сила $\mathbf{f}$. Испытывая эту силу, частица будет вращаться по окружности радиуса

$$R = \frac{mcv_\perp}{eH} = \frac{mcv \sin\beta}{eH} \tag{36.20}$$

в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля, и будет совершать один оборот за время T, определяемое из (36.17).

С другой стороны, поскольку $\mathbf{f} \perp \mathbf{H}$ и $\mathbf{f} \perp \mathbf{v}_\parallel$, то частица будет двигаться вдоль линий магнитного поля с постоянной поступательной скоростью $\mathbf{v}_\parallel = \text{const}$. Вследствие наложения этих двух движений — поступательного вдоль линий поля и вращательного в перпендикулярной к ним плоскости — частица будет двигаться по винтовой линии с шагом винта

$$h = v_\parallel T = 2\pi \frac{mc}{eH} v \cos\beta. \tag{36.21}$$

Рассмотренные простейшие примеры показывают, что заряженные частицы, влетающие в постоянное магнитное поле, изменяют направление своего движения и начинают «навиваться» на линии вектора $\mathbf{H}$. Этим свойством пользуются в некоторых приборах, чтобы удержать пучки заряженных частиц от расплывания. Если частица движется точно вдоль линии $\mathbf{H}$, то магнитное поле не оказывает на нее никакого воздействия ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$ и $\mathbf{f} = 0$). Если же частица по каким-либо причинам получит составляющую скорости $\mathbf{v}_\perp$, перпендикулярную к линиям поля, то она все равно не уйдет далеко в сторону от заданной траектории и будет двигаться по винтовой линии, навиваясь на эту траекторию.

Из мирового пространства на Землю приходят потоки заряженных частиц большой энергии—космические лучи. Кроме того, на Землю падает поток заряженных частиц, испускаемых Солнцем. При приближении к земной поверхности эти частицы начинают испытывать действие магнитного поля Земли. На рис. 3.40 показано изменение их траекторий. Те из них, которые направляются к магнитным полюсам Земли, будут двигаться почти вдоль линий земного магнитного поля и навиваться на последние. Так как по мере приближения к земной поверхности напряженность магнитного поля H возрастает, то согласно (36.20) радиус окружности винтовой линии будет уменьшаться.

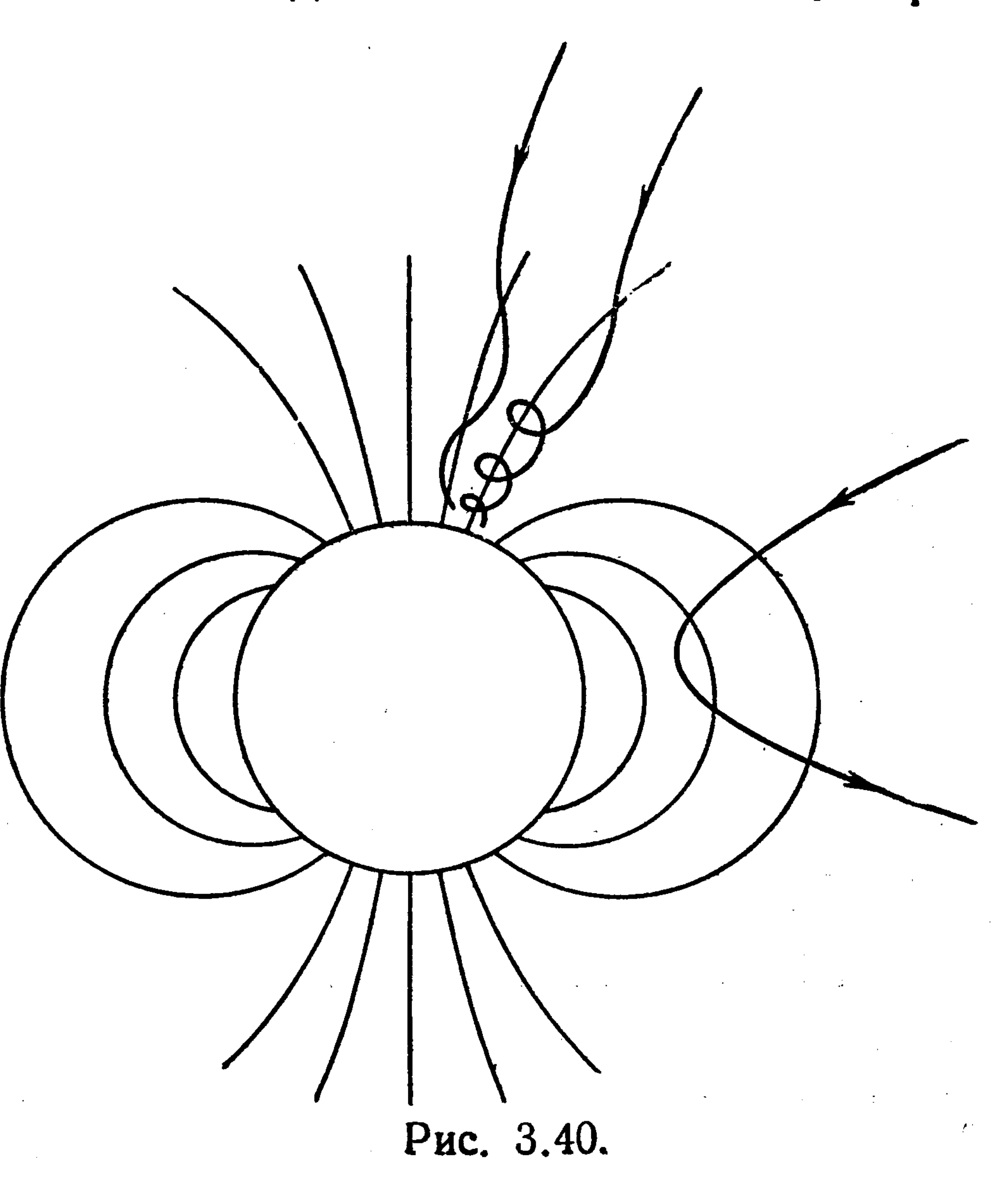


Рис. 3.40.

Заряженные частицы, подходящие к Земле вблизи экваториальной плоскости, направлены почти перпендикулярно к линиям магнитного поля и отклоняются в сторону от своего первоначального направления. Лишь самые быстрые из них ($R \sim v$) смогут дойти до поверхности Земли. Такова причина так называемого широтного эффекта, заключающегося в том, что интенсивность космических лучей, доходящих до Земли вблизи экватора, заметно меньше, чем в более высоких широтах. Этим же обстоятельством объясняется и то, что свечение в верхних слоях атмосферы, вызываемое корпускулярным излучением Солнца, наблюдается главным образом в полярных областях (полярные сияния).

Независимость периода обращения T от скорости частицы в однородном магнитном поле была использована в ускорителе заряженных частиц, названном циклотроном, применяемом для исследований атомных ядер. Мощное, почти однородное магнитное поле создается между громадными полюсными наконечниками электромагнита, диаметр которых достигает иногда нескольких метров. В этом поле помещается вакуумная камера, в которой ускоряемые частицы могут двигаться, практически не испытывая столкновений с молекулами воздуха. Важнейшей частью этой камеры являются находящиеся в ней дуанты—плоские металлические полукруглые коробки, показанные на рис. 3.41. На дуанты подается переменное

напряжение, так что в щели между ними возникает электрическое поле, способное ускорять заряженные частицы.

Ускоряемые частицы — чаще всего протоны или другие ядра — вводятся в циклотрон вблизи от центра прибора и, обладая малой скоростью, описывают согласно (36.15) дугу окружности малого радиуса. Проходя в электрическом поле между дуантами, они ускоряются и во второй половине дуантов проходят по дуге большего радиуса, но за то же самое время, равное половине периода T:

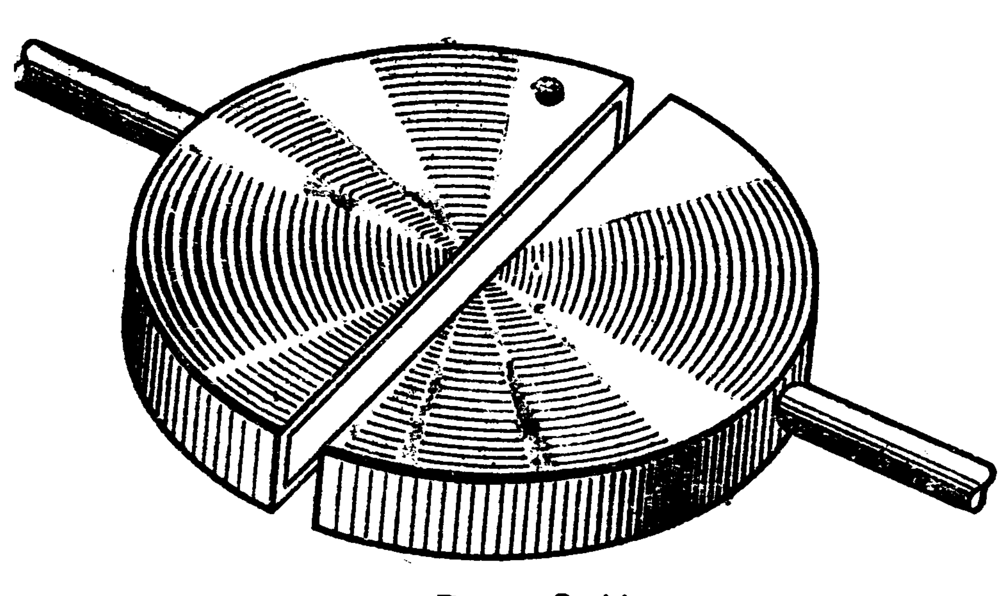


Рис. 3.41.

$$\frac{T}{2}=\pi\frac{mc}{eH}. \qquad (36.22)$$

Если подобрать период подаваемого на дуанты напряжения равным T, то частицы, проходя между ними, будут в обоих полупериодах ускоряться. При этом радиусы полуокружностей, описываемых в каждом дуанте, будут возрастать, но время совершения оборота T в дуантах будет оставаться постоянным, что позволяет подавать на дуанты переменное напряжение постоянной частоты (значение которой зависит только от e/m для ускоряемых частиц и от напряженности магнитного поля H).

Чтобы ускоряемые частицы оставались в центральной плоскости прибора и не отклонялись к верхней или нижней стенкам дуантов, применяется следующий способ. Полюсам электромагнита придается такая форма, что зазор между ними увеличивается к краям (рис. 3.42). Если, например, заряженная частица приобретет вертикальную составляющую скорости и отклонится вверх, то, как видно из рисунка, в несколько неоднородном поле **H** возникает вертикальная составляющая силы, возвращающая частицу обратно в экваториальную плоскость прибора (скорость частицы **v** направлена от нас перпендикулярно к плоскости рисунка, что показано крестиком). Таким образом устраняется потеря частиц, неизбежная при отсутствии сил, удерживающих их в плоскости траектории. Доходя до

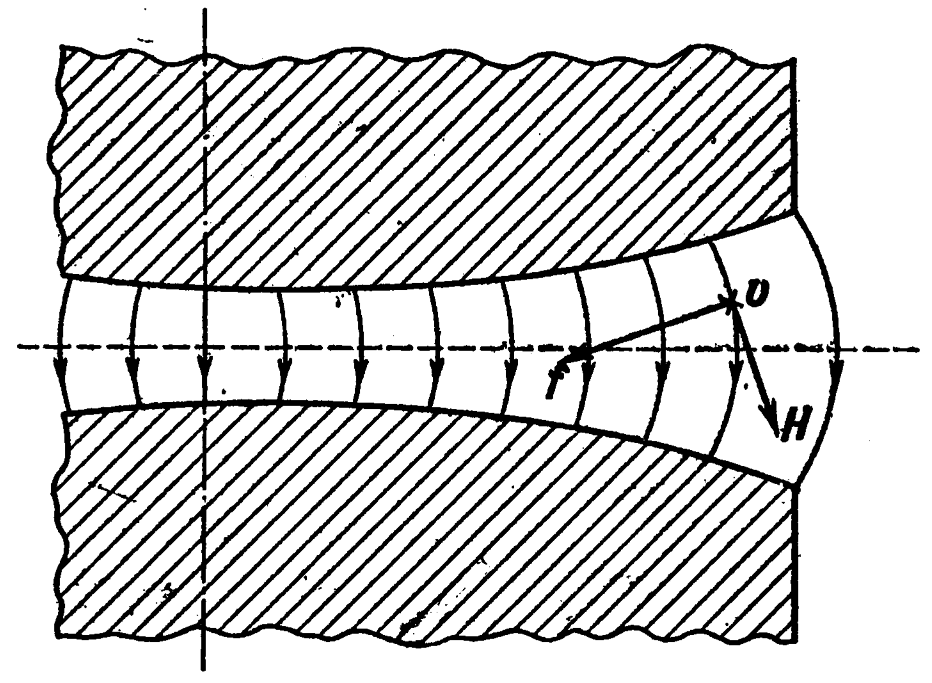


Рис. 3.42.

боковых стенок дуантов, ускоренные частицы с помощью специального приспособления выводятся из циклотрона и направляются на мишень.

В результате многократного ускорения между дуантами частицы приобретают энергию, которую они могли бы получить при однократном ускорении полем с разностью потенциалов до 10 миллионов вольт. Частиц со значительно бо́льшими энергиями циклотрон дать не может: с ростом скорости частиц увеличивается их масса $m=m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$, а, значит, согласно (36.22), увеличивается период T оборота частиц. В результате синхронность между вращением частицы и переменным ускоряющим напряжением нарушается и дальнейшее ускорение становится невозможным. Эта трудность устраняется в более совершенных ускорителях частиц, в которых напряженность магнитного поля и частота переменного электрического поля в процессе ускорения меняются.

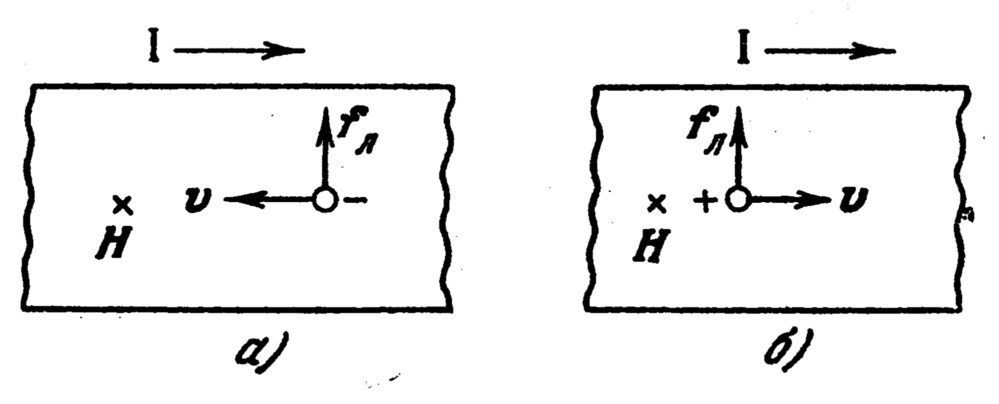


Рис. 3.43.

Пример 3. Своеобразный эффект, обусловленный действием лоренцовой силы на свободные заряды в проводнике и носящий название эффекта Холла, позволяет судить о знаке этих зарядов.

Представим себе проводник в виде плоской ленты, расположенный в магнитном поле. Линии напряженности магнитного поля пересекают проводник перпендикулярно к его плоскости. По проводнику течет ток, следовательно, подвижные заряды обладают конечной дрейфовой скоростью $\mathbf{v}$.

На рис. 3.43 проводящая лента изображена в плоскости листа, магнитное поле направлено от нас, за лист, ток течет, как показано стрелкой, слева направо. Пусть носителями тока являются электроны (рис. 3.43, *а*). Тогда направление дрейфовой скорости электронов будет справа налево. При таком направлении скорости в указанном магнитном поле электроны будут испытывать действие лоренцовой силы $\mathbf{f}_л$, направленной вверх. Верхний срез проводника будет заряжаться отрицательно, нижний — положительно.

Из рис. 3.43, *б* видно, что при том же направлении тока, но положительном знаке подвижных зарядов (значит, в частности, при дырочной проводимости), знаки зарядов на срезах проводника сверху и снизу меняются: направление $\mathbf{f}_л$ будет тем же, но теперь вверх будут отклоняться положительные заряды. Это и позволяет экспериментально определять знак электрического заряда носителей тока в проводнике.

Заметим, что и при равной концентрации носителей обоих зарядов холловская разность потенциалов возникает, если дрейфовая

скорость носителей заряда разных знаков различна, что, как правило, имеет место.

Подсчитаем величину холловской разности потенциалов $\Delta\varphi$ между верхним и нижним срезами проводника для простейшего случая носителей тока одного знака заряда. Обозначим через $E_х$ электрическое поле, обусловленное холловской разностью потенциалов $\Delta\varphi$. Обозначая через h ширину ленты — проводника, имеем

$$\Delta\varphi = E_х h. \tag{36.23}$$

Перераспределение зарядов прекратится (а следовательно, установится значение $\Delta\varphi$), когда электрическая сила, обусловленная полем $E_х$, т. е. $eE_х$, будет равна по величине и противоположна по направлению лоренцовой силе $\mathbf{f}_л$. Имеем, следовательно,

$$eE_х = f_л = keBv$$

или

$$E_х = kBv. \tag{36.24}$$

Вспомним теперь, что плотность тока j равна

$$j = \frac{I}{S} = nve,$$

где S — поперечное сечение проводника, n — плотность носителей тока, v — дрейфовая скорость. Определяя отсюда v и подставляя найденное значение в (36.24), получаем

$$E_х = \frac{k}{ne}\frac{IB}{S} = \frac{k}{ne}jB. \tag{36.25}$$

Это дает в соответствии с (36.23)

$$\Delta\varphi = \frac{k}{ne}\frac{I}{S}hB = \frac{k}{ne}jhB. \tag{36.26}$$

Таким образом, холловская э.д.с. пропорциональна плотности тока, ширине проводника и индукции магнитного поля.

Исследования проводимости металлов с помощью эффекта Холла привели к удивительным выводам: металлы, как и полупроводники, могут обладать проводимостью p-типа! Это относится к металлам с перекрывающимися зонами (см. § 28), у которых дырочная проводимость может превалировать над электронной. В таких металлах, как цинк и кадмий, дырки в среднем более подвижны, чем электроны.

§ 37. Удельный заряд и масса электрона. Масс-спектроскопия

На заряд e, помещенный в электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}$, действует сила

$$\mathbf{f}_{эл} = e\mathbf{E}. \tag{37.1}$$

На тот же заряд, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле $\mathbf{H}$ (в вакууме) согласно (36.7), действует сила

$$\mathbf{f}_{\text{магн}}=e\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\right]. \qquad (37.2)$$

Полная лоренцова сила, действующая на движущийся заряд при одновременном наличии электрического и магнитного полей, равна

$$\mathbf{f}=e\left\{\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\right]\right\}. \qquad (37.3)$$

Под действием этой силы частица с массой m получает ускорение

$$\mathbf{w}=\frac{\mathbf{f}}{m}=\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}+\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\right]\right\}. \qquad (37.4)$$

Уже один вид этого наиболее общего уравнения движения заряженной частицы в полях позволяет сделать очень важный вывод: характер движения и траектория заряженной частицы (при одинаковой начальной скорости $\mathbf{v}_0$) зависят не от ее заряда или массы в отдельности, а лишь от отношения e/m. Величина e/m носит название **удельного заряда** данной частицы. Чем меньше e/m (т. е. чем меньше заряд и больше масса частицы), тем меньше ускорение $\mathbf{w}$ и тем меньше изменяется и по величине и по направлению скорость $\mathbf{v}$ частицы в данном поле.

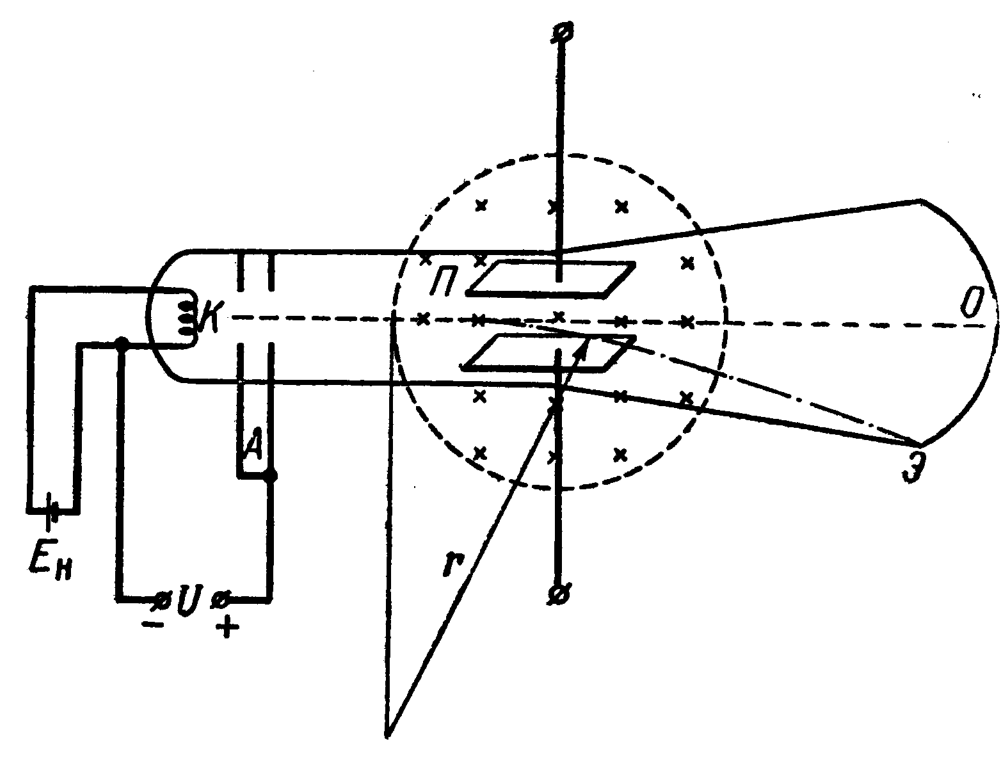


Рис. 3.44.

Измеряя скорости и траектории частиц, движущихся в электрических и магнитных полях, можно определить величину и знак их удельного заряда. Таким образом был впервые определен удельный заряд электрона. Если одна из этих величин известна, то по найденному отношению e/m можно определить и вторую. Приведем одну из схем экспериментального определения e/m.

На рис. 3.44 изображена схема электронно-лучевой трубки, применяемой в этом опыте. Катод K накаливается током от специальной батареи до температуры $T=1500\div2000°\,C$ и испускает электроны со средней кинетической энергией $mv_0^2/2$ порядка $^3/_2kT$. Между катодом и анодом прикладывается разность потенциалов U вольт, ускоряющая электроны. По закону сохранения энергии

скорость v электронов, достигающих анода, определяется из соотношения

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\frac{eU}{300}. \qquad (37.5)$$

Множитель 300 в знаменателе правой части этого равенства связан с тем, что $1\ в=\frac{1}{300}$ СГС ед. напряжения. При $U\sim 10^3 \div 10^4\ в$ $\frac{mv_0^2}{2} \ll \frac{eU}{300}$ и с достаточной степенью точности

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{eU}{300}, \qquad (37.6)$$

или

$$v=\sqrt{\frac{e}{m}\frac{U}{150}}. \qquad (37.7)$$

Анод A представляет собой металлический цилиндр с двумя узкими отверстиями на противоположных торцах. Эти отверстия выделяют тонкий пучок «монохроматических», т. е. обладающих практически одинаковыми по величине и направлению скоростями, электронов. Описанная часть прибора носит название электронной пушки или электронного прожектора.

Стеклянная колба электронно-лучевой трубки откачана до высокого вакуума, так что электроны, прошедшие через отверстия в аноде, летят далее равномерно и прямолинейно, почти не испытывая соударений с молекулами воздуха. Дно колбы покрыто изнутри специальным составом, светящимся при бомбардировке электронами. Электронный луч, падающий на этот экран $Э$, создает на нем маленькое светящееся пятнышко.

Поместим электронно-лучевую трубку в магнитное поле H, созданное соленоидом, перпендикулярным к чертежу. На рис. 3.44 сечение этого соленоида показано пунктиром, а направление линий магнитного поля, идущих за плоскость чертежа, отмечено крестиками. Измеряя ток I в соленоиде и зная число витков его w, можно по формуле (33.18) определить величину H. Электроны ($e<0$) движутся в плоскости чертежа, т. е. $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$. Действующая на них сила согласно (37.2) равна

$$f_{\text{магн}}=e\frac{v}{c}H \qquad (37.8)$$

и отклоняет электронный пучок вниз, как это показано на чертеже пунктиром. Как было показано в примере 1 предыдущего параграфа, величина скорости электрона v в магнитном поле не меняется, и в случае однородного поля $\mathbf{H}=\text{const}$ электрон будет двигаться

по окружности постоянного радиуса r, так что согласно (36.14)

$$\frac{v^2}{r}=\frac{e}{m}\frac{vH}{c}. \tag{37.9}$$

Измеряя радиус этой окружности и зная скорость электронов, можно тогда из (37.9) определить величину e/m. Поскольку из (37.7) величина v определяется в свою очередь лишь через e/m, то, комбинируя (37.7) и (37.9), получим

$$\sqrt{\frac{e}{m}\frac{U}{150}}=\frac{e}{m}\frac{rH}{c},$$

откуда окончательно

$$\frac{e}{m}=\frac{U}{150}\frac{c^2}{r^2H^2}. \tag{37.10}$$

Вместо изменения U можно к пластинам $П$ конденсатора, расположенным на взаимном расстоянии δ внутри трубки, приложить дополнительную разность потенциалов U' и создать между ними электрическое поле $E=\frac{U'}{300\delta}$, перпендикулярное к линиям магнитного поля и направлению электронного луча. Изменяя U', можно добиться того, чтобы сила $f_{эл}$, действующая на электрон, пролетающий в электрическом поле E между пластинами $П$, уравновесила силу действия магнитного поля. Тогда траектория электронов снова станет прямолинейной, о чем можно судить по возвращению электронного луча обратно в точку O экрана. В этом случае

$$eE=e\frac{v}{c}H. \tag{37.11}$$

Сокращая e и комбинируя (37.9) с (37.11), получим

$$\frac{e}{m}=\frac{c^2E}{rH^2}, \tag{37.12}$$

где r — радиус траектории электрона в отсутствие дополнительного электрического поля.

В последнем случае можно не измерять r, а определять точно ускоряющую разность потенциалов U в электронной пушке. Тогда, комбинируя (37.7) с (37.11), получаем

$$\frac{e}{m}=\frac{150c^2}{U}\frac{E^2}{H^2}. \tag{37.13}$$

Тщательные измерения дали для электронов значение

$$\left(\frac{e}{m}\right)_e=-5{,}28\cdot10^{17}\ \frac{\text{СГС ед. заряда}}{г}. \tag{37.14}$$

Величина заряда электрона известна из опытов Милликена (см. § 3) и подобных ему и равна $e_e=-4{,}803\cdot10^{-10}$ СГС ед. заряда.

Следовательно, масса электрона равна

$$m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-28}\ г = \frac{1}{1837}\ \text{массы атома водорода.} \quad (37.15)$$

Тщательные измерения e/m для электронов и ионов позволили открыть много новых свойств микроскопических частиц. Было обнаружено уменьшение e/m, вызванное возрастанием массы электрона со скоростью, и установлена зависимость массы от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (37.16)$$

Здесь m_0 — масса покоящегося электрона (при $v = 0$), а m — его масса при движении со скоростью v. Объяснение зависимости m от v было дано Эйнштейном в 1905 г.

В принципе теми же методами определяются массы атомов и молекул. Соответствующие приборы для определения масс атомов и молекул (точнее, их ионов) носят название масс-спектрографов. Необходимые ионы получаются с помощью газового разряда. Далее они ускоряются, и из пучка их с помощью электромагнитного «монохроматора» выделяются ионы одной скорости. Затем ионы отклоняются электрическими и магнитными полями. По величине отклонения определяется удельный заряд e/M, а отсюда и масса ионов M.

Первые же измерения масс атомов обнаружили существование изотопов. Пучок ионов одного химического элемента в масс-спектрографе после отклонения в магнитном поле расщепился и дал на фотопластинке несколько линий, соответствующих массам различных изотопов данного элемента, — своеобразный спектр масс. В наши дни точность определения масс атомов с помощью масс-спектрографов (правда, не в граммах, а по отношению к массе эталонного атома) достигает 6—8 значащих цифр.

Масс-спектроскопические методы позволяют проводить количественный анализ нефти, состоящей из молекул различных углеводородов, трудно различимых обычными химическими способами. При большой мощности ионного пучка этот метод позволил разделять изотопы в заметных количествах.

§ 38. Электронно-лучевые приборы. Электронный микроскоп

В настоящее время электронные приборы получили широкое распространение. Это вызвано несколькими причинами — легкостью управления электронным пучком («лучом»), практической безынерционностью пучка (заметим, что согласно (37.7) и (37.14) электрон,

будучи ускорен полем напряжением в $U=1$ *в*, приобретает скорость 594 *км/сек* и эта скорость растет для небольших напряжений, как $\sqrt{U}$) и т. д. Среди электронных приборов, получивших самое широкое применение, кроме рассмотренных в § 23 электронных ламп, следует прежде всего назвать электронно-лучевую трубку, применяемую в телевизорах, радиолокаторах, электронных осциллографах и множестве других устройств.

Электронно-лучевая трубка состоит из электронного прожектора (более совершенной конструкции, чем описанная в предыдущем параграфе), системы отклонения электронного луча и экрана, светящегося при падении на него электронов.

Конструкция электронного прожектора показана на рис. 3.45. Источником электронов является подогревный катод K—цилиндрик с донышком, покрытым тонким слоем вещества, обладающего малой работой выхода. Его температуру можно регулировать, меняя ток в нити накала катода H. За катодом располагается модулирующий электрод M(цилиндр Венельта). Потенциал, подаваемый на M, отрицателен по отношению к катоду. Число

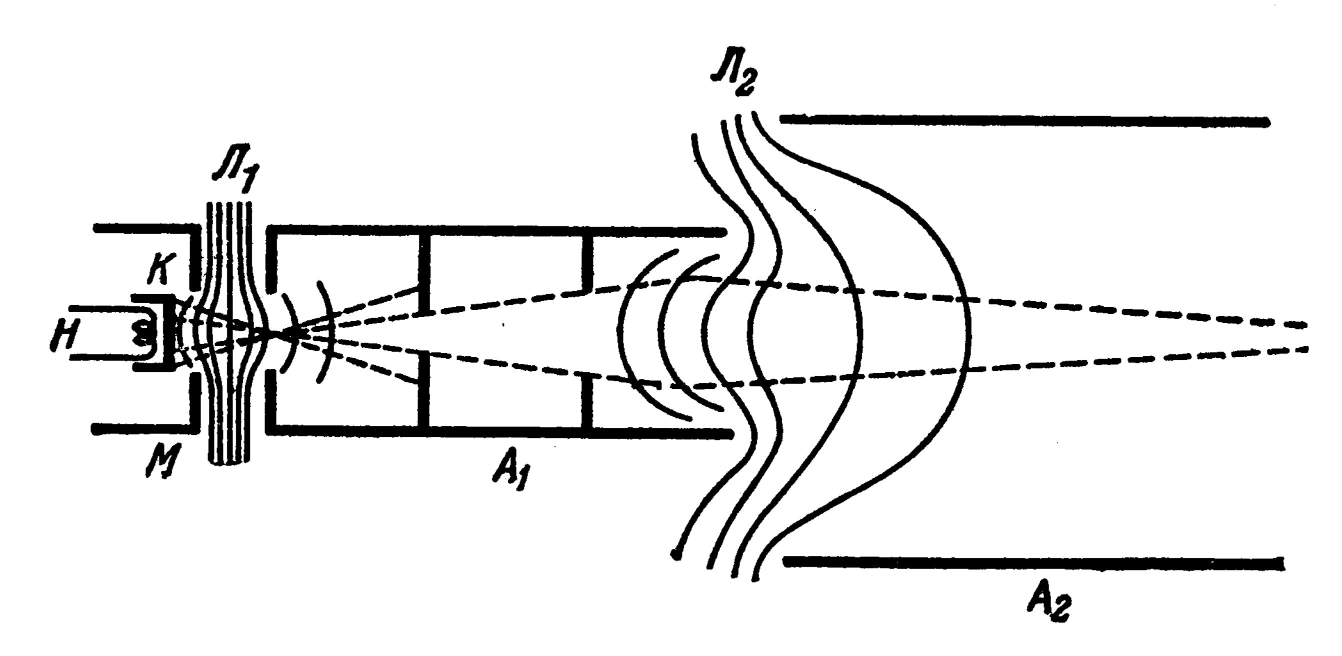


Рис. 3.45.

электронов, проходящих через отверстие модулирующего электрода, сильно зависит от его потенциала. Варьируя последний, можно менять ток электронного пучка и в конечном итоге—яркость пятнышка на экране трубки. Этим пользуются в кинескопах телевизоров, подавая видеосигнал на модулирующий электрод.

Далее следуют два анода A_1 и A_2 с положительными по отношению к катоду потенциалами. Ускоряющие электроны электрические поля, возникающие между M и A_1, а также между A_1 и A_2, показаны на рис. 3.45 эквипотенциальными поверхностями. Конфигурация электродов, а следовательно, форма эквипотенциальных поверхностей поля выбирается так, чтобы электроны не только ускорялись, но и фокусировались в точку на экране трубки.

С помощью специально рассчитанных электрических и магнитных полей электронные пучки можно фокусировать так же, как лучи света фокусируются с помощью линз. Поля, обладающие свойством фокусировать электронные пучки (например, между M и A_1 или между A_1 и A_2), называются электронными линзами, электростатическими или магнитными в зависимости от используемого для фокусировки поля. Две электростатические

линзы $Л_1$ и $Л_2$ в электронной пушке позволяют фокусировать достаточно мощный пучок электронов в пятнышко диаметром порядка десятых долей миллиметра.

Следующим элементом электронно-лучевой трубки является система, управляющая отклонением электронного пучка. Для этой цели применяются магнитные или электрические поля. В последнем случае на пути пучка располагаются два конденсатора, плоскости которых повернуты друг к другу под углом 90° (рис. 3.46). Меняя напряженность поля в конденсаторе C_1 с вертикальными пластинами, можно отклонять электронный пучок в горизонтальной плоскости; конденсатор C_2 позволяет осуществлять отклонение в вертикальной плоскости.

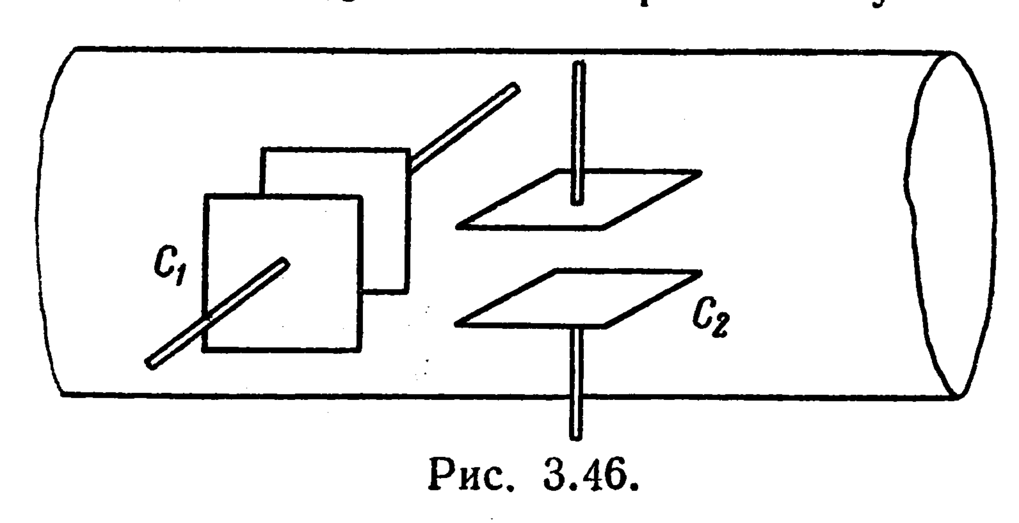


Рис. 3.46.

Скорость электронов в электронно-лучевой трубке составляет 10000—20000 *км/сек*. Проходимый ими путь от управляющего конденсатора до экрана не превышает 20—30 *см*, а от катода до экрана — не более 50 *см*. Поэтому прибор является почти безынерционным, позволяя исследовать явления, протекающие за миллионные доли секунды. Особенно удобным для такого рода исследований является прибор, получивший название **электронного осциллографа**.

Основной частью электронного осциллографа является электронно-лучевая трубка, на экран которой иногда для удобства наносят координатную сетку. В приборе имеется генератор электрических колебаний, позволяющих подавать на вертикальные отклоняющие пластины конденсатора переменное напряжение различной частоты.

С помощью этого приспособления можно исследовать электрические колебания в широком диапазоне частот, подавая изучаемую периодическую э. д. с. на пластины горизонтального конденсатора и подбирая частоту генератора осциллографа так, чтобы на экране получались фигуры Лиссажу (см. т. I, гл. IV).

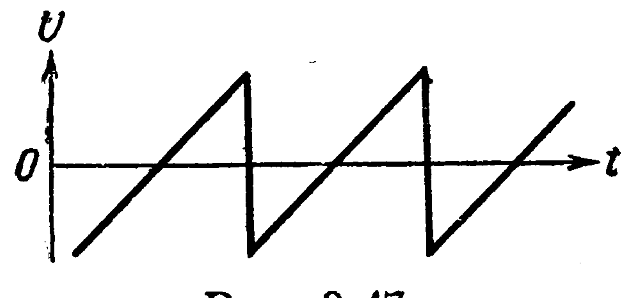


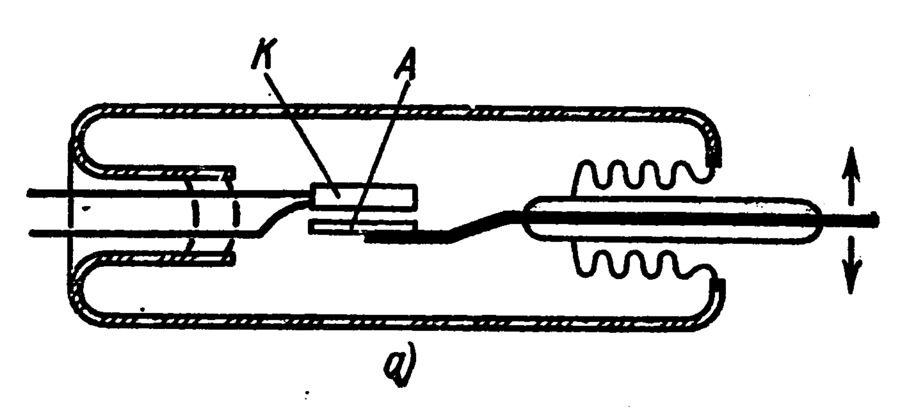
Рис. 3.47.

С помощью специальной схемы, на описании которой мы не останавливаемся, на C_1 можно подавать напряжение пилообразной формы (рис. 3.47). Под действием этого напряжения электронный луч будет перемещаться на экране по горизонтальной прямой слева направо с постоянной линейной скоростью и, пробежав весь экран, практически мгновенно возвращаться обратно и повторять опять весь путь. Такое движение электронного луча называется **разверт-**

к о й. Подавая на C_2 изучаемое переменное напряжение и подбирая частоту развертки C_1 так, чтобы эти частоты совпадали, можно получить на экране осциллографа неподвижный график изучаемого процесса.

Переводить на «электрический язык» и изучать с помощью катодного осциллографа можно самые различные процессы. Приведем несколько примеров.

Можно исследовать деформацию деталей быстроходных машин в процессе их работы, не нарушая при этом работы машин. Для этого на исследуемую деталь наклеивают тонкую целлулоидную ленточку, на которой нанесена полоска графита или приклеен тонкий проводник (тензометр, см. §§ 15 и 17). К тензометру через большое сопротивление R подключается источник постоянного напряжения U, так что в цепи идет ток I постоянной величины $I=U/R$. При деформации детали датчик растягивается или сжимается, его сопротивление меняется (в случае металлического проводника —



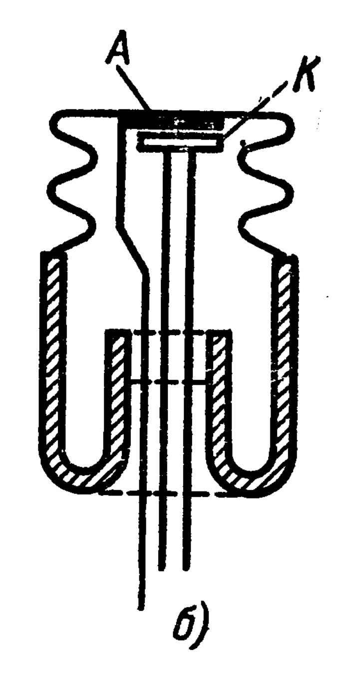


Рис. 3.48.

пропорционально деформации), и вместе с тем меняется разность потенциалов ΔU на его концах ($I=\Delta U/\Delta R=\text{const}$, при изменении ΔR меняется ΔU). Переменная по величине э. д. с. ΔU, снимаемая с концов тензометра, усиливается и подается на конденсатор C_2 осциллографа. На экране получается график деформации детали за период. С помощью специального изменения напряжения развертки, подаваемого на C_1, можно растянуть и просмотреть в деталях любой участок изучаемой кривой.

Весьма удобными—чувствительными и универсальными—датчиками для решения самых различных задач являются диоды с п о д в и ж н ы м и э л е к т р о д а м и. Две простейшие лампы такого типа показаны на рис. 3.48, *а* и *б*. В обеих лампах анод крепится с помощью герметической гибкой металлической гофрированной трубки—сильфона. При колебаниях анода ламп (рис. 3.48, *а*) резко меняется анодный ток или анодное напряжение (в зависимости от схемы установки, которую мы опускаем). С помощью такой лампы легко осуществить микрометр любой чувствительности, исследовать колебания с помощью катодного осциллографа и т. д. Особым преимуществом ламп с подвижными электродами как датчиков является то обстоятельство, что они непосредственно дают напряжение, достаточное для работы осциллографа, так что необходимость усиления сигналов датчика отпадает. Это позволяет с помощью многолучевого осциллографа, т. е. осциллографа с несколькими одновременно развертываемыми и независимо управляемыми электронными лучами, изучать колебания сразу нескольких узлов машины, что очень важно, когда взаимосвязь таких колебаний представляет интерес (см. резонанс и вынужденные колебания, т. I, гл. XIII).

Лампа, изображенная на рис. 3.48, *б*, может служить манометром (в частности, барометром), электрические показания которого можно регистрировать на любом расстоянии от датчика. В зависимости от характера измерений созданы лампы с подвижными электродами самой различной конструкции.

О применении электронно-лучевой трубки в радиолокации и телевидении будет сказано в главе XI. Здесь же мы остановимся на электронном микроскопе.

Важнейшей характеристикой микроскопа является не его увеличение, которое может быть сделано сколь угодно большим, а его **разрешающая способность**, характеризующая возможность различения предельно мелких деталей изучаемого объекта. Если изображения двух точек, находящихся на расстоянии δ друг от друга, неразличимы, т. е. сливаются в одно, то никакое увеличение не позволит увидеть их раздельно.

Уже отмечалось (т. I, гл. XIV), что волна рассеивается на преграде, если преграда соизмерима с длиной волны, или задерживается ею, если размеры преграды много больше длины волны. Преграды, малые по сравнению с длиной волны, почти не задерживают и не рассеивают волн.

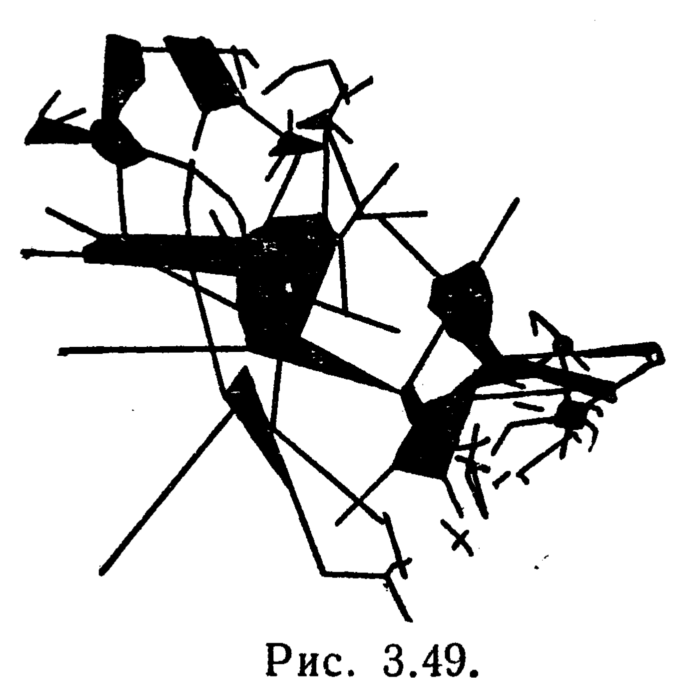


Рис. 3.49.

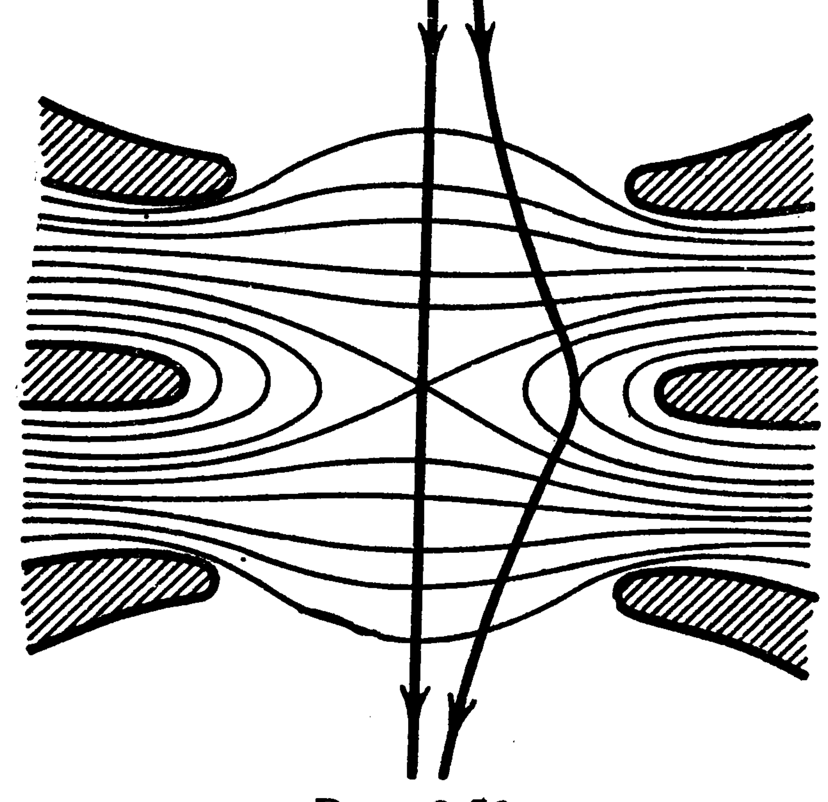


Рис. 3.50.

Наименьшая длина волны излучения, видимого глазом, составляет 0,38 *мк*. Частицы вещества с линейными размерами 0,1 *мк* с помощью оптического микроскопа уже нельзя наблюдать.

Выше мы упоминали о волновых свойствах электрона. При ускорении электрическим полем с разностью потенциалов в десятки тысяч вольт электронный пучок может рассматриваться как волна с длиной порядка 10^{-10} *см*. В то же время с помощью электрических и магнитных линз электронными пучками можно управлять так, как обычными световыми лучами управляют с помощью стеклянных линз. Это позволило создать электронный микроскоп.

Мы опишем коротко применяемый редко, но более простой электронный микроскоп с электростатическими электронными линзами.

Заметим предварительно, что удовлетворительные результаты получаются при работе не с отраженным, а с проходящим сквозь объект электронным лучом. Поскольку же электроны, обладая зарядом, сильно взаимодействуют с веществом, то для электронных лучей прозрачными могут быть

лишь очень тонкие объекты, толщина которых не превышает десятых долей микрона. При изучении бактерий, вирусов и т. д. их наносят на поверхность тончайшей коллодиевой пленки, получаемой при испарении капельки жидкого коллодия, растекшейся по поверхности воды.

Электронный прожектор в электронных микроскопах дает монохроматический пучок электронов, проходящих сквозь объект, т. е. «на просвет». Вследствие этого от слишком плотных или имеющих слишком большую толщину предметов может быть получено лишь теневое изображение (рис. 3.49).

Обычный диапазон ускоряющих напряжений, применяемых в электронных микроскопах разных конструкций, лежит в области от 50 000 до 200 000 вольт.

Электростатическая электронная линза (рис. 3.50) состоит обычно из трех круглых диафрагм с центральными круглыми отверстиями. Крайние диафрагмы имеют одинаковый потенциал (соединены друг с другом), средняя

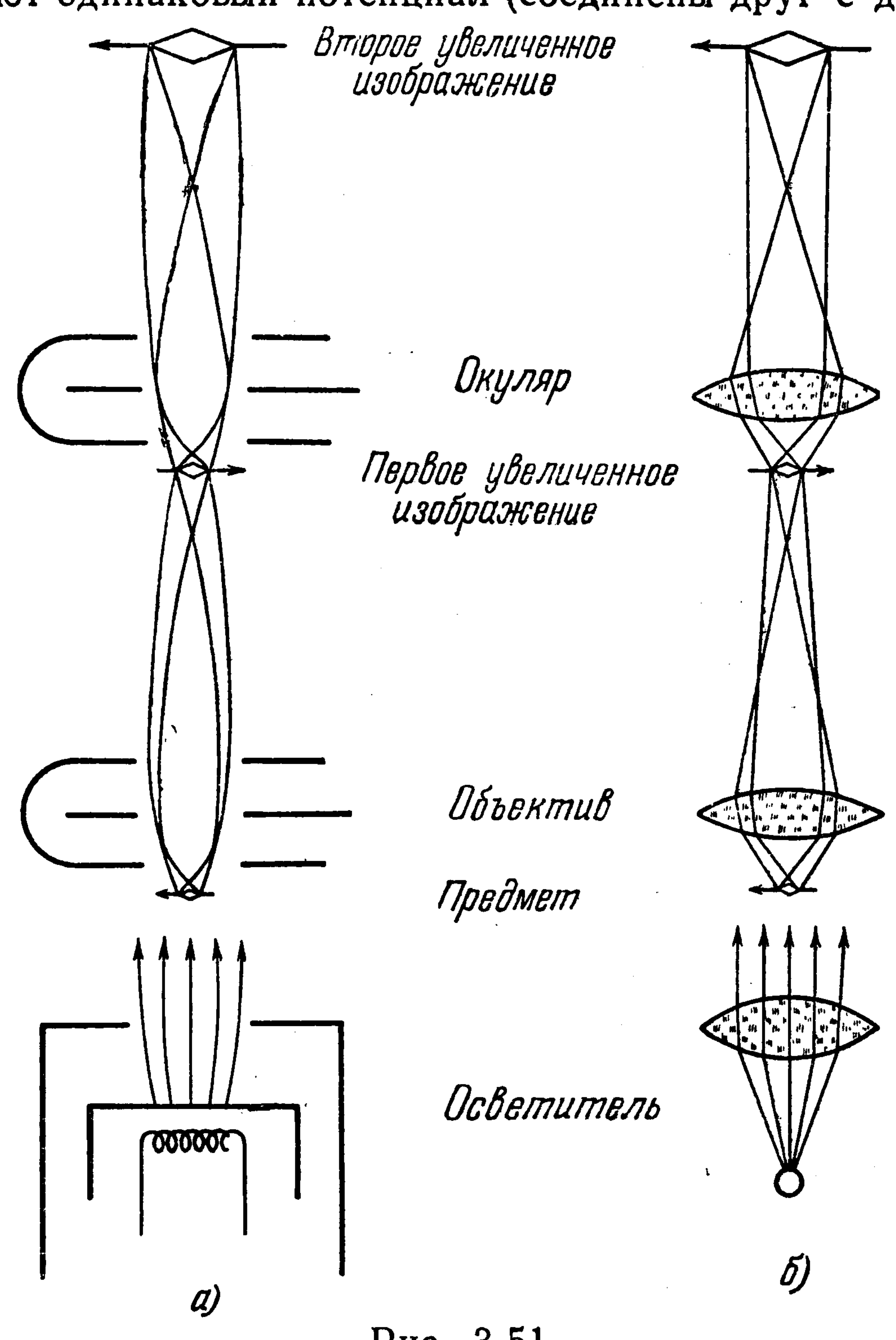


Рис. 3.51.

имеет больший либо меньший потенциал. Структура электрического поля линзы показана его эквипотенциальными поверхностями. Выпуклости этих поверхностей в области отверстий диафрагм и образуют линзу. На рисунке показаны траектории электронов, идущих от двух точек предмета; траектории сходятся после прохождения линзы, и электроны создают изображение этих точек предмета.

«Ход лучей» в электронном микроскопе показан на рисунке 3.51, *а*. Для сравнения на рис. 3.51, *б* показан ход лучей в оптическом микроскопе.

§ 39. Поле одиночного движущегося заряда. Взаимодействие движущихся зарядов

Как уже указывалось в § 36, реальный элемент тока имеет длину и ширину и представляет собой совокупность одиночных зарядов q, движущихся параллельно друг другу со скоростью $\mathbf{v} \| d\mathbf{l}$ (см. рис. 3.52). Магнитное поле $d\mathbf{H}$, создаваемое элементом тока в точке M, представляет собой геометрическую сумму полей, создаваемых каждым из движущихся зарядов в отдельности. На расстояниях r, больших по сравнению с размерами элемента тока, можно считать, что радиус-вектор $\mathbf{r}$ практически одинаков для всех зарядов и каждый одиночный движущийся заряд создает в точке M практически одинаковое магнитное поле $\mathbf{h}$. Тогда

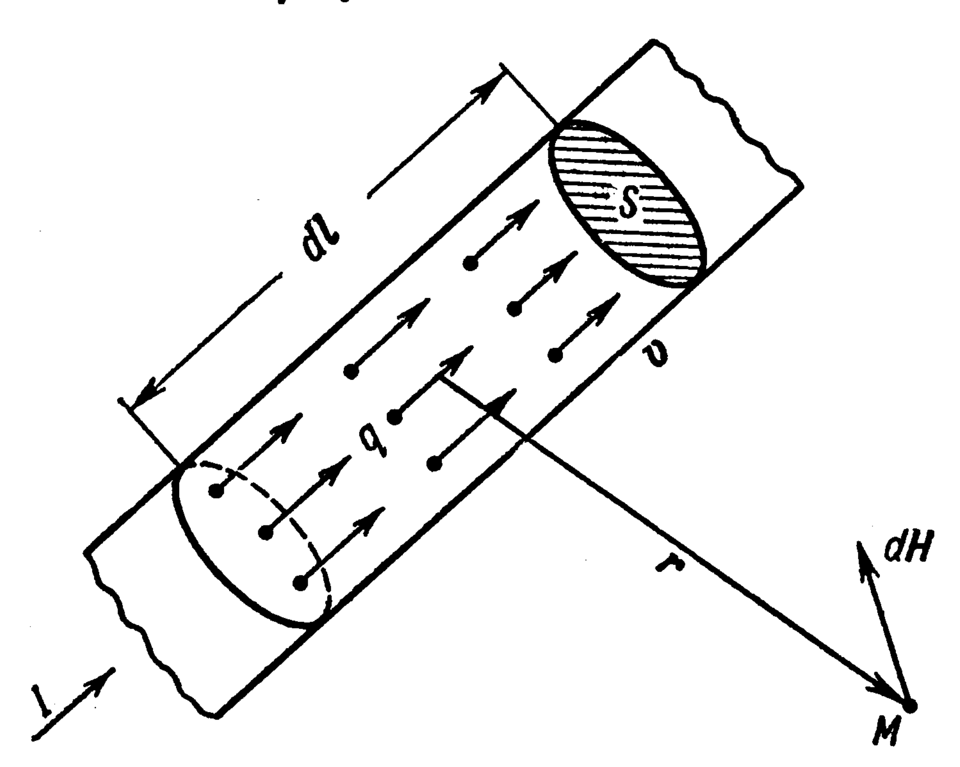


Рис. 3.52.

$$d\mathbf{H} = N\mathbf{h}, \qquad (39.1)$$

где (см. (36.1)) $N = nS\,dl$ — полное число зарядов, движущихся в элементе длиной dl и площадью поперечного сечения S. С другой стороны (см. (36.2)),

$$I\,d\mathbf{l} = Nq\mathbf{v}. \qquad (39.2)$$

По закону Био — Савара — Лапласа напряженность магнитного поля элемента тока в гауссовой системе равна

$$d\mathbf{H} = \frac{[I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{cr^3} = N\frac{[q\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{cr^3}. \qquad (39.3)$$

Из (39.1) и (39.3) находим напряженность магнитного поля, создаваемого одиночным зарядом:

$$\mathbf{h} = q\,\frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{cr^3}\,{}^{*)}; \qquad (39.4)$$

величина h равна

$$h = \frac{q}{c}\,\frac{v \sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{r}})}{r^2}, \qquad (39.5)$$

т. е. напряженность магнитного поля, создаваемого одиночным движущимся зарядом, обратно пропорциональна квадрату расстояния r

---

*) В системе единиц СИ эта формула примет вид

$$\mathbf{h} = q\,\frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}.$$

от заряда до точки наблюдения M и прямо пропорциональна величине заряда q, скорости его движения v и синусу угла между направлением движения заряда $\mathbf{v}$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$. Направление вектора $\mathbf{h}$ перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, и ориентировано по правилу правого винта вокруг направления $\mathbf{v}$. Линии магнитного поля представляют собой окружности, центры которых расположены на прямой, вдоль которой движется заряд, как это показано на рис. 3.53.

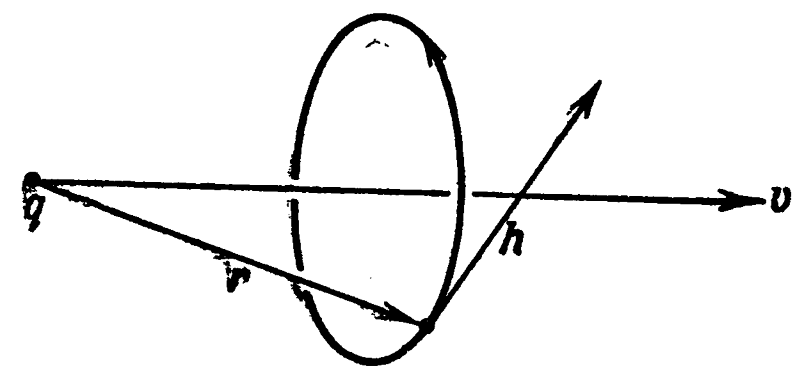


Рис. 3.53.

Неподвижный заряд e связан с окружающим его электрическим полем, напряженность которого равна

$$\mathbf{E}_e = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}. \tag{39.6}$$

Если этот заряд движется со скоростью $\mathbf{v}$, то с ним оказывается связанным еще магнитное поле, которое в соответствии с только что полученным результатом обладает напряженностью

$$\mathbf{H}_e = \frac{e}{c}\frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]}{r^3}. \tag{39.7}$$

Точно такое же поле обнаружат приборы, двигаясь мимо неподвижного заряда со скоростью v: абсолютная скорость есть бессмысленное понятие — важна лишь относительная скорость $\mathbf{v}$, в данном случае заряда и прибора — индикатора поля.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. С зарядами связаны поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Эти поля воздействуют на другие электрические заряды, движущиеся в окружающем пространстве, с силой $\mathbf{f}$, определяющейся из (37.3). В общем случае двух произвольно движущихся зарядов взаимодействие, осуществляемое через поля (39.6) и (39.7), очень сложно, и мы его рассматривать не будем. Ограничимся простейшим частным случаем, позволяющим тем не менее сделать весьма важные заключения о взаимосвязи электрических и магнитных полей.

Рассмотрим два одинаковых заряда e, находящихся на расстоянии r друг от друга и движущихся со скоростью $\mathbf{v}$ по направлению, перпендикулярному к соединяющей их линии (рис. 3.54). Между этими зарядами будут действовать электрические и магнитные силы. Первые будут силами отталкивания, равными по величине

$$f_e = \frac{e^2}{r^2}. \tag{39.8}$$

Легко видеть, что, как в случае параллельных токов, магнитные силы будут силами притяжения. Величину этих сил легко найти. Магнитное поле, в котором движется, например, второй заряд,

создается первым зарядом, находящимся от него на расстоянии r, причем $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$. Отсюда

$$H_e = \frac{e}{c}\frac{v}{r^2}. \tag{39.9}$$

Подставляя это значение в выражение (36.8), находим (учитывая, что $\mathbf{H}_e \perp \mathbf{v}$):

$$f_{\text{магн}} = \frac{e}{c}\, vH_e = \frac{e^2}{c^2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{e^2}{r^2}\frac{v^2}{c^2}. \tag{39.10}$$

Заметим, что выделенный нами в окончательном выражении $f_{\text{магн}}$ множитель слева равен f_e (39.8). Следовательно,

$$f_{\text{магн}} = \frac{v^2}{c^2} f_e. \tag{39.11}$$

Таким образом, в то время как силы электрического отталкивания между зарядами, будучи независимыми от v, остаются постоян-

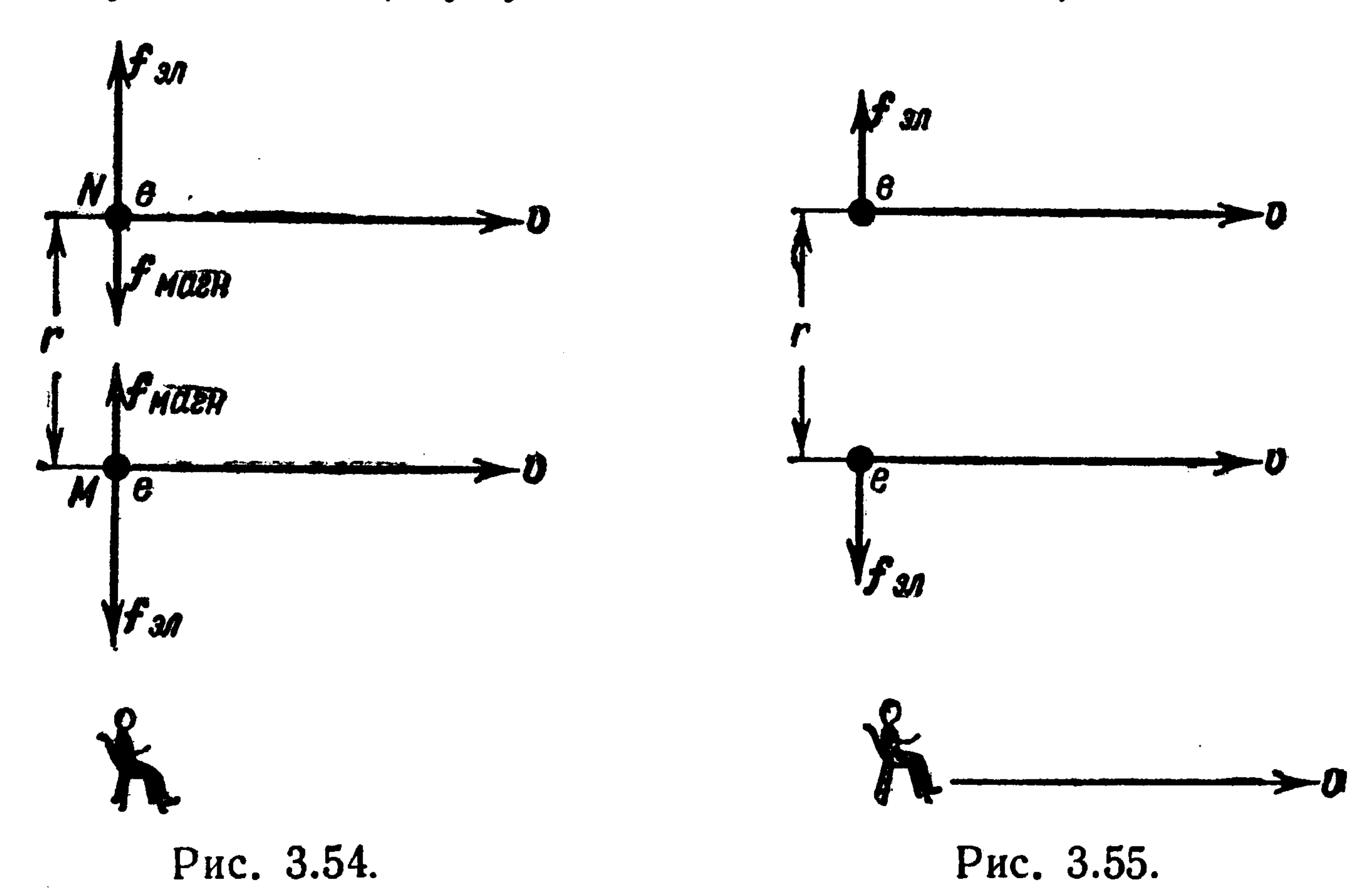


Рис. 3.54. Рис. 3.55.

ными (поскольку $r = \text{const}$), силы магнитного притяжения возрастают с увеличением v, стремясь к значению f_e при практически недостижимой скорости v, равной скорости света.

Суммарная сила отталкивания зарядов f равна

$$f = f_e - f_{\text{магн}} = \frac{e^2}{r^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{39.12}$$

Полученный результат кажется парадоксальным. Суммарная сила взаимодействия (39.12) оказалась зависящей от v, в то время как v есть скорость по отношению к произвольно выбранной системе отсчета. Рассматривая те же заряды, но в системе отсчета, движущейся со скоростью v (как это изображено на рис. 3.55), мы нашли бы их неподвижными, и полная сила отталкивания была бы равна $f_e = e^2/r^2$.

Наконец, можем ли мы считать магнитное поле объективно существующим, если оно согласно (39.7) определяется скоростью v, зависящей от системы отсчета? Как показано на рис. 3. 55, наблюдатель, движущийся вместе с зарядами, не обнаружит никакого магнитного взаимодействия: по отношению к нему заряды покоятся.

Конечно, взаимодействие электрических зарядов есть явление объективное, не зависящее от существования и характера движения наблюдателя. Приведенный выше «парадокс» возник потому, что мы до сих пор рассматривали электрическое и магнитное поля как независимые и допустили некоторые неточности при вычислении сил f_e и $f_{\text{магн}}$. В частности, неподвижный наблюдатель должен учитывать, что при движении электрических зарядов изменяются и их электрические поля, и эти изменения происходят не сразу во всех точках пространства, а распространяются с конечной, хотя и очень большой скоростью $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. Не останавливаясь на всех деталях получающейся весьма сложной картины, следует лишь указать, что на второй заряд, находящийся в данный момент в точке M, действует электрическое поле, порожденное первым зарядом не в тот же самый момент времени, а несколько раньше, когда он еще находился в какой-то предыдущей точке своей траектории. Следовательно, неподвижный наблюдатель по сравнению с движущимся обнаружит не только появление магнитного поля и силы $f_{\text{магн}}$, но и изменение электрического поля и силы f_e.

Формально «парадокс» возник потому, что мы рассматривали электрическое и магнитное поля как векторные.

Для векторов характерен определенный закон преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. По этому закону преобразуется, например, такой «настоящий вектор», как вектор скорости, и т. д.

Вектора электрического и магнитного полей преобразуются по другому закону, и следовательно, строго говоря, *эти поля не векторные*. В действительности все составляющие электрического и магнитного полей (всего шесть составляющих) образуют величину, называемую тензором второго ранга, компоненты которого преобразуются по иным законам, чем компоненты векторов.

Из законов преобразования тензоров непосредственно видно, как при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой наличие электрических составляющих поля приводит к появлению магнитных, и наоборот (например, в собственной системе отсчета, по отношению к которой электрический заряд неподвижен, есть лишь электрические составляющие поля; если перейти теперь к системе отсчета, по отношению к которой заряд и связанное с ним поле движутся, то в новой системе будут и магнитные составляющие поля).

В рамках нашего учебника мы не можем пользоваться тензорами, а следовательно, и строго указать границы корректности принятых представлений. Сказанное адресовано главным образом тем читателям, которые в дальнейшем захотели бы расширить свои представления о природе электромагнитного поля.

Вместе с тем уже здесь мы хотим подчеркнуть неразрывное единство электрического и магнитного полей.

Объективно существует единое электромагнитное поле.

Разбиение этого поля на электрическое и магнитное является условным и зависит от скорости движения зарядов в выбранной системе отсчета. В следующих главах мы установим еще более тесную взаимосвязь электрического и магнитного полей, чем это было сделано в настоящей главе.

При сравнительно медленных движениях заряженных тел, пока $v \ll c$, можно не учитывать этой связи и пользоваться выведенными ранее соотношениями для электрических и магнитных полей. Как видно из формулы (39.12), для рассмотренного выше примера относительная неточность порядка v^2/c^2 очень мала для обычных скоростей v, малых по сравнению со скоростью света c.

Для движений со скоростями, приближающимися к скорости света, пришлось пересмотреть не только представления о взаимной независимости электрических и магнитных полей, но и отказаться от еще более привычных представлений о взаимной независимости пространства и времени и независимости их свойств от материи, движущейся в пространстве—времени. Этот пересмотр был произведен А. Эйнштейном, создавшим новую теорию пространства—времени—теорию относительности, в которой наиболее последовательно введено единое электромагнитное поле.

ГЛАВА IX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 40. Открытие явления электромагнитной индукции

С момента открытия связи магнитного поля с током (Эрстед, 1820 г.) делались многочисленные попытки возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Задача эта была решена М. Фарадеем, открывшим в 1831 г. явление электромагнитной индукции.

Явление это состоит в следующем. Если поток вектора индукции, пронизывающий замкнутый проводящий контур, меняется, то в контуре возникает электрический ток. При этом *явление совершенно не зависит от способа изменения потока индукции*. В качестве иллюстрации приведем некоторые из классических опытов Фарадея. Если свитый в катушку проводник замкнуть на гальванометр и вдвигать в нее постоянный

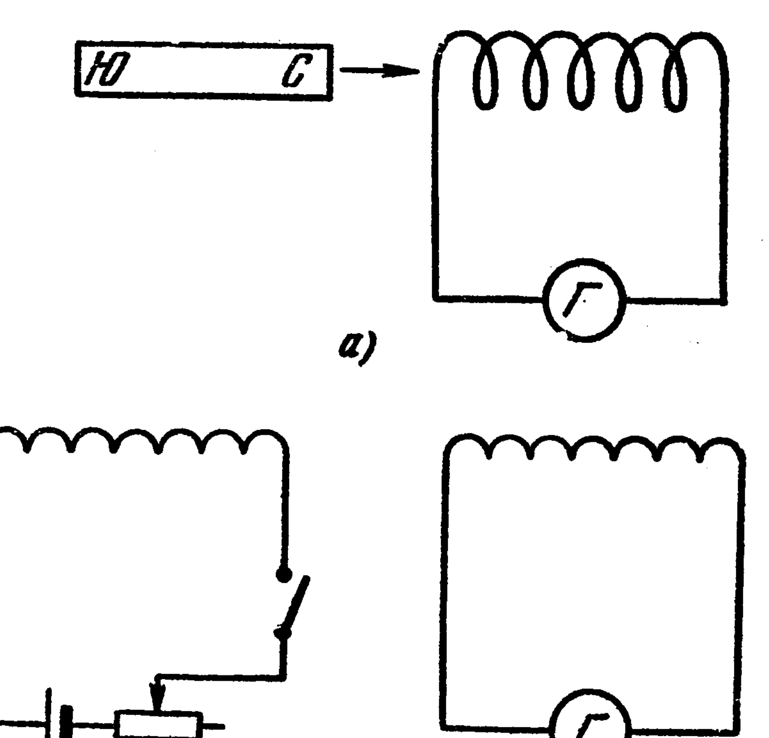


Рис. 3.56.

магнит (рис. 3.56, *а*), то гальванометр покажет возникновение кратковременного импульса тока. При прекращении движения магнита прекращается и ток. Если изменить направление движения магнита и вытягивать его из катушки, то направление тока в контуре изменяется на обратное. Такое же изменение направления тока

происходит при перемене полюсов магнита. Для получения индукционного тока можно держать магнит неподвижным, а двигать с той же скоростью, но в обратном направлении катушку.

Точно такая же картина наблюдается и при замене постоянного магнита электромагнитом. Если соленоид, по которому пропускается постоянный ток, перемещать относительно катушки (рис. 3.56, *б*), то в последней также возникает индукционный ток.

Наконец, если обе катушки закрепить неподвижно, но менять магнитное поле, создаваемое первой катушкой, включая или выключая источник тока или изменяя ток реостатом (рис. 3.56, *в*), то во второй катушке возникает индукционный ток, тем больший, чем быстрее изменяется ток в первой катушке.

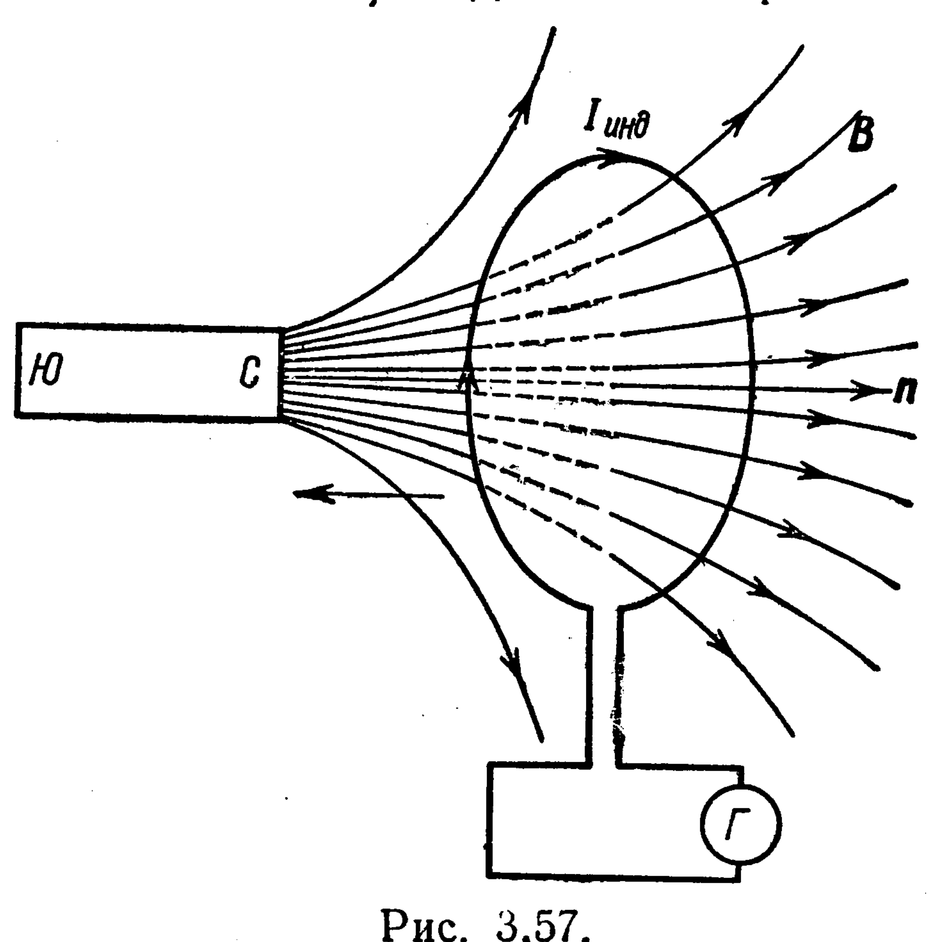


Рис. 3.57.

Обобщая результаты всех своих опытов, Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда проводник **пересекает** линии магнитной индукции и в замкнутом контуре **изменяется** число охватываемых им линий, т. е. изменяется сцепленный с ним магнитный поток Ф. Переводя представления Фарадея на современный язык, мы можем сформулировать это так:

э. д. с. индукции, возникающая в замкнутом контуре, зависит от скорости изменения магнитного потока, сцепленного с контуром, т. е. от $d\Phi/dt$.

Для каждого случая индукции Фарадей указывал направление индуктированного тока. Общее правило для нахождения направления этих токов было установлено в 1833 г. Э. Х. Ленцем: «... если металлический проводник передвигается вблизи гальванического тока или вблизи магнита, то в нем возбуждается гальванический ток такого направления, которое вызвало бы движение покоящегося провода в направлении, прямо противоположном направлению движения, навязанному проводу извне ...».

Таким образом, изменяя магнитный поток Ф, сцепленный с данным контуром (например, перемещая проводник во внешнем магнитном поле), мы найдем, что индукционный ток имеет такое направление, что создаваемое им дополнительное магнитное поле препятствует изменению начального магнитного потока Ф.

Если, например, приближать виток (с выбранным направлением нормали **n**) к северному полюсу постоянного магнита и тем самым увеличивать магнитный поток, пронизывающий виток ($d\Phi/dt > 0$), то в витке возникнет индукционный ток $I_{инд}$ такого направления (рис. 3.57), что на ближайшей к магниту стороне витка образуется тоже северный полюс, препятствующий дальнейшему приближению витка. Ток в витке пойдет против часовой стрелки ($\mathcal{E}_{инд} < 0$), и его собственное магнитное поле будет уменьшать магнитный поток, сцепленный с контуром.

Если же виток на рис. 3.57 удалять от северного полюса постоянного магнита, то магнитный поток в нем будет убывать ($d\Phi/dt < 0$) и индукционный ток пойдет по часовой стрелке ($\mathcal{E}_{инд} > 0$) так, что его собственное магнитное поле увеличит магнитный поток.

В обоих случаях *магнитное поле возникающего индукционного тока стремится препятствовать вызвавшему его изменению магнитного потока.* Это и есть формулировка правила Ленца.

§ 41. Природа и величина электродвижущей силы индукции

При индуктировании тока в проводнике в последнем начинают двигаться электрические заряды и возникает обусловленное их движением магнитное поле. При этом в контуре накапливается энергия, которая локализована в магнитном поле тока. Эта энергия накапливается контуром (его полем) за счет работы внешних сил, возбуждающих индуцированный ток, например, за счет механической работы перемещения магнитов или контуров. В свою очередь энергия индукционного тока может переходить в другие формы энергии, в частности в тепловую. В результате контур будет нагреваться, а ток в контуре — убывать.

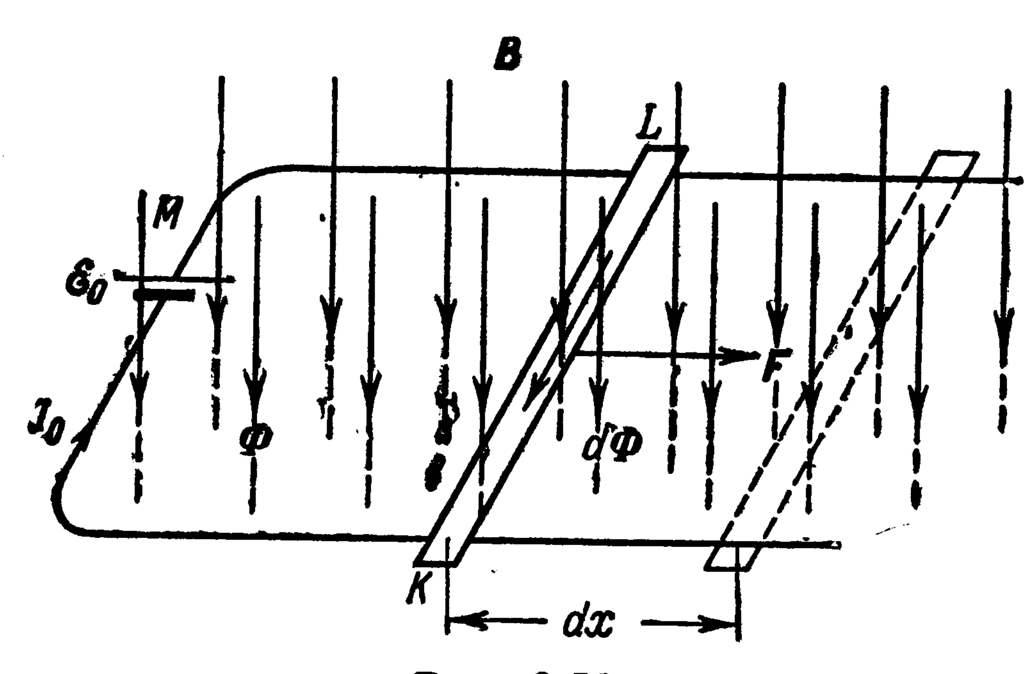


Рис. 3.58.

В этих процессах так же, как и при всех механических, тепловых и электрических явлениях, строго соблюдается закон сохранения энергии. Поэтому вывод количественного выражения для э. д. с. индукции проще всего сделать, исходя из закона сохранения энергии.

Рассмотрим плоский контур с подвижной стороной, изображенный на рис. 3.58. Батарея с э. д. с. $\mathcal{E}_0$ создает в этом контуре

ток I_0. За время dt через контур проходит заряд $dq=I_0dt$, и батарея совершает работу $\mathscr{E}_0I_0dt$. Эта работа будет переходить в тепло, и по закону Джоуля—Ленца

$$\mathscr{E}_0I_0dt=I_0^2R\,dt, \tag{41.1}$$

где R—полное сопротивление всего контура (включая и внутреннее сопротивление батареи). Отсюда в соответствии с законом Ома имеем

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{R}. \tag{41.2}$$

Поместим теперь рассматриваемый контур в однородное магнитное поле с индукцией **B**. Для простоты положим, что вектор **B** перпендикулярен к плоскости контура (см. рис. 3.58). Линии **B** параллельны **n**, связанному с направлением тока в контуре правилом правого винта, и магнитный поток Ф, сцепленный с контуром, положителен. Каждый элемент контура $d\mathbf{l}$ испытывает механическую силу $d\mathbf{F}$. Подвижная сторона рамки будет испытывать результирующую силу $\mathbf{F}_0$.

Позволим теперь подвижному ребру рамки перемещаться вправо с постоянной скоростью v:

$$v=\frac{dx}{dt}=\text{const}. \tag{41.3}$$

При этом в результате электромагнитной индукции ток в контуре изменится и станет равным I. Изменится и сила, действующая на подвижное ребро, которую мы обозначим теперь **F**.

Сила **F** за время dt произведет работу dA, равную ($\mathbf{F}\parallel\mathbf{v}$):

$$dA=F\,dx=Fv\,dt. \tag{41.4}$$

Подставляя сюда значение пондеромоторной силы F, действующей на проводник с током, мы придем к выражению для работы, уже полученному в § 35 (см. (35.1), (35.2)):

$$dA=k'Id\Phi. \tag{41.5}$$

Как и в случае, когда все элементы рамки неподвижны, источником работы, производимой контуром, является подключенная к нему батарея. Но при неподвижном контуре эта работа сводилась только к выделению тепла согласно (41.1). В рассматриваемом случае тепло также будет выделяться, но в другом количестве, так как ток в контуре изменился. Кроме того, контур за время dt совершает механическую работу dA в соответствии с выражением (41.5).

Таким образом, общая работа, совершаемая батареей с э. д. с. $\mathscr{E}_0$ за время dt, равна

$$\mathscr{E}_0Idt=I^2Rdt+k'Id\Phi. \tag{41.6}$$

Разделив это выражение на $IR\,dt$, находим

$$I = \frac{\mathscr{E}_0 - k'\frac{d\Phi}{dt}}{R}. \tag{41.7}$$

Полученное соотношение мы вправе рассматривать как выражение закона Ома для контура, в котором, кроме включенной в него э. д. с. $\mathscr{E}_0$, имеется еще э. д. с. индукции:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}, \tag{41.8}$$

где

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 - k'\frac{d\Phi}{dt} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_{инд}. \tag{41.9}$$

Отсюда

$$\mathscr{E}_{инд} = -k'\frac{d\Phi}{dt}, \tag{41.10}$$

или в системе СИ $k' = 1$ и

$$\mathscr{E}_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{41.10'}$$

Найденное выражение для э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{инд}$ является, как это показали опыты Фарадея, совершенно универсальным и не зависит от способа изменения Φ. Как указывалось в § 40, это изменение может быть обусловлено движением магнитов, проводников с током, с которыми связано поле **B**, либо изменением тока в них, движением или деформацией контуров и т. п.

Во всех этих случаях, в соответствии с (41.10), *э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{инд}$ в контуре равна скорости уменьшения потока индукции Φ, пронизывающего этот контур.* Знак минус в (41.10) (уменьшение Φ) выражает математически правило Ленца.

В системе СИ Φ выражается в *в·сек* и после дифференцирования $\mathscr{E}_{инд}$ получается непосредственно в *в*. Если же Φ и $\mathscr{E}_{инд}$ измерять в единицах, принадлежащих к разным системам, то в формулу (41.10) войдет соответствующий переводный множитель. Так,

$$\mathscr{E}\,(в) = \frac{d\Phi\,(мкс)}{dt\,(сек)}\,10^{-8}. \tag{41.10a}$$

В системе Гаусса $k' = \frac{1}{c}$ и

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{41.11}$$

где $\mathscr{E}$ измеряется в СГС ед. потенциала.

Для выяснения природы э. д. с. индукции рассмотрим детальнее явления, происходящие в подвижной стороне контура. Для простоты примем, что сторонняя э. д. с. $\mathscr{E}_0$ отсутствует. Ток в контуре будет обусловлен только э. д. с. индукции. Эта э. д. с. не сосредоточена, а действует вдоль всей подвижной стороны контура. Другими словами, в этой стороне возникает вызванное индукцией поле $E_{\text{инд}}$, которое в силу тождественности условий во всех точках движущегося проводника в них одинаково. Следовательно, разность потенциалов на концах проводника, т. е. $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, равна произведению $E_{\text{инд}}$ на длину проводника:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = E_{\text{инд}}\, l. \qquad (41.12)$$

Подставляя значение $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ в системе Гаусса, из (41.11) находим

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{Bl\,dx}{dt},$$

откуда

$$E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}B\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{c}Bv, \qquad (41.13)$$

или, учитывая направление векторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ и $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}[\mathbf{B}\times\mathbf{v}] = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \qquad (41.14)$$

В рассматриваемом случае величину $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ можно получить непосредственно из выражения лоренцовой силы. Действительно, на частицу с зарядом e, движущуюся вместе с подвижной стороной контура со скоростью $\mathbf{v}$, в поле $\mathbf{B}$ действует сила $\mathbf{f}$, равная

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \qquad (41.15)$$

Такую же силу, действующую на заряд, дает электрическое поле $\mathbf{E}' = \mathbf{f}/e$, равное

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]. \qquad (41.16)$$

Таким образом, величина силы, действующей на заряд, которая получена с помощью выражения для лоренцовой силы, в точности совпадает с результатом (41.14).

В рассматриваемом примере введение электрического поля индукции $\mathbf{E}'$ может показаться искусственным приемом. Движение контура происходит в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Возникающую в контуре э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ (и ее поле $\mathbf{E}_{\text{инд}}$) можно рассматривать как стороннюю э. д. с., обусловленную наличием магнитного взаимодействия поля $\mathbf{B}$ и зарядов контура. При этом не ставится вопрос о том, имеется ли в контуре реальное

электрическое поле $\mathbf{E}'$ или величина $\mathbf{E}'$ (41.16) введена лишь для удобства написания выражения силы $\mathbf{f}$, действующей на заряд e (в виде $\mathbf{f}=e\mathbf{E}'$). Такая точка зрения допустима, однако она формальна и лишает возможности дальнейших важных обобщений, подтверждаемых опытом и свидетельствующих о реальном существовании поля $\mathbf{E}'$.

Для выяснения этого вопроса вернемся к задаче о поле одной заряженной частицы. В § 39 было показано, что в системе координат, покоящейся по отношению к заряженной частице, поле частицы будет проявляться как чисто электрическое. При движении по отношению к частице (или частицы по отношению к выбранной системе координат) поле частицы проявляется как поле электрическое плюс поле магнитное.

Отсюда был сделан вывод, что в общем случае можно говорить лишь об электромагнитном поле, представляющем некоторое единство *). Наличие тех или иных составляющих поля определяется не только природой источников поля, но и характером движения этих источников относительно выбранной системы отсчета.

Так, в системе отсчета, в которой точечный заряд e покоится, его поле представлено лишь электрическими составляющими $\mathbf{E}=e\mathbf{r}/r^3$ (см. (39.6)), а магнитное поле равно нулю. В системе же отсчета, относительно которой заряд движется со скоростью $\mathbf{v}$, его поле содержит и магнитные составляющие $\mathbf{H}=\frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right]$ (см. (39.7)). Совершенно аналогично в системе отсчета, в которой токи покоятся, их поле представлено практически одними магнитными составляющими $\mathbf{B}$. В системе же отсчета, относительно которой эти токи, а следовательно, и поле $\mathbf{B}$ движутся, оказываются отличными от нуля и электрические составляющие поля.

Если мы хотим узнать, каковы силы, действующие на заряды в данном элементе контура, движущегося в поле $\mathbf{B}$, то естественно рассмотреть их в системе отсчета, связанной с этим элементом. Переходя к новой системе отсчета, в которой элемент контура неподвижен, а поле $\mathbf{B}$ (вместе с токами, его порождающими) движется, мы найдем, что это поле характеризуется отличными от нуля составляющими электрического поля $\mathbf{E}'=\mathbf{E}_{\text{инд}}$, которые и были определены раньше (см. (41.14) или (41.16)).

Таким образом, мы имеем две альтернативные точки зрения:

1. В системе отсчета, в которой покоится поле $\mathbf{B}$ и движется элемент контура со скоростью $\mathbf{v}$, мы можем принять, что силы,

---

*) Как уже указывалось в § 39, последовательно и строго такое описание поля осуществляется в теории относительности, где вводятся не два независимых вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а одна величина — тензор — с шестью отличными от нуля компонентами, которые отвечают трем составляющим для $\mathbf{E}$ и трем для $\mathbf{B}$.

действующие на заряд e, обусловлены магнитным взаимодействием и равны

$$\mathbf{f}_{\text{магн}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \qquad (41.17)$$

2. В системе отсчета, в которой покоится данный элемент контура ($\mathbf{v}_{\text{конт}} = 0$) и движется магнитное поле, на заряд действуют не «магнитные силы», а чисто электрическое поле индукции $\mathbf{E}'$. Сила, действующая на заряд в этом элементе контура,

$$\mathbf{f}_{\text{эл}} = e\mathbf{E}', \qquad (41.18)$$

а значение $\mathbf{E}'$, которое дает то же значение силы, что и (41.17) будет

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \qquad (41.14)-(41.16)$$

В рассматриваемом случае величина $\mathbf{v}$ есть скорость элемента контура относительно поля. Логичнее, однако, здесь ввести скорость поля $\mathbf{v_B}$ относительно элемента контура, считаемого неподвижным. Поскольку

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v_B}, \qquad (41.19)$$

последнее выражение для $\mathbf{E}'$ следует переписать так:

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v_B} \times \mathbf{B}]. \qquad (41.20)$$

Мы можем толковать полученный результат следующим образом: *магнитное поле* $\mathbf{B}$, *движущееся со скоростью* $\mathbf{v_B}$, *порождает электрическое поле* $\mathbf{E}'$. В § 50 будет показано, как важна установленная с помощью соотношения (41.20) взаимосвязь полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}'$. Здесь же для нас важно лишь то, что в каждом элементе контура, движущегося в $\mathbf{B}$, поле $\mathbf{E}'$ следует считать реальным электрическим полем. При этом для вычисления $\mathbf{E}'$ удобнее пользоваться не записью (41.20), а (41.14)—(41.16), так как различные элементы контура могут двигаться с разными скоростями.

Таким образом, если исходить не из точки зрения стороннего наблюдателя, неподвижного по отношению к полю $\mathbf{B}$, а рассматривать силы, действующие в каждом элементе контура, в системе отсчета, связанной с этим элементом контура, мы должны будем считать, что в контуре имеется реальное электрическое поле индукции $\mathbf{E}'$. Суммарное действие этих сил по всему контуру и приводит к возникновению в контуре $\mathscr{E}_{\text{инд}}$.

Электрическое поле индукции $\mathbf{E}'$ не отличается от электростатического поля $\mathbf{E}$ электрических зарядов по своему действию на электрический заряд в данной точке пространства. Но по своей

структуре, т. е. в целом, эти поля резко отличаются друг от друга. Электростатическое поле имеет «источники поля» — электрические заряды. Линии напряженности его не замкнуты: они начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах. В этом поле работа по перемещению заряда между двумя фиксированными точками зависит только от положения этих точек, но не от формы пути. Отсюда следует, что работа по перемещению заряда по любому замкнутому контуру равна нулю. Значит, и циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру (численно равная работе по перемещению в этом контуре заряда $q=+1$) равна нулю:

$$\oint E_l\,dl=0. \tag{41.21}$$

Именно это обстоятельство и позволило ввести новую характеристику электростатического поля — электрический потенциал φ (см. § 8).

В отличие от электростатического поля *поле* $\mathbf{E}'$ *не имеет источников.* Линии напряженности этого поля замкнуты подобно линиям магнитного поля. При перемещении заряда $q=+1$ по контуру, совпадающему с замкнутой линией $\mathbf{E}'$, направление перемещения все время совпадает с направлением действия силы (или все время — против нее). Знак элементарной работы dA все время один и тот же. Следовательно, работа, произведенная при обходе всего контура, всегда отлична от нуля:

$$\oint E'_l\,dl=\oint \mathbf{E}'d\mathbf{l}\neq 0.$$

То же самое имеет место, вообще говоря, и для произвольного замкнутого контура П:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=\oint\limits_{\text{П}} E'_l\,dl\neq 0. \tag{41.22}$$

Поля такой структуры в отличие от потенциальных полей (электростатического поля, поля тяготения) носят название с о л е н о и д а л ь н ы х.

Интеграл (41.22) представляет собой работу, совершаемую индукционным электрическим полем $\mathbf{E}'$ при переносе единичного заряда вдоль замкнутого контура, т. е. он равен электродвижущей силе индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, возникающей в этом контуре. В разобранном выше примере контура (рис. 3.58) индукционное поле $E'=B\frac{v}{c}$ возникает лишь в подвижной стороне контура KL, поскольку внешний участок цепи LMK неподвижен относительно магнитного поля. Поэтому интеграл (41.22) сводится лишь к интегралу по подвижной стороне

и равен, как было показано выше,

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = \oint E'_l\,dl = \int_K^L E'\,dl = k'Bl\frac{v}{c} = -k'\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (41.23)$$

Это выражение остается, очевидно, справедливым, если все элементы рамки будут перемещаться относительно поля, если рамка будет произвольным образом деформироваться и т. д. Оно останется также верным, если рамка будет оставаться неподвижной, но в ней будет меняться поток магнитной индукции Φ.

Необходимость такого обобщения можно представить себе наглядно из следующих соображений. Линии поля индукции **B** не имеют источников и всегда замкнуты. Следовательно, если число линий индукции, проходящих сквозь контур, увеличивается (что отвечает росту потока Φ, проходящего сквозь контур), то это значит, что линии индукции **B** «проникают» внутрь контура, пересекая его. Сила, действующая на электроны в контуре, конечно, не будет зависеть от того, происходит ли пересечение контура линиями индукции **B** в силу деформации контура в постоянном поле **B** или оно обусловлено движением поля, пересекающего контур при изменении потока Φ, проходящего через контур.

Таким образом, формулу (41.23) *мы вправе рассматривать как совершенно универсальное соотношение между циркуляцией электрического поля индукции по любому заданному контуру* П (*неизменному или деформируемому*) *и изменением магнитного потока* Φ, *сцепленного с этим контуром*:

$$\oint_{\Pi} E'_l\,dl = -k'\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (41.24)$$

В гауссовой системе единиц:

$$\oint_{\Pi} E'_l\,dl = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (41.25а)$$

В системе единиц СИ

$$\oint_{\Pi} E'_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (41.25б)$$

Это выражение имеет смысл всегда, независимо от того, реализован ли контур П *в виде линейного проводника, диэлектрика или речь идет о мысленно выделенном контуре в вакууме.*

Если контур имеет вид металлического проводника с сопротивлением R, то в нем возникает ток $I_{\text{инд}}$, равный

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R}. \qquad (41.26)$$

Если контур сделан из диэлектрика, то каждый элемент его поляризуется в соответствии с действующим в нем электрическим полем $\mathbf{E}_{\text{инд}}$.

Если контур разомкнут, то электрический ток в нем возникнуть не может. В результате действия $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ в нем произойдет перераспределение зарядов, так что на концах проводника скопятся свободные заряды. В системе единиц СИ разность потенциалов между концами проводника I и II будет равна

$$\mathscr{E}_{\text{I, II, инд}} = \int\limits_{\text{I}}^{\text{II}} E_{l,\ \text{инд}}\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (41.27)$$

где $d\Phi$ — магнитный поток, пересекаемый проводником при его движении за время dt.

Наконец, если заряд движется в вакууме по контуру П, то при каждом обходе этого контура механическая энергия заряда $\frac{mv^2}{2}$ возрастает на величину $\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, равную работе электрических сил индукции в этом контуре:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \oint\limits_{\text{П}} f_l\, dl = e\oint\limits_{\text{П}} E'_l\, dl = e\mathscr{E}_{\text{инд}}. \qquad (41.28)$$

На использовании $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ в вакууме основан оригинальный ускоритель электронов, получивший название **бетатрона**. В современных бетатронах электроны получают такую энергию, которую они могли бы набрать при прохождении поля с разностью потенциалов в несколько сотен миллионов вольт. При этом их масса возрастает за счет приобретенной кинетической энергии в несколько сот раз, а скорость лишь незначительно отличается от скорости света. Электроны больших энергий, получаемые с бетатронов, используются для изучения ядерных реакций и для получения весьма проникающего рентгеновского излучения, позволяющего просвечивать детали гигантских машин толщиной в десятки сантиметров.

Бетатрон представляет собой электромагнит, между полюсными наконечниками которого находится полое кольцо (тор), в котором создан вакуум. Разрез бетатрона показан на рис. 3.59. Пучок электронов, испускаемых накаленной нитью, впускается в тор и движется по его осевой окружности. С момента впуска электронов ток в электромагните, а значит и поле H между его наконечниками, возрастает. Следовательно, возрастает и поток индукции, проходящий сквозь окружность — траекторию электронов. Возникающее при этом вихревое электрическое поле ускоряет электроны.

Вспомним теперь, что радиус траектории электронов равен

$$R=\frac{cmv}{eH}.$$

Электроны будут продолжать двигаться по окружности постоянного радиуса, не попадая на стенки тора, если по мере увеличения их скорости v и массы m магнитное поле растет так, чтобы отношение mv/H оставалось постоянным. С другой стороны, ускорение электронов, т. е. увеличение v и m, обусловлено скоростью роста Ф.

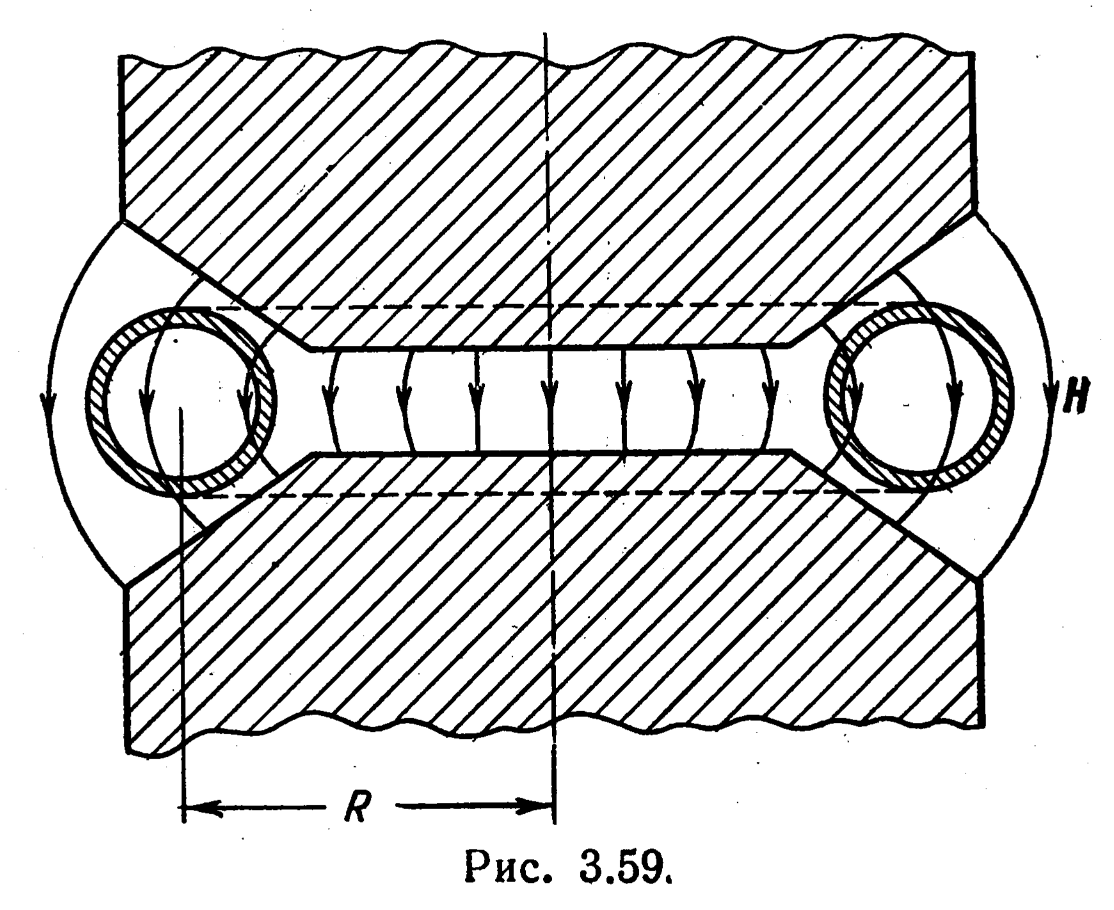


Рис. 3.59.

Следовательно, скорость возрастания потока индукции Ф через орбиту электронов и скорость увеличения H на самой орбите должны быть строго согласованы. Именно с этой целью полюсным наконечникам придается форма, показанная на рис. 3.59. При этом напряженность поля на орбите примерно вдвое меньше, чем в центральных частях потока. Насколько точно оправдывается расчет, исходящий, как указывалось, из факта увеличения не только скорости, но и массы электрона (притом в сотни раз), можно судить по тому, что электроны не сбиваются со своей орбиты в течение многих миллионов оборотов, во время которых происходит их ускорение.

Рассмотрим теперь вопрос о превращении с помощью э. д. с. индукции работы механических сил в работу электрических сил. Для этого обратимся снова к рис. 3.58. Подвижную сторону будем считать металлической; силу, действующую на заряды в этом ребре, будем согласно (41.15) считать лоренцовой силой*).

*) Как было уже показано, в системе отсчета, неподвижной по отношению к **B**, эта точка зрения возможна и явное введение $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ не обязательно.

Лоренцова сила, возникающая при движении положительных ионов в решетке металла подвижного ребра рамки, направлена вверх (рис. 3.60). Эти ионы не способны перемещаться относительно рамки. Таким образом, сила, действующая на них, всегда перпендикулярна к их перемещениям и работы не совершает.

Электроны же под действием лоренцевой силы (направленной на рис. 3.60 вниз) будут перемещаться вдоль рамки вниз. Сталкиваясь с ионами решетки и другими электронами и обмениваясь с ними энергией, электроны будут двигаться с некоторой средней скоростью $\mathbf{u}$. Мы не допустим погрешности, приняв для простоты, что истинная скорость электронов вдоль рамки равна $\mathbf{u}$. Таким образом, скорость электронов $\mathbf{v}_{эл}$ складывается из двух взаимно перпендикулярных составляющих: $\mathbf{u}$ и скорости перемещения рамки $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}_{эл}=\mathbf{u}+\mathbf{v}. \qquad (41.29)$$

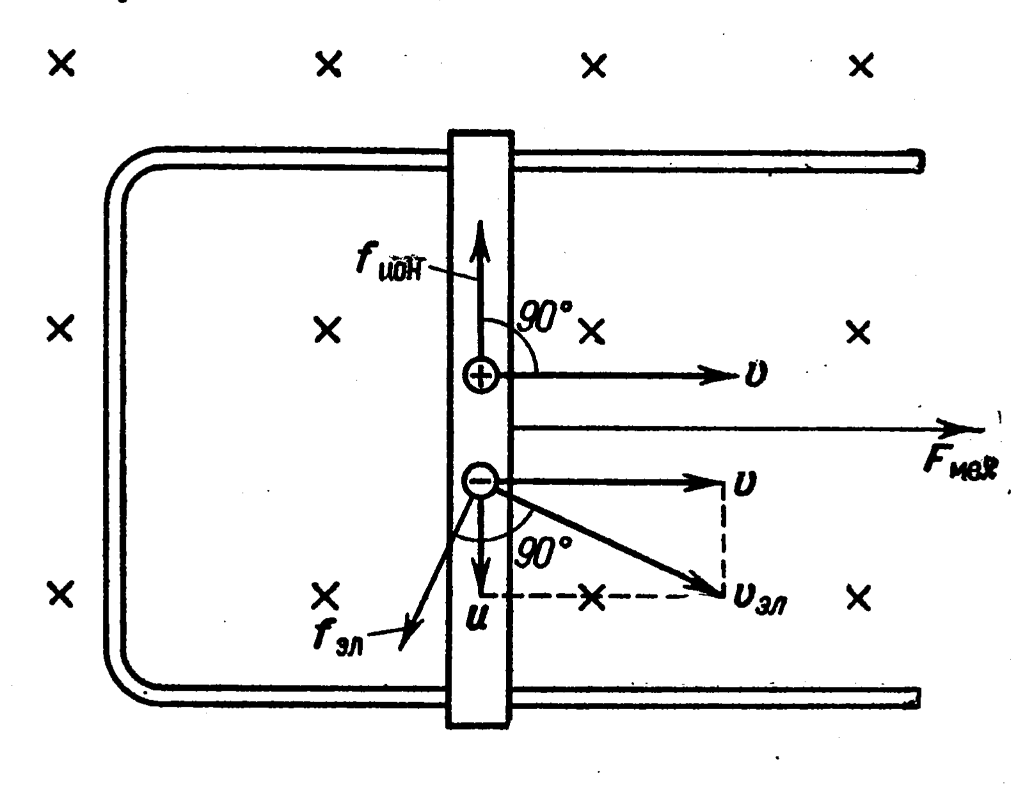


Рис. 3.60.

Лоренцова сила $\mathbf{f}_{эл}$, действующая на электрон, обладающий скоростью $\mathbf{v}_{эл}$, будет перпендикулярна к $\mathbf{v}_{эл}$. Поэтому, как было уже показано в § 36, работа, совершаемая этой силой, всегда равна нулю:

$$dA=\mathbf{f}_{эл}\mathbf{v}_{эл}dt=0. \qquad (41.30)$$

Разобьем теперь силу $\mathbf{f}_э$ на составляющие, одна из которых, $\mathbf{f}_{\parallel}$, параллельна подвижному ребру рамки, а другая, $\mathbf{f}_{\perp}$, перпендикулярна к нему. Тогда (41.30) можно представить в виде

$$dA=\mathbf{f}_{\parallel}\mathbf{u}dt+\mathbf{f}_{\perp}\mathbf{v}\,dt=0. \qquad (41.31)$$

Сила $\mathbf{f}_{\perp}$ направлена против перемещения ребра рамки (т. е. против $\mathbf{v}$), и ее работа отрицательна.

Чтобы это ребро перемещалось с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ вправо, надо приложить к нему внешнюю силу $\mathbf{F}_{мех}$, которая, в пересчете на каждый электрон подвижного ребра, будет равна по величине, но противоположна по знаку $\mathbf{f}_{\perp}$:

$$\mathbf{f}_{мех}=\frac{\mathbf{F}_{мех}}{N}=-\mathbf{f}_{\perp} \qquad (41.32)$$

(здесь N — число электронов в подвижном ребре рамки).

Сила же $\mathbf{f}_{\parallel}$ гонит электроны вдоль контура, т. е. совершает электрическую работу. Подставляя вместо $\mathbf{f}_{\perp}$ в (41.31) $\mathbf{f}_{мех}$, согласно (41.32) получаем

$$\mathbf{f}_{\parallel}\mathbf{u}\,dt-\mathbf{f}_{мех}\mathbf{v}\,dt=0,$$

или

$$\mathbf{f}_{мех}\mathbf{v}\,dt=\mathbf{f}_{\parallel}\mathbf{u}\,dt. \qquad (41.33)$$

Эта формула показывает, что *механическая работа, произведенная над каждым электроном приложенной к рамке внешней силой, отдается этим электроном обратно (и полностью) в виде электрической работы в контуре.*

Обратим внимание читателя на следующее существенное обстоятельство. В § 36 было показано, что в постоянном магнитном поле лоренцова сила не производит работы над движущейся в этом поле заряженной частицей (см. (36.12) и (36.13)). Здесь же мы показали, что работа тока, вызванного э. д. с. индукции, в конечном счете обусловлена действием лоренцовых сил на электроны в контуре. Противоречие?

Никакого противоречия нет. И в рассматриваемом случае результат § 36 (равенство нулю работы лоренцовой силы) учтен формулой (41.30), принявшей теперь вид (41.33).

В данном случае равенство нулю полной работы, производимой лоренцовой силой над подвижными электронами (41.30), (41.31), выражает здесь закон сохранения энергии: механическая работа, произведенная над контуром, превращается целиком в работу электрических сил в этом контуре.

Из сказанного ранее с очевидностью следует, что для получения электрической работы не обязательно механические силы прилагать к самому контуру. Так, например, вместо деформации контура с помощью внешней силы, как это имело место в рассмотренном примере, можно, оставляя контур неизменным, вталкивать в него магнит (т. е. менять поток Φ через контур). При этом работа, затраченная на перемещение магнита, превратится в работу электрических сил в контуре.

§ 42. Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции позволяет преобразовывать энергию механического движения в энергию электрического тока и уже около 100 лет широко используется в технике для этой цели. Для выяснения основных принципов и закономерностей промышленных методов генерирования электрического тока рассмот-

рим простейший пример плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле, изображенной на рис. 3.61, *а* и *б*.

Обозначим площадь рамки через S и угол между нормалью к рамке **n** и линиями вектора **B** через α. Тогда магнитный поток, сцепленный с рамкой, будет равен

$$\Phi = BS\cos\alpha. \qquad (42.1)$$

Начнем равномерно вращать рамку с угловой скоростью ω. Угол α будет расти со временем линейно по закону

$$\alpha = \omega t. \qquad (42.2)$$

В рамке тогда будет возникать переменная э. д. с. индукции. В системе единиц СИ

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin\omega t = \mathscr{E}_{\text{макс}}\sin\omega t. \qquad (42.3)$$

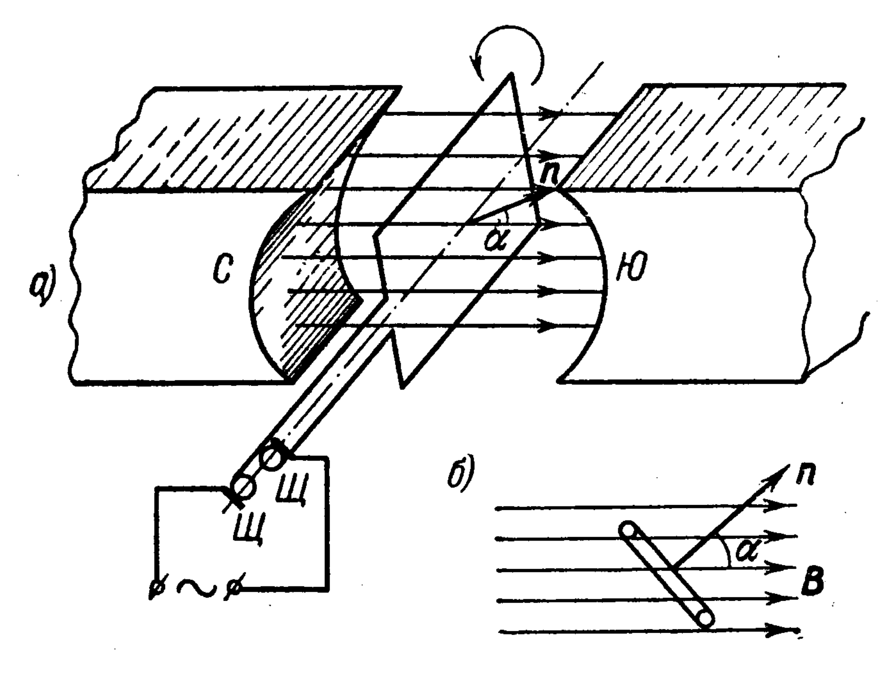


Рис. 3.61.

Зависимость $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ от времени носит периодический (синусоидальный) характер и изображена на рис. 3.62. Величина

$$\mathscr{E}_{\text{макс}} = BS\omega = \mu\mu_0 HS\omega \qquad (42.4)$$

определяет максимальные значения, достигнутые колеблющейся э. д. с., и называется амплитудой электродвижущей силы или амплитудой напряжения, создаваемого подобной моделью генератора переменного тока.

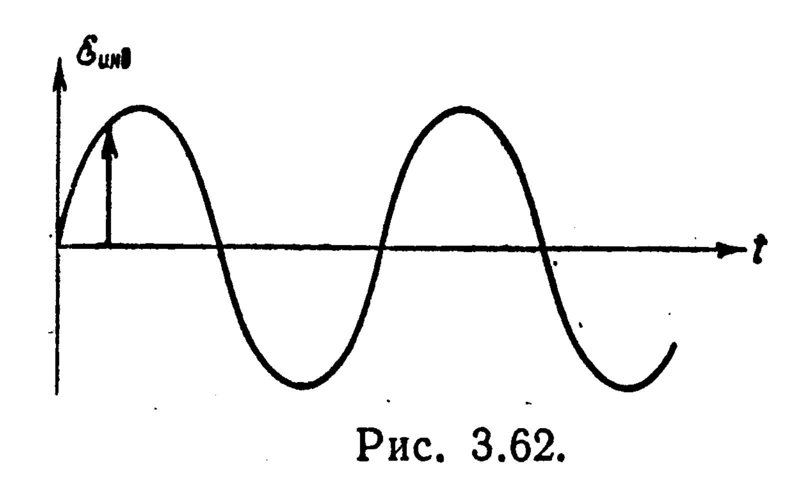


Рис. 3.62.

Как видно из (42.4), для увеличения напряжения $\mathscr{E}$ на зажимах генератора следует увеличивать величины ω, H, μ и S. Значительное увеличение скорости вращения генератора ω приводит к сильному возрастанию механических напряжений во вращающихся частях. Поэтому во многих странах, в том числе и у нас, принята стандартная частота переменного тока $\nu = \omega/2\pi = 50$ герц. В некоторых странах стандартная частота тока $\nu = 60$ герц.

Увеличение магнитной индукции поля B требует установки мощных постоянных магнитов или значительного тока в случае электромагнитов. Поэтому помещают внутрь рамки и электромагнита сердечники из ферромагнитных материалов с большой магнитной проницаемостью μ.

Наконец, для увеличения S в генераторе вращают не один виток, а целый ряд витков, соединенных последовательно друг с другом.

В результате использования всех этих возможностей современные генераторы переменного тока могут создавать напряжение в несколько десятков тысяч вольт при мощности до 500 000 *квт* в одном агрегате *).

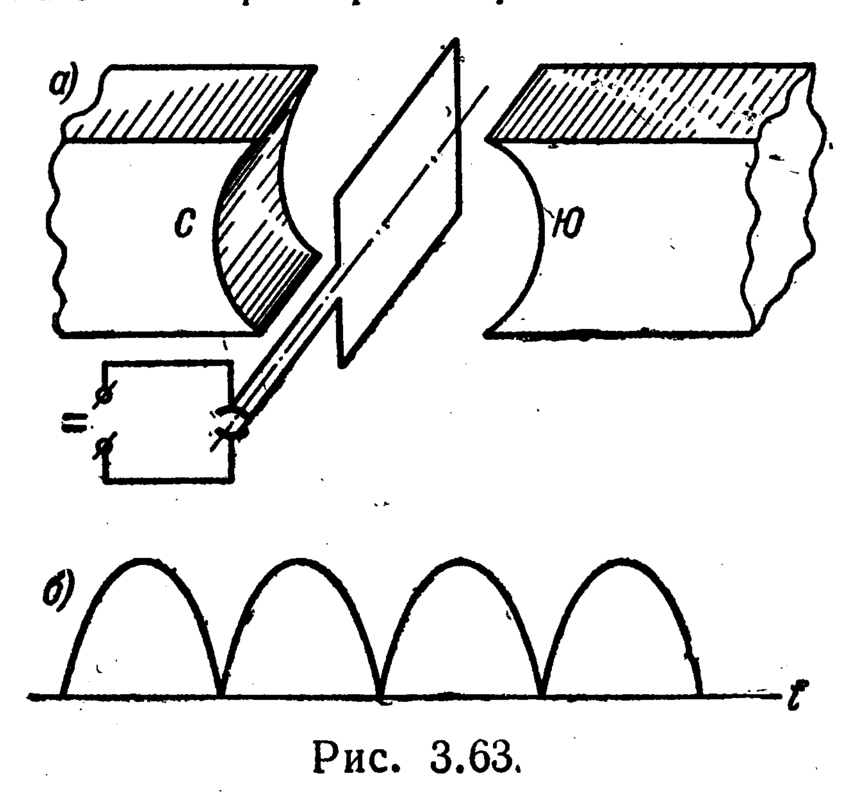


Рис. 3.63.

Переменное напряжение снимается с вращающегося витка с помощью щеток *Щ*, схематически изображенных на рис. 3.61. Для получения постоянного тока следует изменить схему коммутации. На рис. 3.63, *а* изображена схема расположения щеток, при которой виток, повернувшись на 180°, соприкасается с той же самой щеткой противоположным концом.

На рис. 3.63, *б* изображена зависимость напряжения $\mathscr{E}$ на щетках от времени при такой коммутации. Видно, что ток получается постоянным по направлению, но пульсирующим по величине.

Для сглаживания этих пульсаций применяют следующий способ. Вместо одной рамки применяется несколько. Каждая из них соединяется со щетками в тот момент, когда индуктируемая в ней э. д. с. оказывается по величине наибольшей. На рис. 3.64, *а* показан простейший случай, когда вращающаяся часть генератора состоит из двух рамок, плоскости которых находятся под углом в 90°.

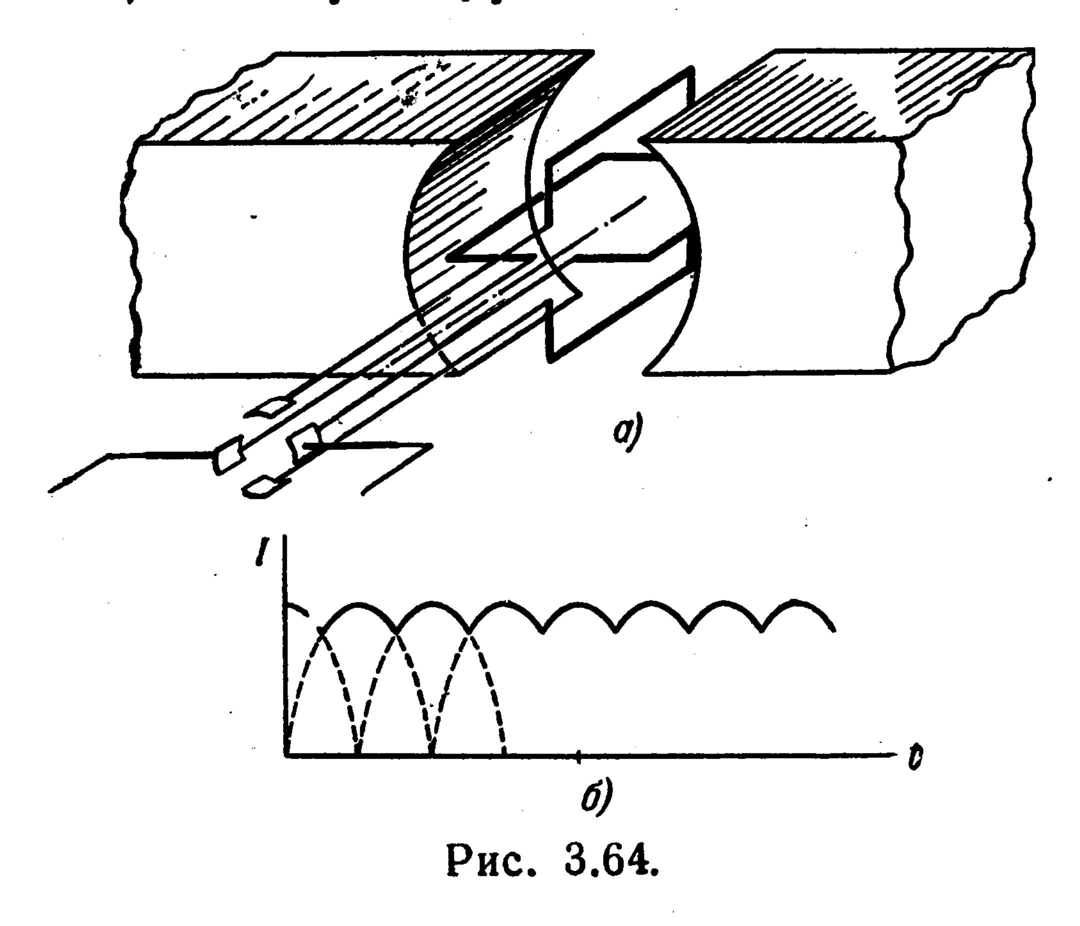


Рис. 3.64.

На рис. 3.64, *б* показаны токи, снимаемые с каждой рамки, и суммарный ток. Увеличение числа рамок приводит к еще большему сглаживанию тока.

*) Проектируемые в СССР для ряда электростанций генераторы будут иметь еще большую мощность.

Процесс превращения механической энергии в электрическую можно обратить. Если через рамку, помещенную в магнитное поле, пропускать электрический ток, то в соответствии с (29.3) на нее будет действовать крутящий момент и рамка начнет вращаться. В этом случае мы получим электрический мотор. Первый электрический двигатель был сконструирован Б. С. Якоби и приводился в действие током от батареи из 320 гальванических элементов. В 1839 г. по Неве стал плавать первый в мире электроход, приводившийся в движение этим двигателем. В настоящее время многочисленные электрические двигатели самой различной мощности приводят в движение станки, электровозы, подводные лодки, электротракторы и другие агрегаты. Схемы и конструкции различных электродвигателей и генераторов тока рассматриваются в курсе электротехники.

§ 43. Взаимная индукция. Трансформаторы

Переменное магнитное поле, индуктирующее ток, само в свою очередь может создаваться переменными токами, текущими по другим проводам или в том же контуре. В этих случаях мы говорим о явлениях взаимной индукции и самоиндукции.

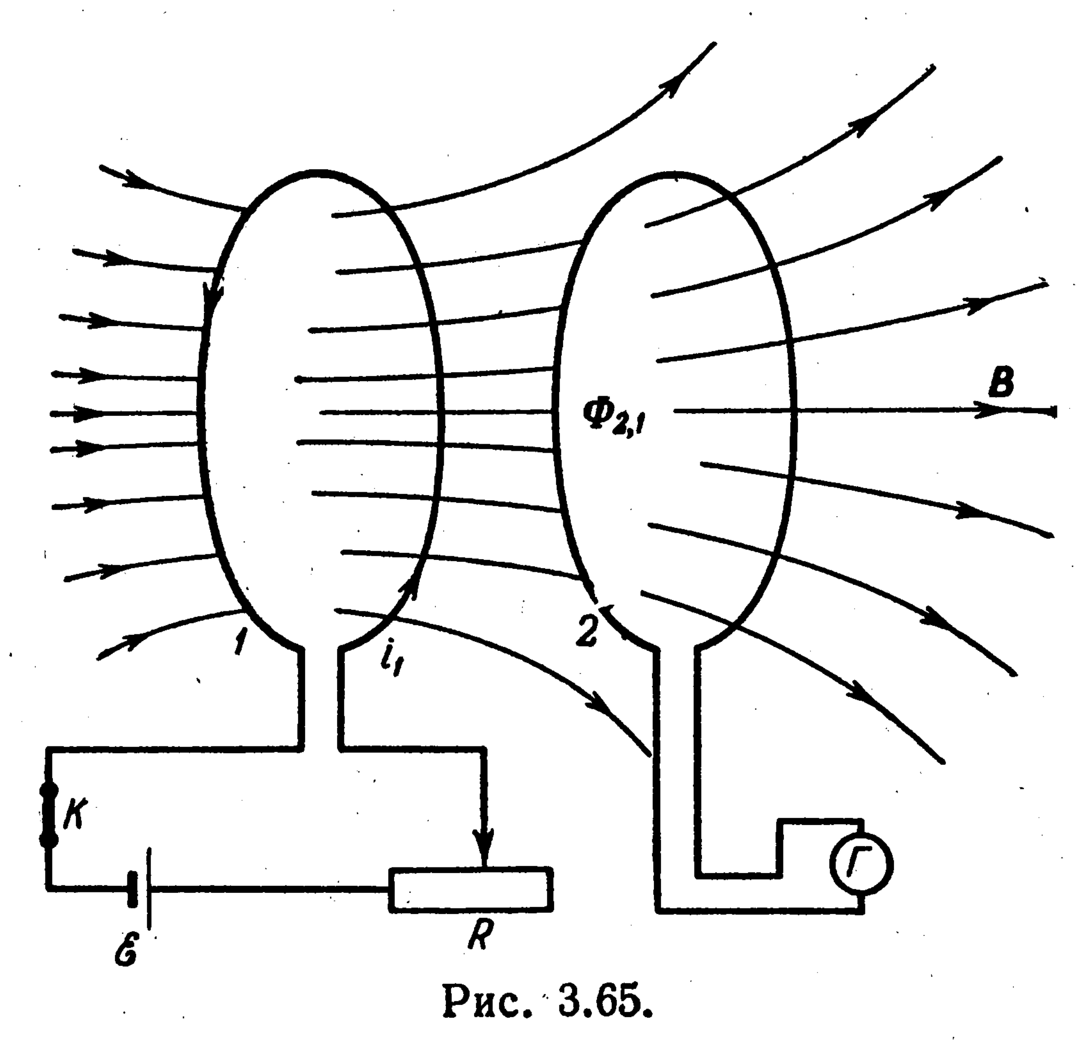


Рис. 3.65.

Рассмотрим сначала взаимную индукцию двух токов. Контур *1*, изображенный на рис. 3.65, присоединен к источнику тока $\mathcal{E}$. С помощью реостата R можно менять ток i_1 в этом контуре, а ключом K можно этот ток полностью выключать или включать. Ток i_1 создает вокруг себя магнитное поле, линии индукции

которого пронизывают контур *2*, расположенный на некотором расстоянии от контура *1*. Вследствие этого с контуром *2* будет сцеплен некоторый магнитный поток $\Phi_{2,1}$. Если ток i_1 в контуре *1* увеличить, например, вдвое, то во столько же раз возрастут величины H и B во всех точках окружающего пространства, а следовательно, ровно во столько же раз увеличится и магнитный поток $\Phi_{2,1}$. Таким образом, магнитный поток $\Phi_{2,1}$, сцепленный с контуром *2*, прямо пропорционален создающему этот поток току i_1. Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности $M_{2,1}$, зависящий от размеров, формы и взаимного расположения контуров, можно записать:

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} i_1. \qquad (43.1а)$$

Величина $M_{2,1}$ носит название коэффициента взаимной индукции, или взаимной индуктивности, обоих контуров. Из (43.1) следует, что при $i_1 = 1$ $\Phi_{2,1} = M_{2,1}$, т. е. ***взаимная индуктивность двух контуров равна магнитному потоку, сцепленному со вторым контуром, если ток в первом контуре равен единице.***

Единица взаимной индуктивности в системе СИ носит название генри (*гн*). Из (43.1) можно найти размерность этой единицы:

$$1\,гн = \frac{1\,в \cdot сек}{1\,а}, \qquad (43.2а)$$

и определить ее величину. 1 *гн* есть взаимная индуктивность таких двух контуров, если ток в 1 *а*, текущий в первом контуре, создает во втором контуре магнитный поток в 1 *в·сек*.

В гауссовой системе единиц коэффициент взаимной индукции вводится так:

$$\Phi_{2,1} = \frac{1}{c} M_{2,1} i_1. \qquad (43.1б)$$

Из размерностей входящих в (43.1б) величин следует, что размерность $M_{2,1}$ в системе СГС есть размерность длины. Единица индуктивности в системе СГС, согласно (43.1б), есть такая индуктивность, при которой ток, равный c СГС единиц тока (10 *а*), образует во втором контуре магнитный поток в 1 максвелл (*мкс*). Эта единица индуктивности носит название *сантиметр* (*см*).

Зная соотношение между всеми единицами, входящими в (43.1а) и (43.1б), легко определить и соотношение между единицами индуктивности. Согласно (43.1б)

$$1\,см = \frac{c\,1\,мкс}{1\,СГС\ ед.\ тока}, \qquad (43.2б)$$

откуда, используя (43.2), находим

$$\frac{1\,гн}{1\,см} = c\,\frac{1\,в \cdot сек}{1\,мкс}\,\frac{1\,СГС\ ед.\ тока}{1\,а} = \frac{c \cdot 10^8}{c/10} = 10^9,$$

т. е.

$$1\ гн = 10^9\ см. \qquad (43.3)$$

Как и всюду прежде, мы можем записать эти формулы в виде пригодном для обоих принятых нами систем единиц, вводя, согласно § 32, коэффициент k' $\left(\text{в СГС } k'=\frac{1}{c}, \text{ в СИ } k'=1\right)$. Вместо (43.1а) и (43.1б) будем писать

$$\Phi_{2,1} = k' M_{2,1} i_1. \qquad (43.1в)$$

Если пропускать ток i_2 через второй контур, а наблюдать магнитное поле около первого контура, то с первым контуром окажется сцепленным магнитный поток $\Phi_{1,2}$, пропорциональный току i_2:

$$\Phi_{1,2} = k' M_{1,2} i_2. \qquad (43.4)$$

При вычислении коэффициентов $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$ надо сначала по закону Био—Савара—Лапласа найти напряженность поля, создаваемого одним из токов в любой точке пространства. Для этого придется вычислять линейный интеграл (30.1). По найденному H в соответствии с (29.10) находится B в любой точке пространства, после чего с помощью (34.5) рассчитывается поверхностный интеграл для Φ. Можно показать, что оба кратных интеграла $M_{2,1}$ и $M_{1,2}$ равны друг другу и для обоих контуров существует лишь один коэффициент взаимной индукции

$$M_{2,1} = M_{1,2} = M. \qquad (43.5)$$

Если ток i_1, текущий по первому контуру, будет изменяться, то пропорционально ему будет изменяться магнитный поток $\Phi_{2,1}$, сцепленный со вторым контуром, и в последнем возникнет э. д. с. взаимной индукции

$$\mathscr{E}_{2,\,\text{вз. инд}} = -k'\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -k'\frac{d}{dt}(k'Mi_1) = -k'^2 M\frac{di_1}{dt}\ ^{*)}. \qquad (43.6)$$

Соотношение (43.6) позволяет дать второе, динамическое, определение величины M. *Взаимная индуктивность двух контуров равна э. д. с. индукции возникающей в одном из этих контуров, когда ток в другом контуре убывает на $1/k'^2$ за единицу времени.*

Соответственно этому определению 1 *гн* есть взаимная индуктивность таких двух контуров, у которых при равномерном

---

*) Последнее равенство имеет место только для неподвижных и недеформируемых контуров, для которых $M=\text{const}$. В общем случае $\Phi_{2,1} = k'Mi$ и

$$\mathscr{E}_{2,\,\text{вз. инд}} = -k'\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -k'^2 M\frac{di_1}{dt} - k'^2 i_1\frac{dM}{dt}.$$

убывании тока в одном контуре на 1 *а* за каждую секунду в другом контуре возникает э. д. с. индукции, равная 1 *в*. Предлагаем читателю определить аналогичным образом единицу индуктивности СГС — 1 *см*.

Следует особо выделить случай многосвязных контуров, например выполненных в виде ряда последовательно соединенных витков. На рис. 3.66 изображены два таких контура. В первом случае (рис 3.66, *а*) первичный контур выполнен в виде катушки с сердечником и подключен к источнику тока. Вторичный контур состоит из двух витков, надетых на первичный и подключенных к гальванометру *Г*. Через сердечник и любой виток проходит один и тот же магнитный поток Ф. Этот же поток Ф пронизывает и каждый из витков вторичного контура. Поэтому полный поток через вторичный контур Ψ равен

$$\Psi_a = 2\Phi \tag{43.7}$$

и взаимная индуктивность обоих контуров M_a в два раза больше, чем в случае одного витка.

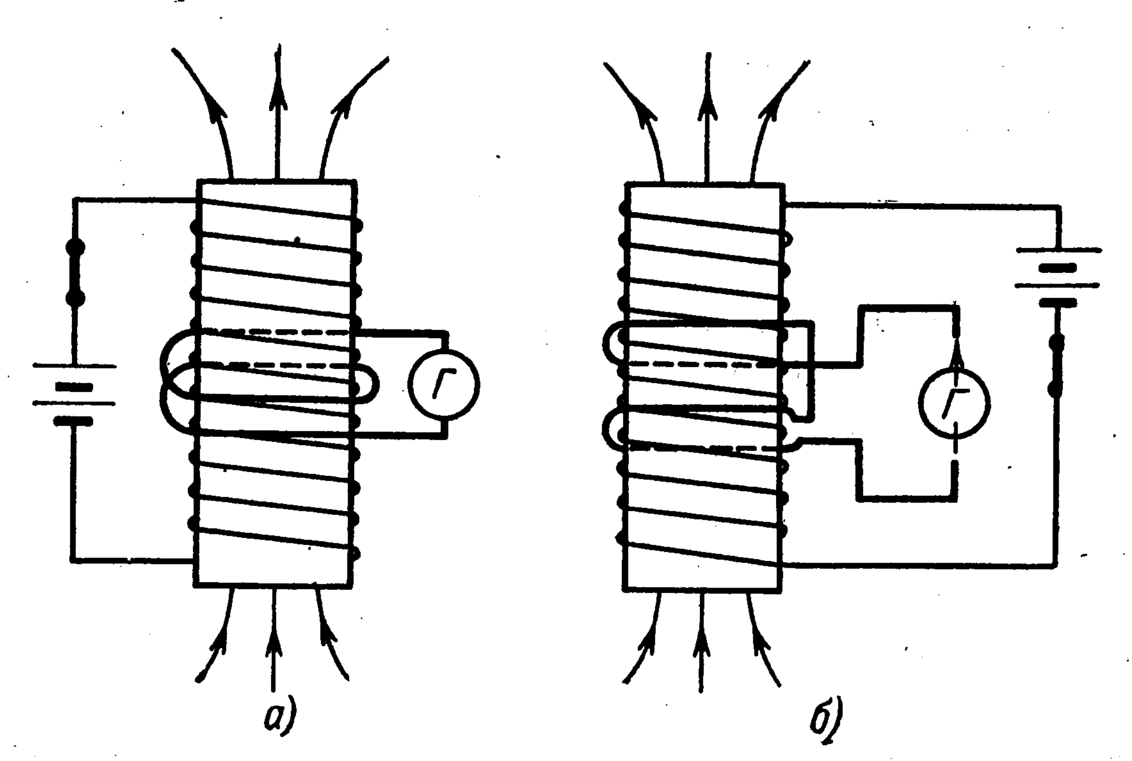


Рис. 3.66.

В другом случае (рис. 3.66, *б*) оба витка вторичного контура охватывают катушку в противоположных направлениях, следовательно, полный поток через этот контур

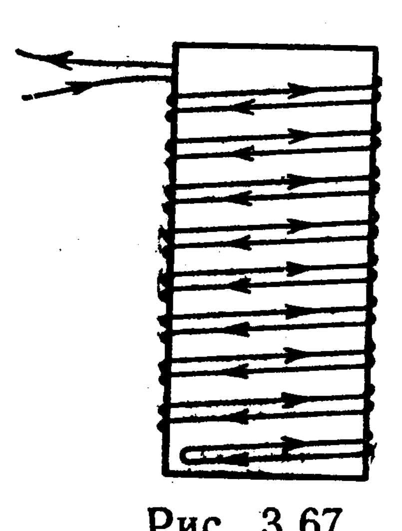
$$\Psi_б = \Phi - \Phi = 0, \tag{43.8}$$

и взаимная индуктивность обоих контуров $M_б$ равна нулю.

При включении тока в первичный контур в случае *а* гальванометр покажет отброс, вдвое больший, чем для одного отдельного витка. В случае *б*) гальванометр не дает никакого отброса при включении тока в первичном контуре: во вторичном контуре не возникает э. д. с. индукции.

Это обстоятельство учитывается в так называемой бифилярной намотке проводов в тех случаях, когда необходимо избежать возникновения в них паразитных индукционных токов. Провод складывается вдвое и в таком виде наматывается на катушку, как это показано на рис. 3.67. Переменные магнитные поля, воздействующие на провод в каждой соседней паре витков, будут создавать э. д. с. противоположных направлений, и полная э. д. с. во всем проводе всегда будет равна нулю.

Рассчитаем очень важный для практики случай—взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий сердечник (рис. 3.68). Катушка из w_1 витков намотана на замкнутый сердечник или на его часть. Когда по катушке



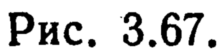


Рис. 3.67.

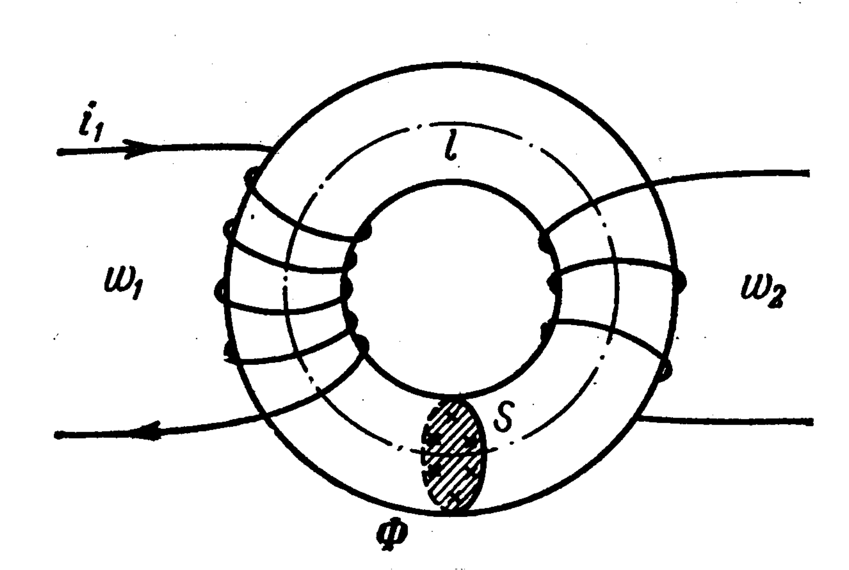


Рис. 3.68.

идет ток i_1, в сердечнике возникает магнитное поле H, магнитная индукция B и магнитный поток Ф. Поскольку сердечник не разрезан, то в соответствии с (34.14)

$$\Phi = k \cdot 4\pi\mu_0\mu \frac{i_1 w_1}{l} S, \qquad (43.9)$$

где S—площадь поперечного сечения сердечника, l—его длина по средней линии и μ—магнитная проницаемость сердечника в данном поле. Через вторичную обмотку, содержащую w_2 витков, проходит полный магнитный поток

$$\Phi_{2,1} = \Psi = w_2\Phi = k \cdot 4\pi\mu_0\mu \frac{w_1 w_2}{l} S i_1. \qquad (43.10)$$

Тогда по определению взаимная индуктивность этих двух катушек равна (см. (43.4))

$$M = \frac{\Phi_{2,1}}{k' i_1} = \frac{k}{k'} \cdot 4\pi\mu_0\mu \frac{w_1 w_2}{l} S. \qquad (43.11)$$

В системе СГС $k' = k = \frac{1}{c}$, $\mu_0 = 1$, величина μ безразмерна, числа витков w_1 и w_2 тоже безразмерны, S измеряется в *см*² и l—в *см*

и, следовательно,

$$M=\frac{4\pi\mu\, w_1 w_2 S}{l}\ см\ \text{(СГС ед. индуктивности)}. \qquad (43.12)$$

В системе СИ $k=\frac{1}{4\pi}$, $k'=1$, $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ *гн/м*, S измеряется в $м^2$, а l — в *м* и, следовательно,

$$M=\frac{\mu_0\mu\, w_1 w_2 S}{l}\ гн. \qquad (43.13)$$

Как установлено выше, 1 *гн* $=10^9$ *см* индуктивности.

Подобные две катушки, насаженные на общий стальной сердечник, образуют т р а н с ф о р м а т о р переменного тока. Трансформатор был изобретен Яблочковым в 1876 г. для «дробления» света, т. е. для раздельного питания отдельных электрических источников света. Кроме первичной обмотки, трансформатор Яблочкова содержал столько отдельных катушек, сколько было независимых источников света. Размыкание или замыкание каждой из них практически не сказывалось на остальных.

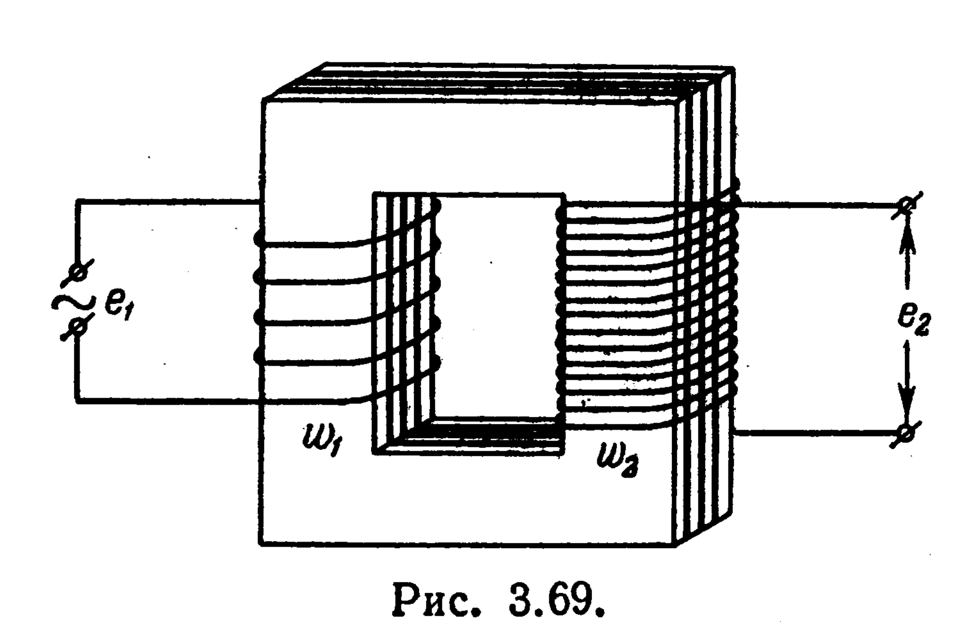


Рис. 3.69.

Обозначим мгновенное значение магнитного потока, пронизывающего любое сечение сердечника, через Ф. К первичной обмотке с числом витков w_1 (рис. 3.69) подключена переменная внешняя э. д. с. e_1. По закону Ома ток i_1 в этой цепи будет определяться алгебраической суммой внешней э. д. с. и э. д. с. индукции:

$$e_1-k'\frac{d(w_1\Phi)}{dt}=i_1r_1, \qquad (43.14)$$

где r_1 — сопротивление обмотки. Практически в трансформаторе падение напряжения на сопротивлении i_1r_1 при быстропеременных полях мало по сравнению с каждой из двух э. д. с. и

$$e_1\approx k'w_1\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (43.15)$$

Аналогично э. д. с. e_2, возникающая во вторичной обмотке,

$$e_2\approx k'w_2\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (43.16)$$

Из (43.15) и (43.16) следует важный вывод:

$$\frac{e_2}{e_1}\approx\frac{w_2}{w_1}=\text{const}. \qquad (43.17)$$

Отношение числа витков $\frac{w_2}{w_1}$, показывающее, во сколько раз э. д. с. во вторичной обмотке трансформатора больше, чем в первичной, называется коэффициентом трансформации. Применяя закон сохранения энергии и пренебрегая потерями, мы можем написать, что мощность тока во вторичной обмотке практически равна мощности в первичной:

$$e_2 i_2 \approx e_1 i_1. \qquad (43.18)$$

При $\frac{w_2}{w_1} > 1$ мы имеем *повышающий трансформатор, увеличивающий напряжение и понижающий величину тока.* Такое преобразование параметров переменного тока необходимо для снижения потерь в проводах при передаче электроэнергии на большие расстояния. Передаваемая мощность $W = \overline{I\mathscr{E}}$ (черта означает среднее за период). Потери на джоулево тепло при данном сопротивлении сети R составляют $\Delta W = \overline{RI^2}$. Поэтому уменьшение потерь связано с уменьшением тока I в сети, что при данном W возможно за счет увеличения $\mathscr{E}$.

При электросварке в электрической дуге необходимо получать большие токи при сравнительно низких напряжениях. Поэтому электросварочные агрегаты подключают к сети с помощью понижающих трансформаторов, у которых $\frac{w_2}{w_1} < 1$.

§ 44. Самоиндукция. Вихревые токи

Ток i в замкнутом контуре создает вокруг себя магнитное поле, пропорциональное току. Поэтому магнитный поток Φ, сцепленный с контуром, тоже прямо пропорционален току i. Вводя соответствующий коэффициент пропорциональности L, можно записать

$$\Phi = k'Li, \qquad (44.1)$$

где величина L носит название коэффициента самоиндукции, или просто индуктивности контура. Из этого соотношения следует, *что индуктивность контура равна магнитному потоку, сцепленному с контуром, когда ток, создающий этот поток, равен единице.*

Единицы измерения L, естественно, те же, что и для M: в системе СИ — *гн*, а в системе СГС — *см*.

Индуктивность соленоида с числом витков w может быть получена из следующих простых соображений. При изменении потока вектора индукции через соленоид в нем возникает э. д. с. совершенно независимо от того, обусловлен этот поток электрическим током в этом же соленоиде или же поток связан с другими токами.

Следовательно, действие соленоида на себя должно быть таким же, как и действие на другой, вполне ему подобный и пронизываемый тем же магнитным потоком соленоид.

Но эта задача уже была решена нами при рассмотрении взаимной индуктивности двух обмоток трансформатора. Теперь нужно лишь приравнять числа витков в обоих катушках. Полагая поэтому в (43.11) $w_1 = w_2 = w$, находим

$$L_{\text{сол}} = \frac{k}{k'} \cdot 4\pi\mu\mu_0 \frac{w^2 S}{l}. \tag{44.2}$$

При изменении тока i в контуре будет меняться связанный с контуром магнитный поток и возникнет э. д. с. самоиндукции, равная

$$\mathscr{E}_{\text{самоинд}} = -k' \frac{d\Phi}{dt} = -k'^2 L \frac{di}{dt}. \tag{44.3}$$

Знак минус в этом выражении показывает, что наличие индуктивности ($L \neq 0$) приводит к замедлению изменения тока в нем.

Действительно, если ток возрастает со временем, то

$$\frac{di}{dt} > 0,$$

а значит,

$$\mathscr{E}_{\text{самоинд}} < 0,$$

т. е. $\mathscr{E}_{\text{самоинд}}$ направлено против тока и тормозит его возрастание, обусловленное внешним источником.

При уменьшении тока i со временем

$$\frac{di}{dt} < 0,$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_{\text{самоинд}} > 0.$$

В этом случае $\mathscr{E}_{\text{самоинд}}$ тормозит уменьшение тока, вызванное сторонними причинами (в том числе и сопротивлением контура).

Таким образом, наличие индуктивности в электрическом контуре приводит к тому, что контур приобретает своеобразную электрическую инертность, которая выражается в том, что любое изменение тока тормозится, притом тем сильнее, чем больше индуктивность контура L.

Как следует из формулы (44.3), если в контуре течет постоянный по величине ток, то индуктивность контура никак не проявляется ($di/dt = 0$, следовательно, $\mathscr{E}_{\text{самоинд}} = 0$).

Остановимся на нескольких важных для дальнейшего примерах, в которых мы будем пользоваться записью в системе единиц СИ.

Рассмотрим контур, состоящий из индуктивности L, источника э. д. с. $\mathscr{E}_0$ и ключа K, с помощью которого можно выключать э. д. с., не разрывая цепи (рис. 3.70), с общим сопротивлением (включая внутреннее сопротивление источника) R. Пусть э. д. с. включается в цепь в момент $t=t_0$. Из-за наличия индуктивности ток в контуре установится не сразу. При возрастании тока возникнет э. д. с. индукции, которая, согласно правилу Ленца, будет направлена против тока, т. е. против включенной э. д. с. $\mathscr{E}_0$. Следовательно, по закону Ома

$$iR=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}_{\text{самоинд}}=\mathscr{E}_0-L\frac{di}{dt}. \qquad (44.4)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{\mathscr{E}_0}{L}. \qquad (44.5)$$

Представим теперь i в виде суммы

$$i=\frac{\mathscr{E}_0}{R}+i^*, \qquad (44.6)$$

так что

$$\frac{di}{dt}=\frac{di^*}{dt}. \qquad (44.7)$$

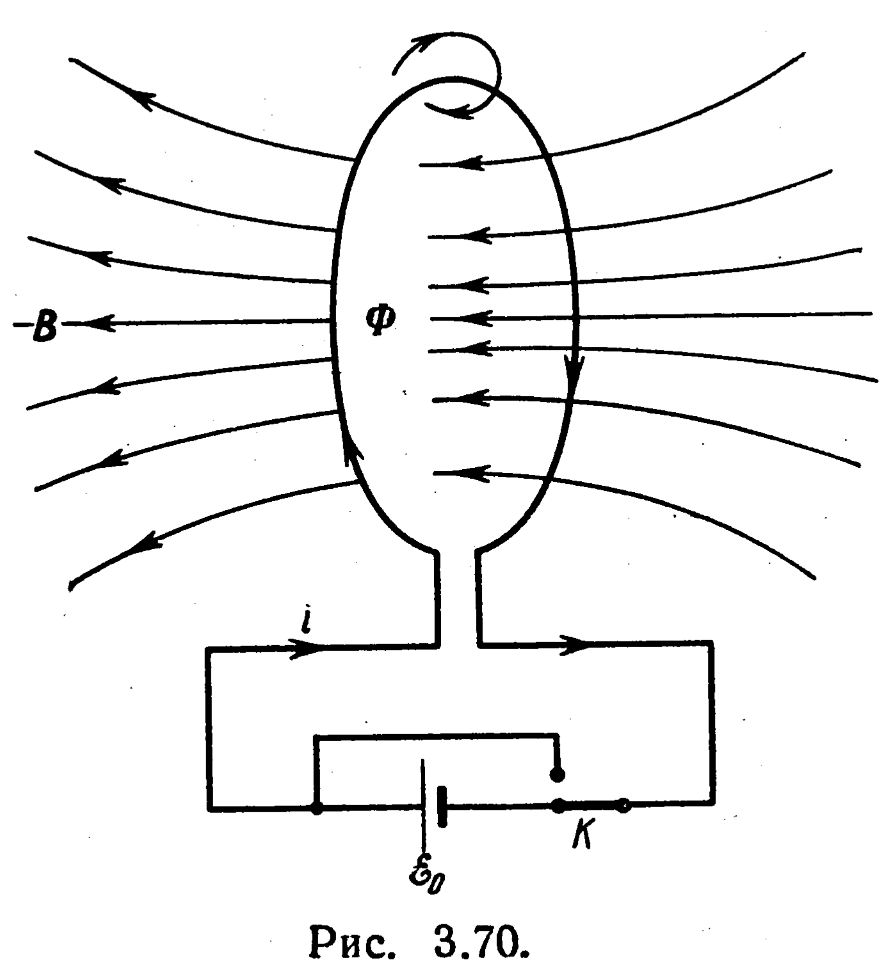


Рис. 3.70.

Подставляя эти значения i и di/dt (44.5), находим, что i^* удовлетворяет уравнению

$$\frac{di^*}{dt}+\frac{R}{L}i^*=0. \qquad (44.8)$$

Разделяя переменные и интегрируя с учетом начальных условий ($i=0$, т. е. $i^*=-\mathscr{E}_0/R$ при $t=t_0$), находим

$$\int\limits_{-\mathscr{E}_0/R}^{i^*}\frac{di^*}{i^*}=-\frac{R}{L}\int\limits_{t_0}^{t}dt,$$

откуда

$$\ln\frac{i^*}{-\mathscr{E}_0/R}=-\frac{R}{L}(t-t_0),$$

или окончательно

$$i^*=-\frac{\mathscr{E}_0}{R}e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}. \qquad (44.9)$$

Подставляя это значение i^* в (44.6), находим i:

$$i=\frac{\mathscr{E}_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right). \qquad (44.10)$$

При t, близком к t_0, функция $e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$ близка к единице и убывает с ростом t. Следовательно, функция $\left(1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\right)$, равная при $t=t_0$ нулю, с ростом t увеличивается, а значит, и ток i растет с t. При $t\to\infty$ функция $e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}\to e^{-\infty}=0$ и ток стремится к значению $\mathscr{E}_0/R$, отвечающему закону Ома. График зависимости i от времени приведен на рис. 3.71.

Рис. 3.71.

Наличие индуктивности в контуре, как уже отмечалось, приводит к возникновению электрической инерции: установившийся ток отвечает закону Ома, но ток устанавливается не сразу, а постепенно. На установившийся, постоянный по величине ток $I=\mathscr{E}_0/R$ индуктивность не действует: $dI/dt=0$, и э. д. с. индукции не возникает.

Закоротим теперь в момент $t=t_1$ контур, выключив из него э. д. с. $\mathscr{E}_0$. Обозначим сопротивление контура без источника э. д. с. через r. Ток начнет убывать, а возникающая при этом э. д. с. индукции, согласно правилу Ленца, будет направлена по току. Следовательно, по закону Ома

$$ri=-L\frac{di}{dt}. \qquad (44.11)$$

Разделяя переменные и интегрируя с учетом начальных условий ($i=\frac{\mathscr{E}_0}{R}=I=\text{const}$ при $t\leqslant t_1$), имеем

$$\int_I^i\frac{di}{i}=-\frac{r}{L}\int_{t_1}^t dt, \qquad (44.12)$$

откуда

$$\ln\frac{i}{I}=-\frac{r}{L}(t-t_1),$$

или окончательно

$$i=Ie^{-\frac{r}{L}(t-t_1)}. \qquad (44.13)$$

Таким образом, в момент выключения $\mathcal{E}_0$, при $t=t_1$, $i=I$, а затем постепенно, с ростом t, убывает, стремясь к нулю. И в этом случае наличие L обусловливает инертность контура. График $i(t)$ приведен на рис. 3.72.

Оценим скорость установления тока (после включения или выключения). Через время после включения в контур э. д. с. $\tau=t-t_1$, равное

$$\tau=\frac{L}{R},$$

ток отличается от своего установившегося значения в $e^{-1}=\frac{1}{2{,}72}$ раза, а через 2τ — в $e^{-2}=\frac{1}{(2{,}72)^2}$ раза. Таким образом, грубо говоря, время установления тока можно принять равным по порядку величины $\tau=L/R$.

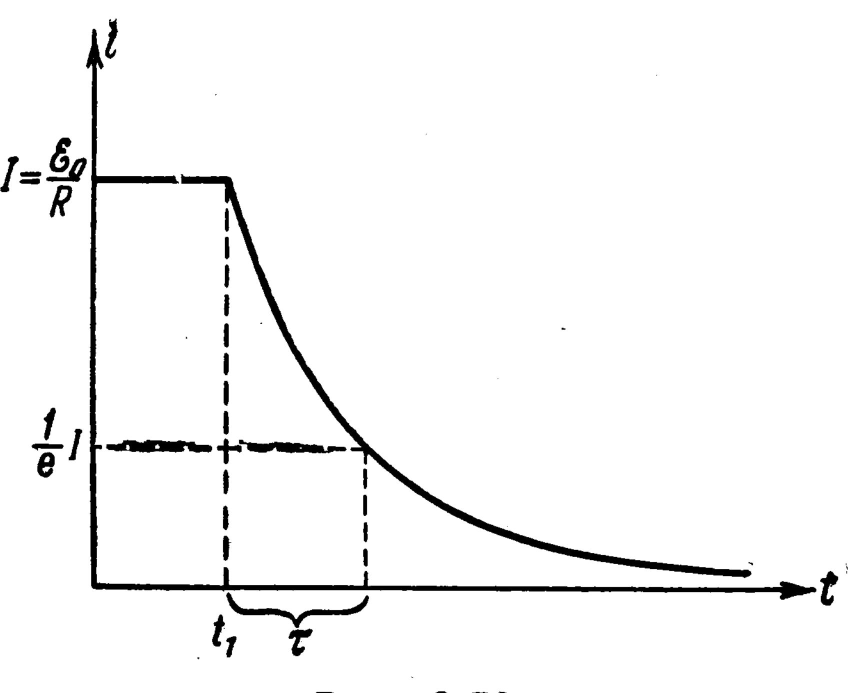


Рис. 3.72.

Представим себе теперь, что мы не закорачиваем, а размыкаем контур, содержащий индуктивность, в котором в момент размыкания течет ток $I=\mathcal{E}_0/R$. Для простоты положим, что сопротивление контура r стремится к бесконечности ($r=\infty$ означает, что контур разомкнут). Тогда (44.11) дает

$$-L\frac{di}{dt}=ri\to+\infty.$$

Так как $r\to\infty$, то $\frac{di}{dt}\to-\infty$, т. е. ток будет убывать весьма быстро. Но при этом возникающая в контуре э. д. с. индукции $-L\frac{di}{dt}$ будет достигать по абсолютной величине громадных значений, много больших, чем напряжение выключенной э. д. с. $\mathcal{E}_0$. Подставляя значение i из (44.13) в (44.11), найдем, что $\mathcal{E}_{\text{самоинд}}$ в контуре (при $t>t_1$) равна

$$\mathcal{E}_{\text{самоинд}}=-L\frac{di}{dt}=r\frac{\mathcal{E}_0}{R}e^{-\frac{r}{L}(t-t_1)}. \qquad (44.14)$$

Таким образом, до выключения $\mathcal{E}_0$ э. д. с., действующая в контуре, равна $\mathcal{E}_0$. В момент выключения при $t=t_1$ появляется на короткое время $\Delta t\approx L/r$ э. д. с. самоиндукции:

$$\mathcal{E}_{t=t_1}=\mathcal{E}_0\frac{r}{R}\gg\mathcal{E}_0. \qquad (44.15)$$

График э. д. с. в контуре до и после момента выключения $\mathscr{E}_0$ показан на рис. 3.73.

Из сказанного следует важный практический вывод: контур, содержащий индуктивность, нельзя резко размыкать. Если он рассчитан на рабочее напряжение $\mathscr{E}_0$, то при резком размыкании возникающие в нем большие $\mathscr{E}_{самоинд}$ могут привести к пробою изоляции и порче электроприборов. Сопротивление в такой контур надо вводить постепенно, с тем чтобы $\mathscr{E}_{самоинд}$ не превысила дозволенных значений. Опасным может быть и резкое включение $\mathscr{E}_0$, что может вызвать на отдельных участках контура недопустимо большие $\mathscr{E}_{самоинд}$.

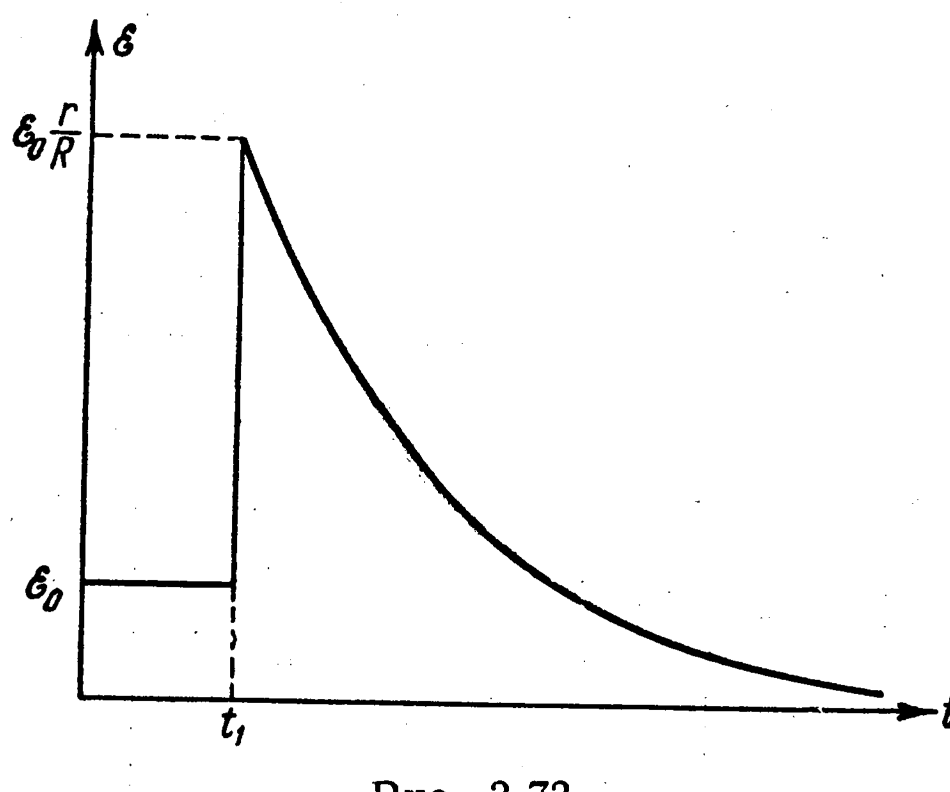


Рис. 3.73.

Ток в контуре после выключения внешней э. д. с. $\mathscr{E}_0$, обусловленный самоиндукцией контура, называется экстратоком размыкания. Его легко наблюдать в простой схеме с лампочкой (рис. 3.74). Большая индуктивность с малым омическим сопротивлением включена параллельно с электрической лампочкой большого сопротивления и низковольтной батареей. При замыкании ключа K лампочка не загорается, так как э. д. с. $\mathscr{E}_0$ мала. Но в индуктивности L устанавливается сильный ток. При размыкании ключа индуктивность окажется замкнутой на большое сопротивление, э. д. с. индукции резко возрастет, и лампочка вспыхнет.

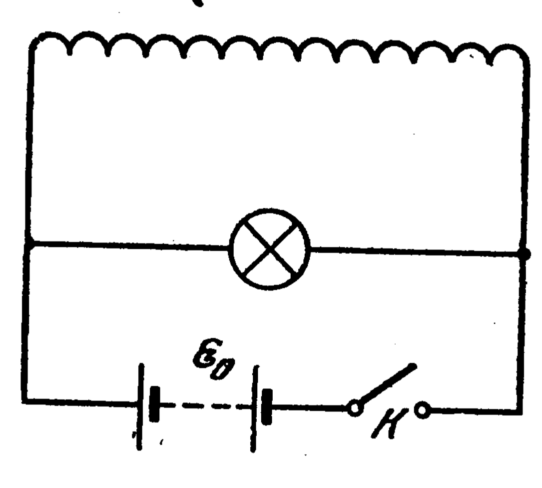


Рис. 3.74.

До сих пор мы рассматривали индукционные токи в линейных проводниках. Но эти токи будут возникать и в толще сплошных проводников при изменении в них потока вектора индукции **B**. Они будут циркулировать в веществе проводника (напомним, что линии напряженности $\mathbf{E}_{инд}$ замкнуты, так как поле $\mathbf{E}_{инд}$ вихревое). Токи, вызванные полями индукции, носят название вихревых токов или токов Фуко. Если в трансформаторе (рис. 3.69) сделать сердечник сплошным, то часть мощности, подаваемой на первичную обмотку, будет расходоваться на вихревые токи, а в конечном счете — на нагревание сердечника. Мощность, снимаемая со вторичной обмотки трансформатора, ока-

жется меньшей, а нагревание трансформатора может привести к аварии.

Для борьбы с вредным влиянием вихревых токов сердечники трансформаторов, электромагнитов, генераторов и электродвигателей делают не сплошными, а набирают из отдельных листов (рис. 3.69) или прутьев, изолированных друг от друга так, чтобы сопротивление сердечника в направлении движения вихревых токов было максимальным. В последнее время для изготовления сердечников начинают широко применять новые материалы — ферромагнитные полупроводники, называемые **ферритами**, с удельным сопротивлением $\varrho \approx 10^{-4} \div 10^{5}$ *ом·м* и достаточно большими значениями μ.

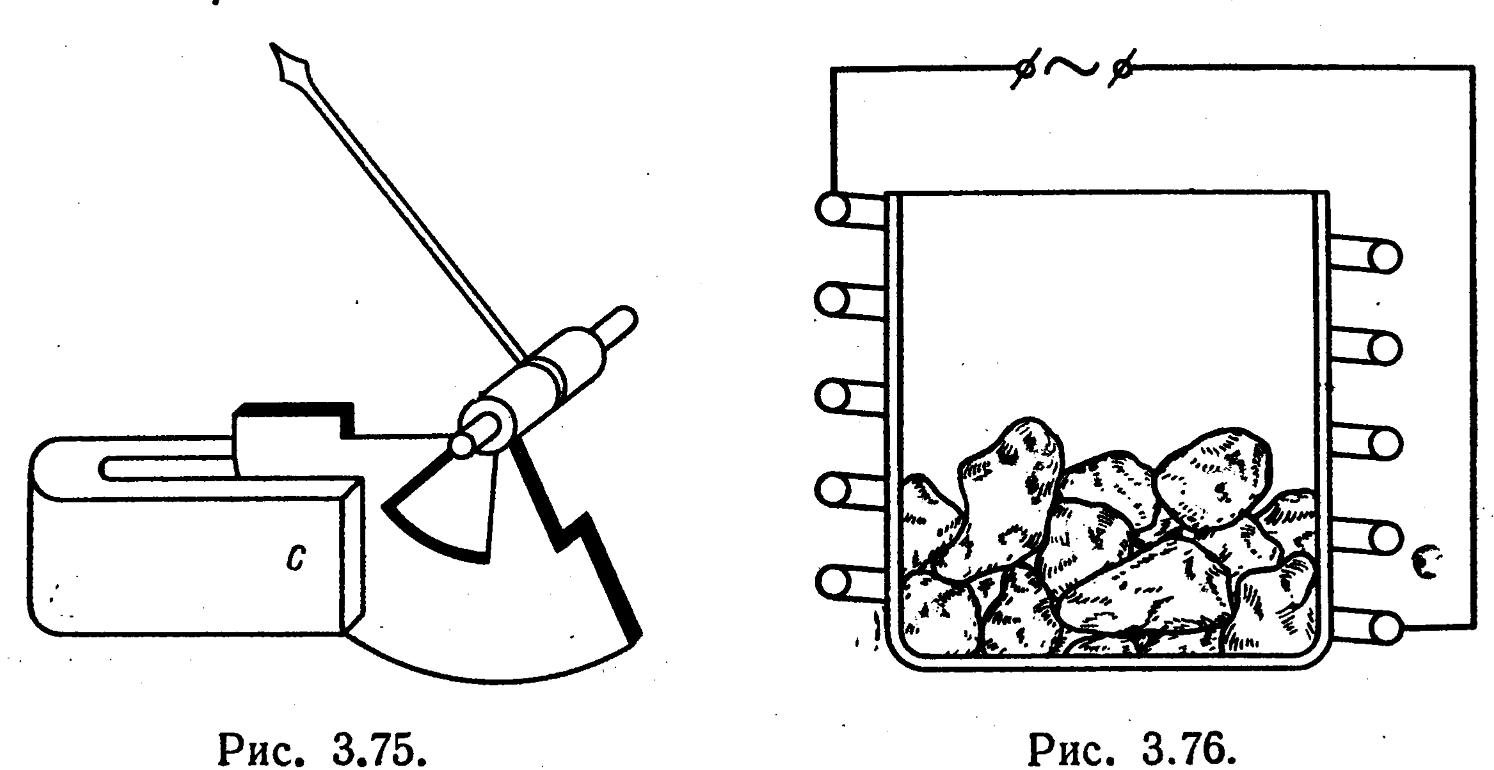


Рис. 3.75. Рис. 3.76.

Вихревые токи имеют также и полезные применения. Приведем два примера: на рис. 3.75 изображен медный маятник, прикрепленный к стрелке какого-либо прибора. При колебаниях стрелки маятник перерезает линии индукции между полюсами магнита, и в маятнике возникают вихревые токи. Энергия этих токов берется за счет уменьшения энергии механического движения маятника и быстро переходит в тепло. Такая система часто применяется для быстрого электромагнитного гашения (**демпфирования**) механических колебаний различных приборов.

Индукционные вихревые токи используются в специальных электропечах, позволяющих вести плавку не только в отсутствие посторонних веществ, способных загрязнить металл, но даже в вакууме. Этот способ плавки позволяет получать исключительно чистые металлы и сплавы. Индукционная печь (рис. 3.76) представляет собой тигель, помещенный внутрь катушки, в которой пропускается ток высокой частоты. Вихревые токи возникают в самом веществе, предназначенном для плавки, и разогревают его.

В проводах, по которым идут токи высокой частоты, также возникают вихревые токи, существенно меняющие картину распределения плотности тока на различных расстояниях от оси проводника. При этом вихревые токи текут по оси проводника против направления основного тока, на поверхности его — в том же направлении. Таким образом, результирующий ток по оси проводника ослабляется, а на поверхности — усиливается. Чем больше частота тока, тем меньше толщина поверхностного слоя, в котором текут заметные токи. Это явление получило название скин-эффекта (от английского слова skin — кожа, кожура). В силу скин-эффекта проводники в высокочастотных схемах не имеет смысла делать сплошными. Для уменьшения сопротивления нужно увеличивать их поверхность, а не сечение, т. е. изготовлять проводники в виде трубок. В электропечах этим обстоятельством пользуются, охлаждая трубки катушки, по которым идет ток высокой частоты, с помощью воды, циркулирующей внутри трубок.

В. П. Вологдин использовал токи высокой частоты для поверхностной закалки деталей машин. В мощном переменном поле поверхностные слои металла разогреваются очень быстро, но основная масса металла остается холодной. Затем производится быстрое охлаждение разогретой поверхности металла (погружением в воду или в масло). Закаленная таким способом деталь имеет твердую поверхность, но не становится хрупкой, так как металл под тонким поверхностным слоем сохраняет свою вязкость. Достигнуть таких результатов с помощью обычной закалки трудно. Меняя частоту поля, можно производить закалку на любую необходимую глубину. Этот метод закалки деталей ныне широко применяется в промышленности.

§ 45. Энергия магнитного поля

Рассмотрим произвольный контур с индуктивностью L. В отсутствие тока в окружающем пространстве нет магнитного поля, и магнитный поток, сцепленный с контуром, равен нулю. Когда через контур течет ток i, то с контуром сцеплен магнитный поток

$$\Phi = k'Li. \tag{45.1}$$

При изменении тока на di магнитный поток меняется на величину

$$d\Phi = k'L\,di. \tag{45.2}$$

Как было показано в § 35, для изменения магнитного потока на $d\Phi$ необходимо совершить работу

$$dA = k'i\,d\Phi. \tag{45.3}$$

Эта работа идет на увеличение запаса энергии W контура с током

и при уменьшении тока может быть получена обратно и преобразована в другие формы энергии, например в механическую. Таким образом, при возрастании тока в контуре на di энергия контура увеличивается на

$$dW = k'i\,d\Phi = k'^2 Li\,di. \tag{45.4}$$

В отсутствие тока ($i=0$) его энергия равна нулю. При увеличении тока до некоторого окончательного значения I энергия контура с током становится равной

$$W = \int_0^W dW = k'^2 \int_0^I Li\,di = k'^2 \frac{LI^2}{2}.$$

Таким образом, контур с током I обладает запасом энергии

$$W = k'^2 \frac{LI^2}{2}. \tag{45.5}$$

Следовательно, в СИ $W = {}^1/_2\, LI^2$, где W выражено в *дж*, L — в *гн*, I — в *а*; в гауссовой системе $W = \frac{LI^2}{2c^2}$, где W выражено в *эрг*, L — в *см*, а I — в СГС ед. тока $= \frac{10}{c}\,a$.

Выражение (45.5) очень напоминает выражение для кинетической энергии движущегося тела $\frac{mv^2}{2}$. Роль скорости v в (45.5) играет ток I, характеризующий интенсивность движения электрических зарядов, а роль массы играет индуктивность контура L. Как уже указывалось выше, L характеризует электромагнитную инерцию контура, так же как масса m характеризует механическую инерцию тела.

Возникает вопрос о том, где локализована энергия W. Эта энергия остается постоянной, если не меняется ток в контуре, однако ее нельзя непосредственно сопоставить с кинетической энергией движения электронов в контуре: контур с другой индуктивностью при том же токе будет обладать другой энергией. Единственная возможность — это приписать энергию W магнитному полю, связанному с током.

Энергия dW элемента объема поля dV равна

$$dW = W_0(B)\,dV,$$

где $W_0(B)$ — плотность энергии магнитного поля, т. е. энергия единицы объема магнитного поля B. Для вычисления последней рассмотрим простейший случай, когда поле контура однородно.

Таким будет поле замкнутого соленоида, показанного на рис. 3.77. (При большой длине и малом сечении тора его поле почти не отличается от поля внутри длинной прямой катушки.) Согласно (44.2) индуктивность этого соленоида равна

$$L = 4\pi\mu_0\mu \frac{k}{k'} \frac{w^2 S}{l}, \tag{45.6}$$

где w — число витков соленоида, l — его длина (в данном случае — длина центральной окружности тора).

Напряженность H магнитного поля соленоида, согласно (33.15), равна

$$H = k 4\pi \frac{wI}{l}. \tag{45.7}$$

Отсюда

$$I = \frac{Hl}{k \cdot 4\pi w}. \tag{45.8}$$

Подставляя эти значения L и I в выражение для W (45.5), находим

$$W = k'^2 \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} kk'^2 4\pi\mu_0\mu \frac{w^2 S}{l} \frac{H^2 l^2}{(k 4\pi w)^2} = \frac{1}{2} \mu_0\mu \frac{k'}{k} SlH^2. \tag{45.9}$$

Но $Sl = V$ есть объем соленоида. Так как поле в нем однородно, то из (45.9) следует, что плотность энергии $W_0 = W/Sl$, т. е.

$$W_0 = \frac{\mu_0\mu k'}{8\pi k} H^2. \tag{45.10}$$

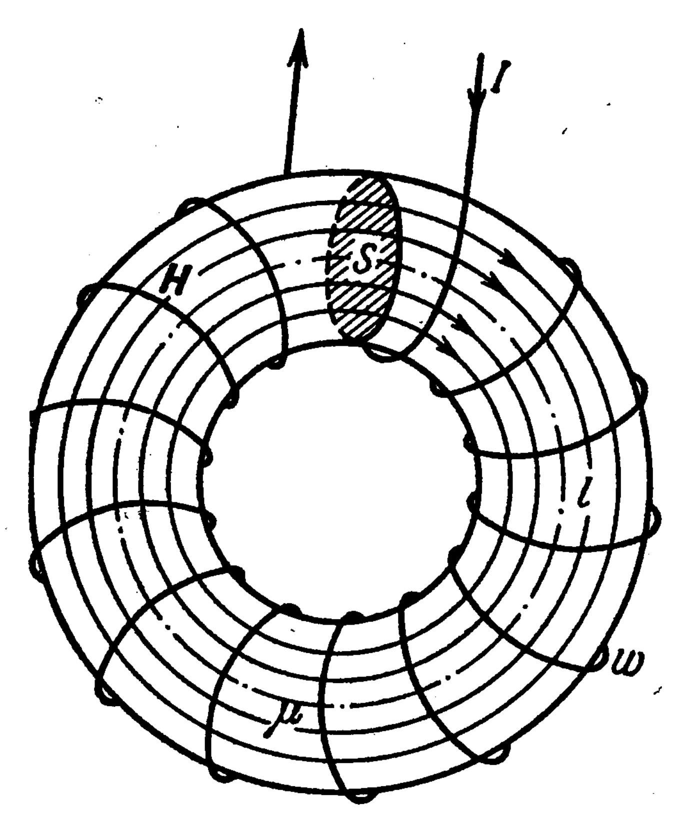


Рис. 3.77.

В системе СГС H измеряется в эрстедах, $k = k'$ и $\mu_0 = 1$,

$$W_0 = \frac{\mu H^2}{8\pi} \frac{эрг}{см^3}. \tag{45.11}$$

В системе СИ H измеряется в $а/м$, $k = \frac{1}{4\pi}$, $k' = 1$,

$$W_{0,\,магн} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} \frac{дж}{м^3}. \tag{45.12}$$

Формула (45.10) выведена нами для однородного поля, но остается справедливой и для неоднородных полей. *Объемная плотность энергии магнитного поля прямо пропорциональна квадрату напряженности магнитного поля в данном месте пространства.*

В электростатике нами была выведена аналогичная формула (13.2) для объемной плотности энергии электрического поля

$$W_{0,\ \text{эл}} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}, \qquad (45.13)$$

где E измерялась в СГС-ед. напряженности поля. В тех же единицах при наличии в пространстве и электрического и магнитного полей объемная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$W_{0,\ \text{эл.-магн}} = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}, \qquad (45.14)$$

или, учитывая, что $\varepsilon E = D$ и $\mu H = B$:

$$W_{0,\ \text{эл.-магн}} = \frac{ED + BH}{8\pi}. \qquad (45.15)$$

ГЛАВА X

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 46. Природа магнитных свойств тел. Диамагнетизм и парамагнетизм

В предыдущих главах мы чисто формально описывали магнитные свойства различных тел введением магнитной проницаемости μ, поскольку до рассмотрения законов электромагнитной индукции нельзя было детальнее разобраться в механизме этих явлений.

Магнитные свойства тел обусловлены магнитными свойствами составляющих их частиц и в конечном счете движением электрических зарядов в атомах и молекулах. Разберем простейший случай одного электрона с массой m и зарядом e, движущегося с постоянной скоростью v по круговой орбите радиуса r вокруг неподвижного положительного ядра (рис. 3.78).

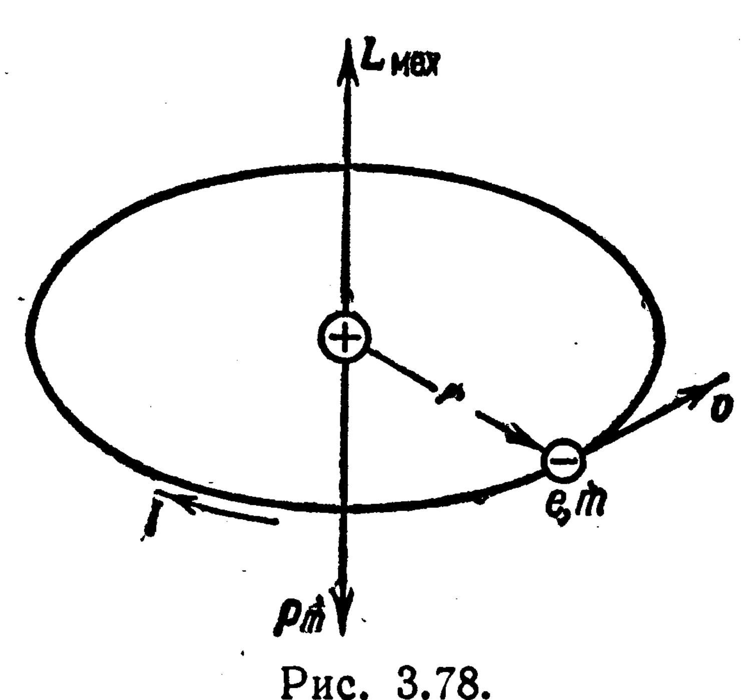


Рис. 3.78.

Вследствие огромной скорости вращения электрона по орбите, $\sim 10^{15}$ *об/сек* *), можно считать, что весь его заряд и масса равномерно распределены по орбите, т. е. можно заменить электрон «кольцом» радиуса r с моментом инерции $J = mr^2$, равномерно вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью $\omega = v/r$. Такое вращающееся «кольцо» обладает механическим моментом количества движения (см. т. I, гл. III)

$$L_{мех} = J\omega = mr^2 \frac{v}{r} = mvr. \qquad (46.1)$$

*) Эта, допустимая в нашем случае классическая картина не точна. В действительности движение электрона в атоме отнюдь не похоже на вращение твердого шарика (см. т. III, ч. II). Рассматриваемая далее картина — заряд и масса электрона «размазанные» по орбите — по существу ближе к истинной картине движения электрона.

Вектор $\mathbf{L}_{\text{мех}}$ направлен по оси вращения по правилу правого винта (рис. 3.78).

Поскольку вращающееся «кольцо» заряжено, оно представляет собой замкнутый круговой ток. Один оборот «кольцо» совершает за время

$$\tau=\frac{2\pi r}{v}. \tag{46.2}$$

За это время через любое сечение «кольца» проходит весь заряд e. Следовательно, ток

$$I_{\text{СГС}}=\frac{e}{\tau}=\frac{ev}{2\pi r}. \tag{46.3}$$

Так как электрон обладает отрицательным зарядом ($e<0$), этот ток направлен против вращения электрона. Магнитный момент контура с током, выраженный в гауссовых единицах ($\textit{гс}\cdot\textit{см}^3$), равен

$$p_m=\frac{1}{c}IS=\frac{e}{c}\frac{v}{2\pi r}\pi r^2=\frac{evr}{2c}=\frac{er^2}{2c}\omega \tag{46.4}$$

и перпендикулярен к плоскости орбиты. Из рис. 3.78 видно, что $\mathbf{p}_m$ для электрона ($e<0$) направлен противоположно вектору $\mathbf{L}_{\text{мех}}$.

Для разных орбит в атоме v и r различны; различны, следовательно, p_m и $L_{\text{мех}}$. Однако отношение магнитного и механического орбитальных моментов электрона оказывается строго постоянным и равным

$$\frac{p_m}{L_{\text{мех}}}=\frac{evr}{2cmvr}=\frac{e}{2mc}. \tag{46.5}$$

Отношение (46.5) является отрицательным ($e<0$). Это связано с противоположным направлением $\mathbf{L}_{\text{мех}}$ и $\mathbf{p}_m$ для электрона.

Как мы увидим далее, в томе III, электроны в атомах могут двигаться лишь по определенным стационарным орбитам, на которых момент их количества движения равен

$$L_{\text{мех},\,n}=n\frac{h}{2\pi}, \tag{46.6}$$

где n — целое число, а $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·сек* (постоянная Планка). Следовательно, магнитный момент электрона в атоме может быть лишь целым кратным элементарного магнитного момента, равного

$$p_m=\frac{e}{2mc}\frac{h}{2\pi}=\frac{4{,}82\cdot10^{-10}\cdot6{,}62\cdot10^{-27}}{2\cdot9{,}10\cdot10^{-28}\cdot3\cdot10^{10}\cdot2\pi}=0{,}927\cdot10^{-20}\ \textit{гс}\cdot\textit{см}^3. \tag{46.7}$$

В соответствии с (30.18) напряженность магнитного поля на оси орбиты равна

$$H_{\text{осн}}=\frac{2p_m}{r^3} \tag{46.8}$$

и при радиусе орбиты порядка $0{,}5\cdot 10^{-8}$ *см* (атом водорода) в центре орбиты достигает примерно 160 000 *гс*, но очень быстро убывает с расстоянием.

Чтобы выяснить, как изменяется вращение электрона по орбите и его магнитный момент во внешнем магнитном поле, произведем следующий элементарный расчет. Представим себе, что заряженное вращающееся «кольцо» помещено в однородное магнитное поле, перпендикулярное к его плоскости, и будем постепенно увеличивать напряженность этого поля с некоторой скоростью dH/dt от $H=0$ до окончательного значения H. Первоначальное направление вращения и знак заряда для дальнейшего вывода несущественны.

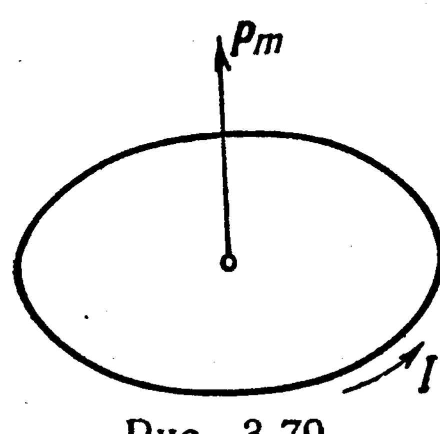


Рис. 3.79.

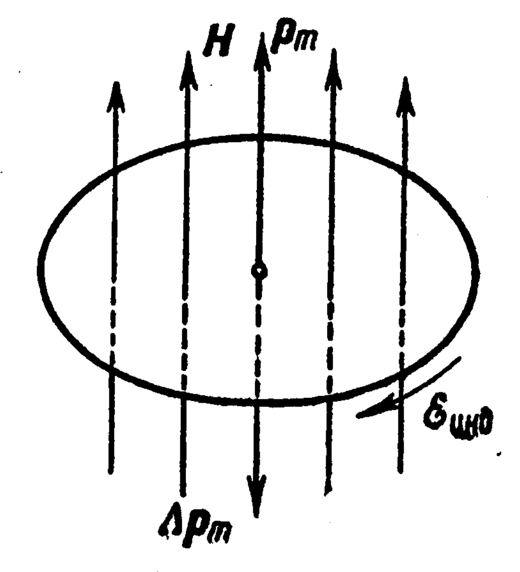


Рис. 3.80.

При изменении магнитного поля, пронизывающего «кольцо», как показано на рис. 3.79 и 3.80, в контуре возникает э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{инд}$, которая будет ускорять положительные заряды в направлении, показанном стрелкой, и, по правилу Ленца, будет создавать дополнительный магнитный момент Δp_m, направленный против внешнего магнитного поля H независимо от величины и направления собственного магнитного момента электрона на орбите.

Если обозначить напряженность индуцированного электрического поля через E и выразить ее в единицах СГС, то

$$\mathscr{E}_{инд}=E\cdot 2\pi r=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\pi r^2}{c}\frac{dH}{dt}. \qquad (46.9)$$

Разобьем мысленно «кольцо» на элементы de. На каждый из этих элементов будет действовать сила $E\,de$ и вращающий момент $Er\,de$, а на весь заряд e — суммарный вращающий момент

$$M_{вр}=eEr=-\frac{e}{c}\frac{r^2}{2}\frac{dH}{dt}. \qquad (46.10)$$

По второму закону Ньютона для вращательного движения этот момент внешних сил равен произведению момента инерции обруча

$J=mr^2$ на угловое ускорение $d\omega/dt$, т. е.

$$-\frac{e}{c}\frac{r^2}{2}\frac{dH}{dt}=mr^2\frac{d\omega}{dt}. \tag{46.11}$$

Отсюда

$$d\omega=-\frac{e}{2mc}dH, \tag{46.12}$$

и после интегрирования мы найдем изменение частоты вращения заряда на орбите при внесении его во внешнее магнитное поле H:

$$\Delta\omega=-\frac{e}{2mc}H. \tag{46.13}$$

Знак минус показывает, что дополнительный магнитный момент $\Delta\mathbf{p}_m$ во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$ направлен против этого поля. Его величина Δp_m определяется из (46.4):

$$\Delta p_m=\frac{er^2}{2c}\Delta\omega=-\frac{e^2r^2}{4mc^2}H \tag{46.14}$$

и в векторной форме

$$\Delta\mathbf{p}_m=-\frac{e^2r^2}{4mc^2}\mathbf{H}. \tag{46.15}$$

В соотношение (46.15) входит величина e^2, которая всегда положительна. Поэтому антипараллельность $\Delta\mathbf{p}_m$ и $\mathbf{H}$ не зависит от знака e вращающегося заряда. Это свойство атомных электронов при внесении во внешнее магнитное поле создавать дополнительный магнитный момент, направленный против поля, носит название диамагнетизма.

В атоме обычно имеется несколько электронов, движущихся по разным орбитам с различными магнитными моментами $p_{m,i}$. Как уже упоминалось, электрон обладает, кроме орбитального, механического и магнитного моментов, еще собственными (спиновыми) магнитным и механическим моментами, словно электрон представляет собой шарик с распределенным по объему зарядом и массой, вращающийся вокруг собственной оси («spin» по-английски значит «веретено»). Теоретический анализ и экспериментальные измерения показали, что спиновый механический момент электрона вдвое меньше его минимального ($n=1$) орбитального момента и равен $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, а спиновый магнитный момент равен минимальному орбитальному $\frac{eh}{4\pi mc}$. Поэтому их отношение

$$\frac{p_{m,\,\text{спин}}}{L_{\text{мех, спин}}}=\frac{e}{mc} \tag{46.16}$$

вдвое больше, чем отношение (46.5) для орбитальных моментов.

Полный магнитный момент атома или молекулы равен геометрической сумме орбитальных и спиновых моментов всех электронов:

$$\mathbf{p}_{m,\,\text{ат}} = \sum_i \mathbf{p}_{m,\,i}, \tag{46.17}$$

и также может быть в отсутствие поля H лишь кратным элементарного магнитного момента $eh/4\pi mc$ или нулем.

Если полный магнитный момент каждого атома в отсутствие поля равен нулю:

$$\mathbf{p}_{m,\,\text{ат}} = 0, \tag{46.18}$$

то вещество, состоящее из таких атомов, называется диамагнитным.

При внесении диамагнитного атома в магнитное поле H произойдет следующее. Орбитальный магнитный момент каждого электрона, как бы этот электрон ни двигался, приобретет согласно (46.15) отрицательную по величине добавку. Следовательно, суммарный магнитный момент атома станет отрицательным. Все вещество в целом приобретает в поле магнитный момент, всегда направленный против поля. Диамагнитными веществами являются, например, висмут, ртуть, фосфор, сера, золото, серебро, медь, гелий, вода и подавляющее большинство органических соединений.

Согласно (46.15) и (46.17) дополнительный магнитный момент атома диамагнетика в магнитном поле H равен

$$\Delta\mathbf{p}_{m,\,\text{ат}} = -\sum_i \frac{e^2 r_i^2}{4mc^2}\mathbf{H}. \tag{46.19}$$

Обозначая через N число атомов (или молекул) в единице объема вещества, мы находим, что суммарный магнитный момент единицы объема вещества

$$\mathbf{P}_m = N\Delta\mathbf{p}_{m,\,\text{ат}} = -\frac{Ne^2}{4mc^2}\sum_i r_i^2\mathbf{H} = \chi\mathbf{H} \tag{46.20}$$

прямо пропорционален напряженности магнитного поля. Коэффициент пропорциональности χ, который в данном случае отрицателен, равен

$$\chi_{\text{диамагн}} = -\frac{Ne^2}{4mc^2}\sum_i r_i^2 \tag{46.21}$$

и носит название магнитной восприимчивости. Если известно строение атома и радиусы r_i всех его электронных орбит, то величина χ для данного вещества может быть рассчитана теоретически. В случае газов концентрация частиц N, а следовательно,

и магнитная восприимчивость χ прямо пропорциональны давлению газа. В вакууме $N=0$ и

$$\chi_{\text{вак}}=0. \tag{46.22}$$

У парамагнитных тел (щелочные, щелочноземельные металлы, кислород и другие) магнитный момент каждого отдельного атома отличен от нуля:

$$\mathbf{p}_{m,\,\text{ат}}\neq 0. \tag{46.23}$$

В отсутствие внешнего поля магнитные моменты отдельных атомов расположены хаотически, так что магнитный момент единицы объема в среднем равен нулю и тело в целом не намагничено. При включении внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ на магнитные моменты отдельных атомов $\mathbf{p}_m$ будет действовать крутящий момент (29.6), стремящийся повернуть их и установить по направлению магнитного поля. В противоположность этому хаотическое тепловое движение будет стремиться дезориентировать моменты $\mathbf{p}_m$. В результате установится динамическое равновесие, при котором в теле окажется в среднем больше атомарных магнитиков, направленных по полю, чем против поля.

Проекция магнитного момента атома на направление поля

$$p_{mH}=p_m\cos\theta \tag{46.24}$$

у разных атомов в данный момент будет различной, а у каждого отдельного атома непрерывно меняться. При наличии магнитного поля среднее значение $\overline{\cos\theta}$ вследствие частичной ориентации уже не будет равно нулю. Как показал П. Ланжевен, величина $\overline{\cos\theta}$ зависит от отношения потенциальной энергии атомарных магнитиков p_mH в поле к кинетической энергии хаотического теплового движения kT и в не слишком сильных полях равна

$$\overline{\cos\theta}=\frac{1}{3}\frac{p_mH}{kT}. \tag{46.25}$$

Таким образом, магнитный момент единицы объема парамагнитного тела

$$P_m=Np_m\overline{\cos\theta}=\frac{Np_m^2}{3kT}H \tag{46.26}$$

оказывается прямо пропорциональным напряженности поля H и обратно пропорциональным абсолютной температуре T. Этот момент направлен по полю; в векторной форме

$$\mathbf{P}_m=\chi\mathbf{H}. \tag{46.27}$$

Магнитная восприимчивость χ в данном случае положительна:

$$\chi_{\text{парамагн}} = \frac{Np_m^2}{3kT}. \tag{46.28}$$

Конечно, и в парамагнитных телах тоже происходит деформация электронных орбит и появляется диамагнетизм. Однако он перекрывается эффектом ориентации магнитных моментов атомов по полю, и суммарная магнитная восприимчивость оказывается положительной.

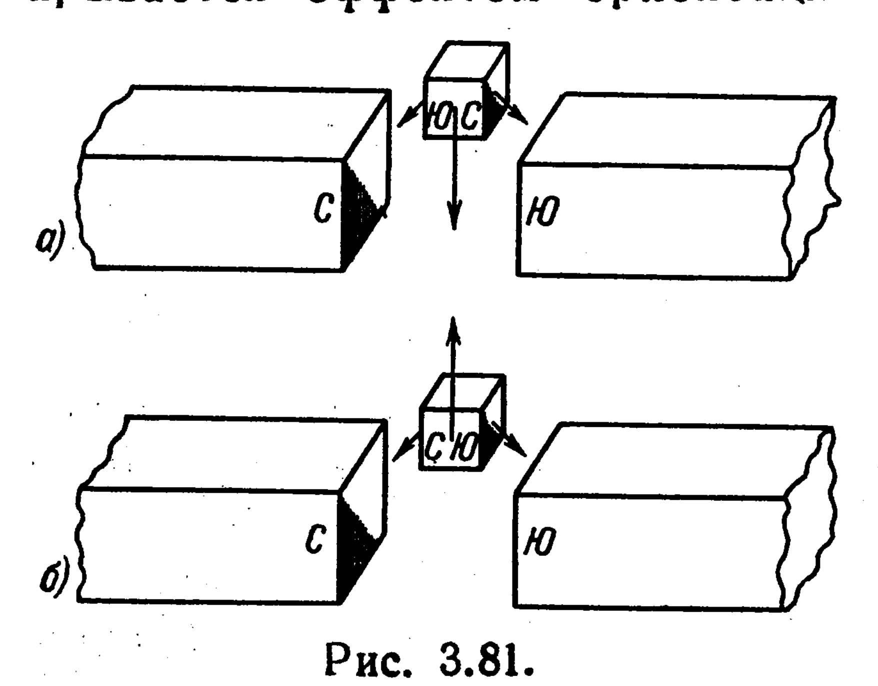


Рис. 3.81.

Если расположить кусок парамагнитного вещества между полюсами магнита, то он намагнитится по полю, и возникший на одном его конце северный полюс окажется возле южного полюса магнита и наоборот, как показано на рис. 3.81, *а*. Поскольку разноименные полюса магнитов притягиваются, то парамагнитные тела будут в т я г и в а т ь с я в магнитное поле. Из аналогичного рис. 3.81, *б* видно, что диамагнитные тела, намагничиваясь против поля, будут в ы т а л к и в а т ь с я из магнитного поля.

Коротко о магнитных моментах атомных ядер. Эти моменты по порядку величины равны

$$p_{m,\,\text{яд}} \approx \frac{e}{2M_p c}\frac{h}{2\pi} \approx 5\cdot 10^{-24}\ \textit{гс}\cdot\textit{см}^3. \tag{46.29}$$

Это выражение отличается от $p_{m,\,\text{эл}}$ тем, что в знаменателе его вместо массы электрона m стоит масса протона M_p, которая в 1836 раз больше. Поэтому собственный магнитный момент протона примерно в 2000 раз меньше собственного магнитного момента электрона. В ядрах магнитные моменты отдельных ядерных частиц могут взаимно компенсироваться, частично или даже полностью, как это имеет место для симметричных ядер, таких, как основные изотопы гелия, кислорода и др. Вследствие своей очень малой абсолютной величины магнитные моменты ядер практически не сказываются на магнитных свойствах тел, но их измерение представляет большой интерес для изучения строения атомного ядра.

Для тонких измерений магнитных моментов используют открытое в 1944 г. Е. К. Завойским явление «парамагнитного резонанса». Из (46.5) и (46.13) следует, что вращающийся электрический заряд при внесении в постоянное магнитное поле напряженностью H получает добавочное вращательное движение вокруг оси,

параллельной полю, с частотой

$$\Delta\omega = \frac{p_m}{L_{\text{мех}}} H. \qquad (46.30)$$

Частота этой так называемой «прецессии» магнитного момента, например, в случае атомного ядра в поле напряженностью ~ 1000 *гс* составляет примерно 10^7 $сек^{-1} = 10$ мегагерц *).

Если через парамагнитное тело, помещенное в постоянное магнитное поле **H**, пропускать радиоволны, то при совпадении частоты волн с собственной частотой (46.30) наступит явление резонанса и произойдет интенсивное поглощение энергии падающей волны. Пропуская радиоволны с различными частотами и определяя частоту, при которой поглощение максимально, можно определить $\Delta\omega$, а следовательно, и величину «гиромагнитного» отношения $p_m/L_{\text{мех}}$ для ядер.

§ 47. Вектор намагничения

Атомы и молекулы материальных тел представляют собой сложные системы стационарно движущихся электрических зарядов. Такие движущиеся заряды, как показано в предыдущем параграфе, можно рассматривать как микроскопические «молекулярные токи», каждый из которых обладает магнитным моментом $\mathbf{p}_m$ и создает вокруг себя магнитное поле. Поле одиночного молекулярного тока довольно быстро уменьшается с расстоянием ($\sim p_m/r^3$) и имеет заметную величину лишь на расстояниях порядка молекулярных размеров.

Геометрическая сумма магнитных моментов отдельных молекул $\mathbf{p}_m$ представляет собой магнитный момент всего тела:

$$\mathbf{P}_{m,\,V} = \sum_{(V)} \mathbf{p}_{m,\,i}. \qquad (47.1)$$

Магнитный момент единицы объема

$$\mathbf{P}_m = \frac{\mathbf{P}_{m,\,V}}{V} = \mathbf{J} \qquad (47.2)$$

носит название в е к т о р а н а м а г н и ч е н и я.

В вакууме молекулярные токи отсутствуют и вектор намагничения тождественно равен нулю

$$\mathbf{J}_{\text{вак}} = 0. \qquad (47.3)$$

В отличие от вакуума любое тело, имеющее молекулярное строение (твердое, жидкое или газообразное), может быть намагничено так, что $\mathbf{J} \neq 0$. Магнитные свойства тел в этом отношении аналогичны электрическим свойствам диэлектриков, и любое тело может быть названо м а г н е т и к о м.

*) 1 мегагерц $= 10^6$ герц.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнетик обычно не намагничен:

$$\mathbf{J}=0 \text{ при } \mathbf{H}=0. \qquad (47.4)$$

В диамагнитных телах это обусловлено взаимной компенсацией орбитальных и спиновых моментов внутри каждой отдельной молекулы, так что $\mathbf{p}_m=0$. В парамагнитных телах $\mathbf{p}_m \neq 0$, но вследствие хаотичности теплового движения магнитные моменты отдельных молекул ориентированы в самых различных направлениях. Вектор намагничения $\mathbf{J}$ оказывается при этом равным нулю лишь в среднем для не слишком малых объемов и интервалов времени.

Создаваемые отдельными молекулярными токами магнитные поля также будут непрерывно изменяться по величине и направлению и скомпенсируют друг друга. Их суммарное макроскопическое поле $\mathbf{H}'$ в среднем будет равно нулю в любой точке пространства. При этом микроскопические магнитные поля внутри самих молекул тела могут быть, вообще говоря, отличными от нуля.

Поместим стержень из магнетика достаточно большой длины l с площадью поперечного сечения S в однородное поле $\mathbf{H}=\text{const}$, созданное внешними макроскопическими токами. Под действием этого поля стержень намагнитится и приобретет магнитный момент в расчете на единицу объема $\mathbf{J}$. В не слишком сильных полях, как было показано в предыдущем параграфе, зависимость $\mathbf{J}$ от $\mathbf{H}$ можно считать практически линейной:

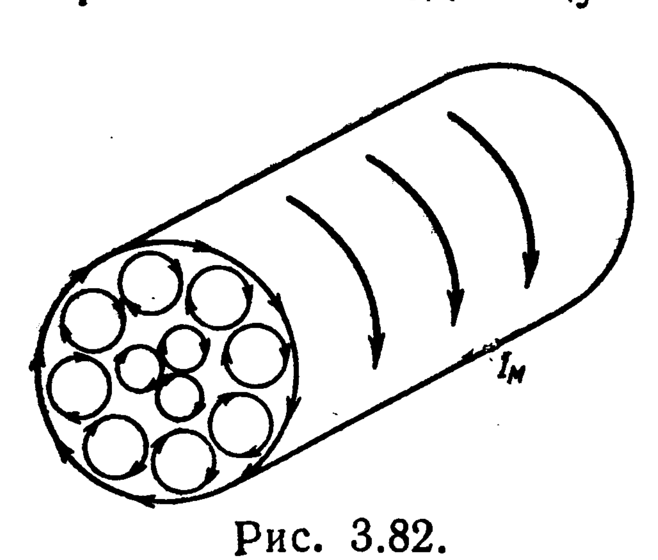


Рис. 3.82.

$$\mathbf{J}=\chi\mathbf{H}. \qquad (47.5)$$

Для парамагнитных тел $\chi_{\text{парамагн}}>0$, а для диамагнитных тел $\chi_{\text{диамагн}}<0$. Значение $|\chi| \ll 1$ и для разных веществ лежит в пределах от 10^{-4} до 10^{-6}.

В однородном магнитном поле $\mathbf{H}=\text{const}$, направленном вдоль оси стержня, намагничение также будет однородным ($\mathbf{J}=\text{const}$). Магнитные моменты молекулярных токов ($\mathbf{p}_m$ или $\Delta\mathbf{p}_m$) будут ориентированы вдоль оси стержня, а сами токи повернутся своими плоскостями перпендикулярно к этой оси, как это показано на рис. 3.82. В результате сложения магнитных полей молекулярных токов намагниченный магнетик создает дополнительное макроскопическое магнитное поле $\mathbf{H}'$, отличное от нуля.

Для вычисления $\mathbf{H}'$ рассмотрим поперечное сечение магнетика. Поскольку $\mathbf{J}=\text{const}$, то можно считать все круговые молекулярные токи в этом сечении одинаковыми и имеющими одно и то же направление. Как видно из рис. 3.82, в местах соприкосновения отдельных молекулярных токов направления их соседних элементов

тока противоположны. Поэтому магнитные поля, создаваемые всеми элементами токов, расположенными внутри магнетика, компенсируют друг друга. В результате остается лишь магнитное поле, создаваемое элементами токов, расположенными на внешней поверхности стержня (отмеченными на рис. 3.82 жирными стрелками) и образующими некоторый результирующий поверхностный ток $I_м$.

Суммарный магнитный момент всего стержня можно тогда рассматривать как момент макроскопического тока $I_м$ площадью поперечного сечения S. Следовательно,

$$P_{mV}=\sum_{(V)}p_m=k'I_мS. \qquad (47.6)$$

Разделив обе части этого равенства на объем стержня $V=Sl$, получим

$$J=\frac{P_{m,V}}{V}=k'\frac{I_мS}{Sl}=k'\frac{I_м}{l}=k'I_{ед}, \qquad (47.7)$$

т. е. вектор намагничения пропорционален току $I_{ед}$, обтекающему единицу длины стержня.

Такой стержень, обтекаемый сплошным током $I_м$, можно рассматривать как своеобразный соленоид, на единицу длины которого приходится один виток с током, равным

$$I_{ед}=\frac{I_м}{l}. \qquad (47.8)$$

Магнитное поле подобного тока можно рассчитать по формуле (33.15) для соленоида, учитывая (47.7); тогда имеем

$$H'=k\cdot 4\pi I_{ед}=\frac{k}{k'}4\pi J. \qquad (47.9)$$

Линии вектора $\mathbf{H}'$ направлены вдоль оси стержня параллельно вектору $\mathbf{J}$. Следовательно, в векторной форме

$$\mathbf{H}'=\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}. \qquad (47.10)$$

При наличии внешнего поля макроскопических токов полная напряженность среднего макроскопического поля в магнетике будет равна

$$\mathbf{H}_{полн}=\mathbf{H}+\mathbf{H}'. \qquad (47.11)$$

В гауссовой системе единиц, как указывалось в § 29, это полное поле представляет собой вектор магнитной индукции, т. е. $\mathbf{H}_{полн}=\mathbf{B}$. В системе СИ вектор $\mathbf{B}$ отличается от $\mathbf{H}_{полн}$ постоянным размерным множителем μ_0, отличным от единицы, так что

$$\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{H}')=\mu_0\left(\mathbf{H}+\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}\right). \qquad (47.12)$$

Непосредственно наблюдаемой макроскопической величиной является не **H**, а **B**.

Поскольку **B** характеризует полное поле, созданное всеми токами, как макроскопическими в проводниках, так и микроскопическими в магнетиках, то линии вектора магнитной индукции **B** не имеют источников и являются замкнутыми.

Если попытаться определить **B**, используя, например, закон Био—Савара—Лапласа, то для расчета необходимо полностью знать распределение и направление всех макроскопических и микроскопических токов. Однако величина и ориентация микроскопических токов, создающих поле **H′**, в свою очередь зависят от поля внешних токов и свойств среды и не могут быть заданы заранее. Поэтому при расчете магнитных полей в среде, содержащей магнетики, нельзя ограничиться одним вектором **B**, а приходится вводить и вектор **H**. Используя (47.12), мы определим вектор напряженности магнитного поля как

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}. \qquad (47.13)$$

Определенный таким образом вектор **H** в пустоте (где $\mathbf{J}_{\text{вак}}=0$), с точностью до множителя μ_0, зависящего от выбора системы единиц, совпадает с **B**. В магнетиках для установления зависимости между **B** и **H** надо знать связь между **J** и **H**, определяемую свойствами среды, например, по соотношению (47.5) для пара- и диамагнитных тел.

При наличии макроскопических токов $I_{\text{м}}$ в однородной среде **H** может быть вычислено по закону Био—Савара—Лапласа, а затем подставлено в выражение (47.13). Для поля **H** справедливы теорема о циркуляции или закон полного тока (33.11).

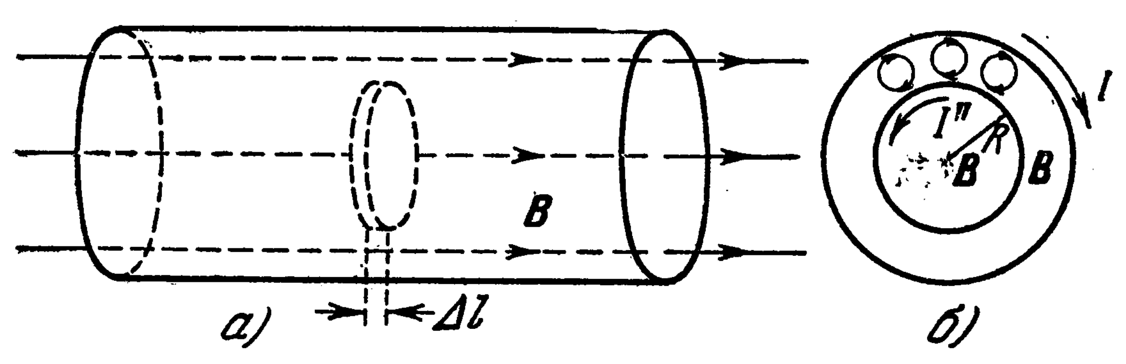


Рис. 3.83.

Для раздельного экспериментального наблюдения **B** и **H** (а следовательно, для определения **J**) в магнетике, следует поступать следующим образом. Вырежем в магнетике узкую плоскую щель перпендикулярно к линиям **B**, как это показано на рис. 3.83. Проводя те же рассуждения, как и в случае рис. 3.82, можно показать, что при таком вырезе на обводе щели как бы появится

нескомпенсированный круговой ток. Обратим внимание читателя на то, что в соответствии с направлением молекулярных токов поверхностные токи снаружи магнетика и в щели имеют различное направление. Этот ток будет создавать внутри щели дополнительное поле $\mathbf{H}''$, искажающее поле $\mathbf{B}$. Поскольку этот ток $I''_м = -I_{ед}\Delta l = -\frac{J}{k'}\Delta l$ (см. рис. 3.83, *а*) очень мал, то в центре щели радиуса R создаваемое им поле

$$H'' = -\frac{k}{k'}\frac{2\pi J\Delta l}{R}, \qquad (47.14)$$

рассчитанное по (30.16), при $\Delta l \ll R$ будет пренебрежимо мало. Следовательно, на пробную рамку с током, помещенную в такую щель, будет действовать результирующее поле $\mathbf{B}_щ$, практически равное $\mathbf{B}$ в толще магнетика.

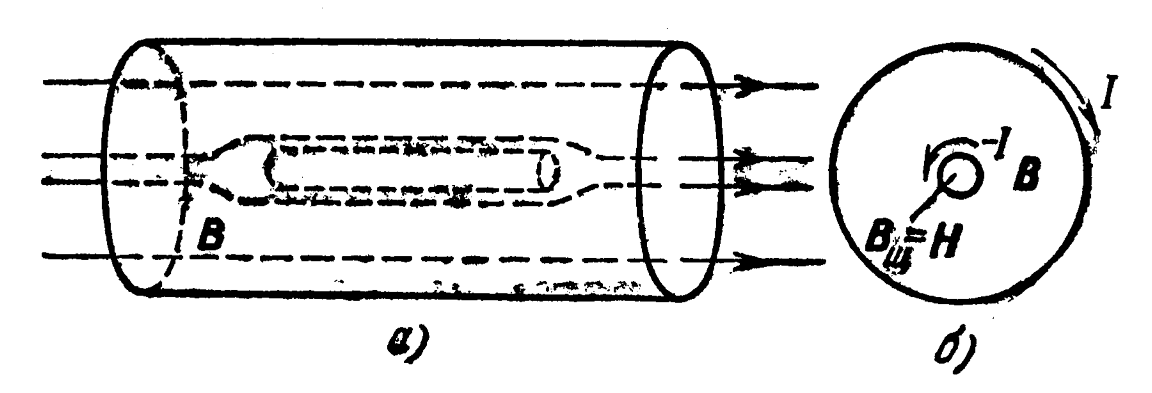


Рис. 3.84.

Вырежем теперь в магнетике длинную тонкую цилиндрическую щель параллельно линиям поля, как показано на рис. 3.84, *а*. Тогда в этой щели на единицу ее длины появится нескомпенсированный ток $I''_м/l = I_{ед}$, и результирующее поле в этой щели будет отличаться от полного поля в магнетике на $\mathbf{H}'' = -\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}$. Следовательно,

$$\mathbf{B}_щ = \mathbf{B} - \mu_0\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}. \qquad (47.15)$$

Подставляя сюда вместо $\mathbf{B}$ его значение из (47.12), получим

$$\mathbf{B}_щ = \mu_0\left(\mathbf{H} + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}\right) - \mu_0\frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J} = \mu_0\mathbf{H}. \qquad (47.16)$$

В гауссовой системе в этом случае $\mathbf{B}_щ = \mathbf{H}$.

Физически этот результат совершенно прозрачен. В длинном цилиндрическом соленоиде напряженность магнитного поля определяется только плотностью тока, обтекающего соленоид, и не зависит от радиуса соленоида. В рассматриваемом случае поверхностные токи на внешней поверхности магнетика и на поверхности щели в нем имеют одинаковую плотность, но разное направление. Эти поверхностные токи эквивалентны токам двух соленоидов,

вложенных один в другой. Плотность токов одна и та же, значит, и напряженность поля, порождаемого ими, одна и та же по величине. Но направления токов, а значит, и полей противоположны (см. направления токов на рис. 3.84, *б*). Поэтому внутри меньшего «соленоида» эти поля (большего и меньшего «соленоидов») в точности компенсируют друг друга. В этом случае внутри щели может наблюдаться только поле, вызванное внешними по отношению к магнетику источниками.

Следовательно, на пробную рамку с током, помещенную в такую длинную цилиндрическую щель, будет действовать лишь поле **H**, созданное внешними источниками магнитного поля (макроскопическими токами, другими магнитами и т. д.).

Для пара- и диамагнитных тел в не слишком сильных полях $H' \ll H$, и связь между **J** и **H** практически описывается линейным соотношением (47.5). Из (47.12) и (47.5) тогда следует, что

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H} + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi\mathbf{J}\right) = \mu_0\left(\mathbf{H} + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi\chi\mathbf{H}\right) = \mu_0\left(1 + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi\chi\right)\mathbf{H}. \tag{47.17}$$

Сопоставляя (47.17) с (29.10), мы видим, что величина

$$1 + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi\chi = \mu \tag{47.18}$$

является магнитной проницаемостью данного вещества. Она показывает, во сколько раз магнитная индукция в среде возрастает, а для диамагнитных тел — уменьшается по сравнению с магнитной индукцией, создаваемой теми же макроскопическими токами в пустоте.

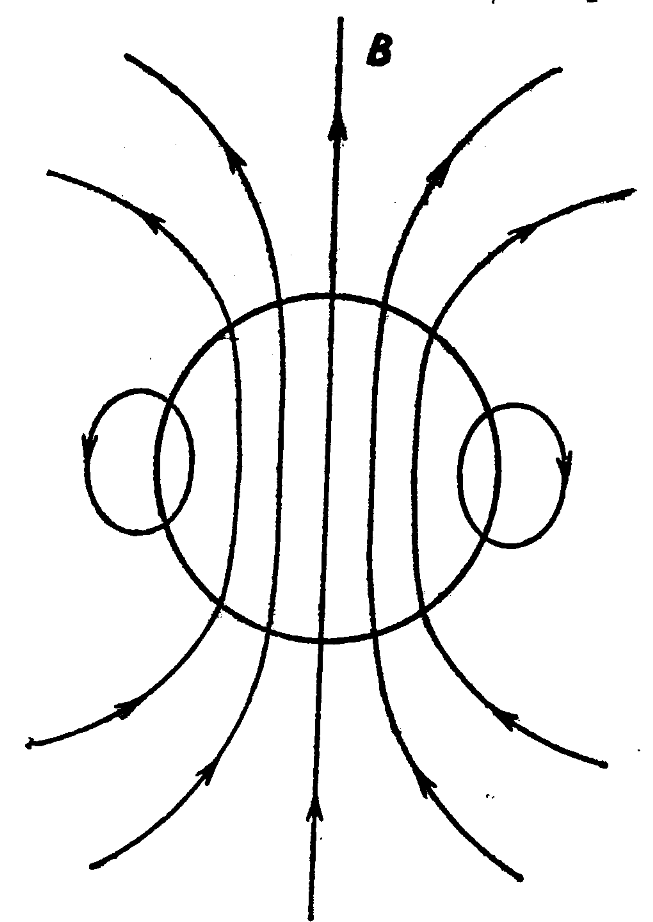


Рис. 3.85.

Для парамагнитных тел

$$\chi > 0 \text{ и } \mu_{\text{парамагн}} > 1, \tag{47.19}$$

для диамагнитных тел

$$\chi < 0 \text{ и } \mu_{\text{диамагн}} < 1. \tag{47.20}$$

В гауссовой системе единиц

$$k' = k = \frac{1}{c} \text{ и } \mu = 1 + \frac{4\pi}{c}\chi; \tag{47.18а}$$

в системе СИ

$$k' = 1, \quad k = \frac{1}{4\pi} \text{ и } \mu = 1 + \chi. \tag{47.18б}$$

Отсюда видно, что значение магнитной восприимчивости в системе СИ благодаря «рационализации» записи, вводимое в формулы для определения магнитного поля токов H, оказывается в 4π раз больше, чем в системе СГС:

$$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{СГС}}. \tag{47.21}$$

Из (47.17) и (47.18) вытекает связь между напряженностью магнитного поля **H** и вектором магнитной индукции **B** в среде:

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\,\mathbf{H}=\mu_a\mathbf{H}, \qquad (47.22)$$

которую мы обосновали в § 29.

В заключение следует отметить, что соотношение (47.10), которое определяет поле **H′**, создаваемое самим магнетиком, строго справедливо лишь в случае бесконечно длинного стержня. Если намагниченное тело имеет конечные размеры, то зависимость **H′** от **J** имеет более сложный характер и линии **H′** выходят из магнетика наружу в вакуум, как это примерно изображено на рис. 3.85 для однородного намагниченного шара. В этом случае определение вспомогательного расчетного вектора **H** по формуле (47.13) является чисто формальной операцией, **H** уже будет зависеть не только от внешних макроскопических токов, но и от намагничения магнетиков.

§ 48. Ферромагнетизм

Особняком от рассмотренных случаев стоит очень важная для техники группа ферромагнитных тел. Свое название они получили от латинского наименования основного представителя этих тел — железа (ferrum). К ферромагнитным веществам, кроме железа, относятся кобальт, никель, гадолиний, некоторые сплавы и химические соединения.

Ферромагнитные тела сильно намагничиваются уже в сравнительно слабых полях. Как показали опыты Э. X. Ленца и Б. С. Якоби, произведенные еще в 1839 г., в таких полях $H' \gg H$, но можно, как и для парамагнетиков, считать, что $J \sim H$ и $B \sim H$. Однако коэффициенты пропорциональности χ и μ у ферромагнетиков имеют очень большие значения и достигают десятков тысяч.

Бурное развитие электротехники во второй половине XIX века позволило получать большие токи и создавать сильные магнитные поля. Широкое применение железных сердечников для концентрации магнитных полей поставило перед физиками задачу детального исследования намагничения железа в зависимости от внешнего магнитного поля. Эта задача была решена в 1872 г. А. Г. Столетовым.

Для измерения H и B он использовал замкнутое железное кольцо прямоугольного поперечного сечения S с длиной по осевой линии l. Первичная обмотка этого сердечника, состоявшая из w_1 витков, замыкалась на батарею, и через нее проходил постоянный ток I. При этом внутри сердечника, на который был намотан этот соленоид, возникало магнитное поле, напряженность которого согласно (33.15) равнялась

$$H=k\frac{4\pi I w_1}{l}\,. \qquad (48.1)$$

При включении тока в первичной обмотке сердечник намагничивался, и магнитный поток, пронизывающий сердечник, возрастал от нуля до

$$\Phi_{\text{макс}} = BS, \qquad (48.2)$$

где B — магнитная индукция в сердечнике. Этот магнитный поток пронизывал витки вторичной обмотки, надетой на сердечник и соединенной с гальванометром. При изменении магнитного потока во вторичной обмотке индуцировалась э. д. с., равная согласно (41.10)

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (48.3)$$

где w_2 — число витков в этой обмотке, и шел переменный ток (R — полное сопротивление катушки и гальванометра)

$$i = \frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{w_2}{R}\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (48.4)$$

Этот ток за время dt переносил через гальванометр заряд

$$dq = i\,dt = -\frac{w_2}{R}\,d\Phi. \qquad (48.5)$$

Полный заряд q (импульс тока), проходивший через гальванометр,

$$q = \int_0^q dq = \int i\,dt = -\frac{w_2}{R}\int_0^{\Phi_{\text{макс}}} d\Phi = -\frac{w_2}{R}\Phi_{\text{макс}} = -\frac{w_2 S}{R}B \qquad (48.6)$$

измерялся по первому отбросу гальванометра. Отсюда могла быть рассчитана величина B:

$$B = -\frac{qR}{w_2 S}. \qquad (48.7)$$

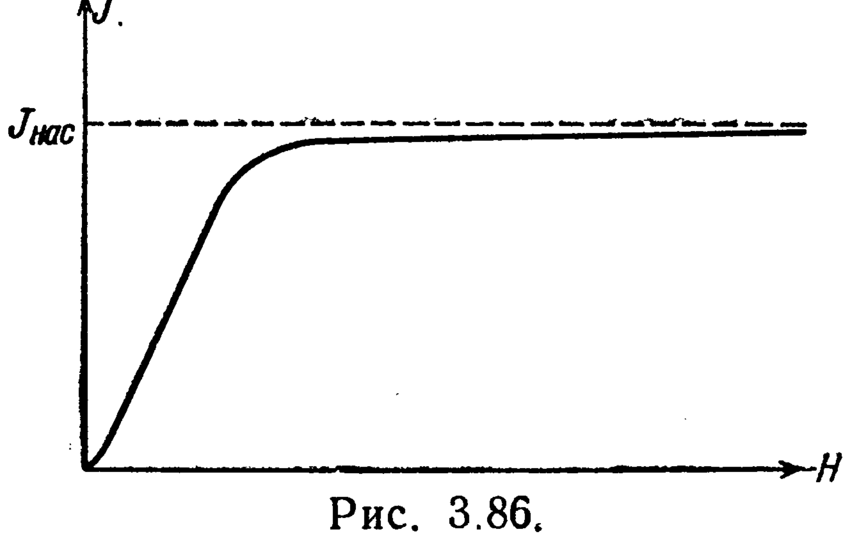


Рис. 3.86.

Зная B и H, можно было согласно (47.12) найти величину намагничения J. Составив вторичную обмотку из нескольких секций с различным числом витков и комбинируя их включение, Столетов имел возможность пропускать через первичную обмотку различные токи I и находить J при различных значениях H.

В результате тщательных опытов Столетов установил, что зависимость J и H для железа имеет вид, изображенный на рис. 3.86. В слабых полях J круто нарастает с ростом H, быстрее, чем по линейному закону. Далее рост J замедляется и намагничение стремится к некоторому предельному значению $J_{\text{нас}}$, при котором

поворачиваются по полю все молекулярные магнитики. Поскольку

$$B = \mu_0\left(H + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi J\right), \tag{48.8}$$

то зависимость B от H имеет вид, изображенный на рис. 3.87. В слабых полях B круто возрастает с ростом H вследствие быстрого роста J. В сильных полях второе слагаемое в (48.8) остается практически постоянным ($J = J_{нас}$) и B увеличивается только за счет непосредственного увеличения H.

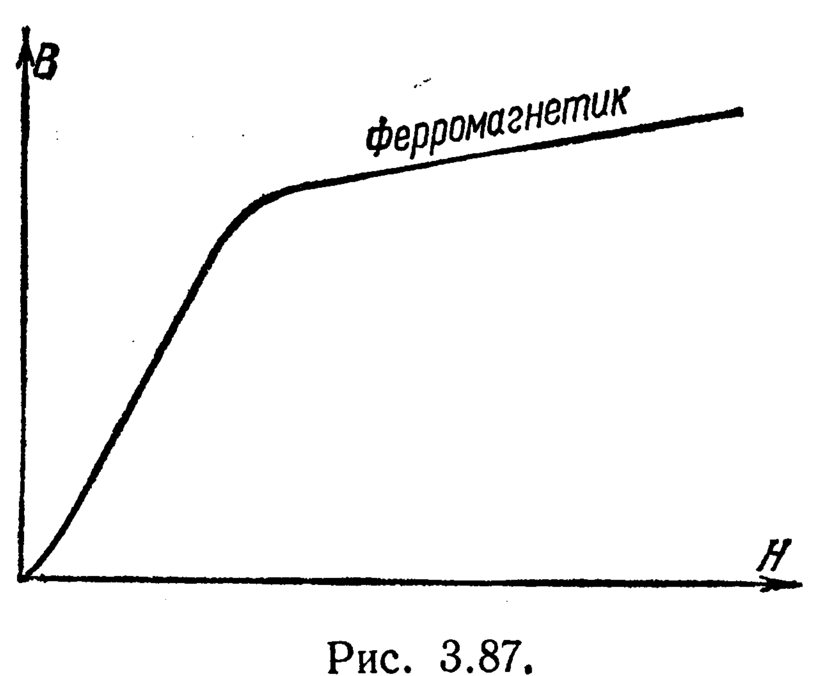


Рис. 3.87.

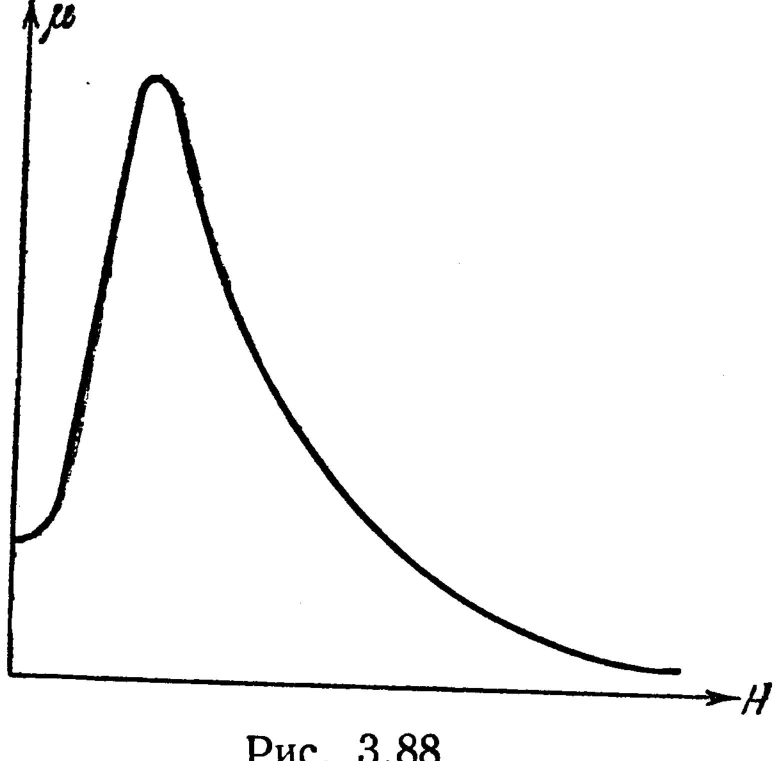


Рис. 3.88

Если чисто формально распространить формулу (47.22) на ферромагнитные тела и определить магнитную проницаемость как отношение

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}, \tag{48.9}$$

то μ в этом случае является сложной функцией H, примерный характер которой изображен на рис. 3.88.

Магнитная проницаемость для ферромагнетиков

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1 + \frac{k}{k'}\cdot 4\pi \frac{J}{H} \tag{48.10}$$

в слабых полях имеет очень большую величину (так как $J \gg H$) и несколько возрастает с ростом H. В сильных магнитных полях $J = \text{const} = J_{нас}$ и с ростом H отношение $J/H \to 0$, а $\mu \to 1$.

Кривая зависимости B от H, изображенная на рис. 3.87, носит название *основной кривой намагничения*. Если намагнитить ферромагнетик до некоторого состояния, соответствующего точке A на рис. 3.89, а затем начать уменьшать напряженность магнитного поля H, то установившиеся по полю молекулярные магнитики начнут дезориентироваться не сразу и уменьшение B будет происходить медленнее, чем увеличение этой величины с ростом H.

При уменьшении H до нуля часть молекулярных магнитиков остается ориентированной по первоначальному направлению поля. Таким образом, при снятии внешнего поля ферромагнитное тело остается намагниченным и представляет собой **постоянный магнит** с некоторым остаточным намагничением $\mathbf{J}_{ост}$ и соответствующей остаточной индукцией

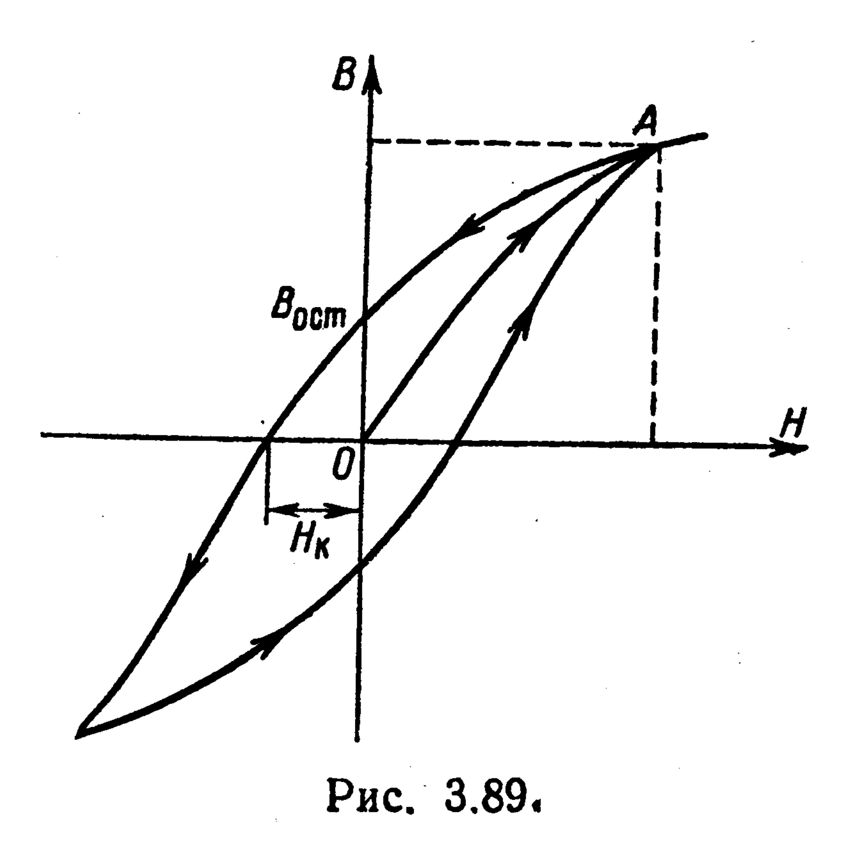


Рис. 3.89.

$$\mathbf{B}_{ост}=\mu_0\frac{k}{k'}4\pi\mathbf{J}_{ост}. \qquad (48.11)$$

Для полного размагничивания образца необходимо, как видно из рис. 3.89, приложить магнитное поле обратного направления и величины $H_к$. Величина $H_к$ называется **коэрцитивной** (задерживающей) **силой**. В результате при попеременном изменении направления намагничивающего поля H зависимость B от H будет изображаться петлеобразной кривой, носящей название **петли гистерезиса** (изменение B будет запаздывать по отношению к изменению H).

Для изготовления постоянных магнитов применяют ферромагнитные вещества с большим остаточным намагничением и большой коэрцитивной силой («жесткие» стали). Для изготовления сердечников применяют «мягкие» магнитные материалы с малой коэрцитивной силой и большой магнитной проницаемостью, т. е. с очень крутым подъемом кривой зависимости B от H.

Вследствие гистерезиса понятие магнитной проницаемости можно применять для ферромагнетиков лишь к основной кривой намагничения. Из рис. 3.89, например, видно, что для постоянного магнита при выключении внешнего поля $H\to 0$ имеется остаточное намагничение $B_{ост}\neq 0$. Из (48.9) тогда получилось бы, что

$$\mu=\frac{B_{ост}}{0}=\infty. \qquad (48.12)$$

Детальное изучение свойств ферромагнитных тел показало, что в последних отдельные микроскопические области (**домены**) намагничены до насыщения даже в отсутствие внешнего поля. Однако направление намагничения в каждой такой области (размерами $\sim 10^{-4}$ *см*) различно, и в среднем магнитный момент макроскопического объема равен нулю. Посыпая поверхность ферромагнетика мельчайшими железными опилочками, Н. С. Акулов смог показать, что опилочки скапливаются у «полюсов» этих

областей и делают тем самым видимыми границы между доменами.

При внесении ферромагнетика во внешнее магнитное поле начинают поворачиваться и ориентироваться по полю не магнитные моменты отдельных атомов, как в парамагнитных телах, а сразу целые области так называемого спонтанного (самопроизвольного) намагничения. Поэтому с ростом H магнитная индукция B возрастает очень быстро, и относительная магнитная проницаемость $\mu = B/\mu_0 H$ имеет очень большие значения уже в слабых полях. Так как домены поворачиваются по полю скачком, то основная кривая намагничения $B = f(H)$ на графике с достаточно растянутой шкалой, или, образно говоря, при рассматривании через лупу, будет иметь ступенчатый вид (рис. 3.90).

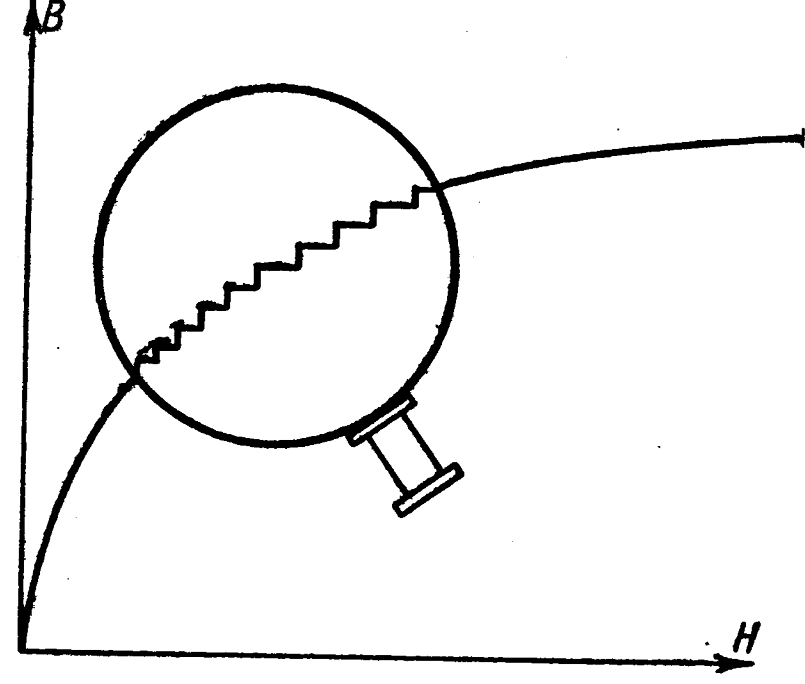


Рис. 3.90.

В достаточно сильных магнитных полях все домены повернутся по полю, и наступит магнитное насыщение. При выключении внешнего поля единственным фактором, действующим на ориентацию доменов, останется тепловое движение, которое будет дезориентировать домены. Однако вследствие значительной энергии, необходимой для поворота доменов, процесс размагничивания будет затруднен; этим и вызван гистерезис, показанный на рис. 3.89.

Для определения природы носителей ферромагнетизма Эйнштейн и де Гааз в 1915 г. поставили следующий опыт. Ферромагнитный стерженек, подвешенный на кварцевой нити, был намагничен до насыщения. При этом все элементарные магнитики устанавливались по полю. Затем, изменяя направление тока в соленоиде, обвивавшем стержень, последний резко перемагничивали. При этом все элементарные магнитики поворачивались на 180°. Поскольку магнитный момент каждого электрона, как указывалось выше, связан с его механическим моментом, то стержень начинал вращаться. Для усиления эффекта Эйнштейн и де Гааз перемагничивали стержень с частотой, совпадающей с частотой собственных крутильных колебаний стержня, т. е. достигали резонанса.

Измеряя полный магнитный и полный механический моменты стержня, Эйнштейн и де Гааз обнаружили, что их отношение равно

$$\frac{p_m}{L_{\text{мех}}} = \frac{e}{2mc}, \qquad (48.13)$$

как и ожидалось. Однако этот результат оказался ошибочным. Указанное отношение в действительности равно e/mc. Теоретически это удалось объяснить лишь после открытия спина электрона (см. § 46).

К тому же выводу пришли в 1917 г. А. Ф. Иоффе и П. Л. Капица. В их опытах намагниченный железный стержень быстро нагревался. Для каждого ферромагнетика существует своя определенная температура, при которой области спонтанного намагничения разрушаются и ферромагнетик превращается в обычное парамагнитное тело. Эта температура носит название точки Кюри и для железа равна примерно 753° С. По достижении точки Кюри стержень размагничивался, магнитные и механические моменты отдельных элементарных магнетиков поворачивались хаотически во все стороны, и по закону сохранения момента количества движения весь стержень приходил во вращение.

При анализе направления вращения стержня в опытах Эйнштейна и де Гааза, Иоффе и Капицы следует учитывать, что вследствие отрицательного заряда электрона векторы его магнитного и механического моментов направлены в противоположные стороны (см. рис. 3.78).

В течение многих лет оставался невыясненным вопрос о природе сил, удерживающих параллельно друг другу спины электронов внутри каждой области спонтанного намагничения (домена.) В 1928 г. Гейзенберг и Я. И. Френкель показали, что эти силы носят квантовый характер и обусловлены волновыми свойствами электронов. В те же годы Н. С. Акуловым были заложены основы современной теории технической кривой намагничения и установлена тесная связь вида этой кривой с анизотропией магнитных свойств ферромагнитных кристаллов, а также с изменением их размеров при намагничении (так называемая магнитострикция).

Как мы видели выше, в ферромагнетиках вследствие гистерезиса при уменьшении внешнего магнитного поля **H** до нуля намагничение тела полностью не исчезает. Обозначим вектор намагничения в таком постоянном магните через $\mathbf{J}_0$. Возникает вопрос, как рассчитывать векторы **B** и **H**, т. е. поле постоянного магнита, в отсутствие внешних макроскопических токов. Решим эту задачу на двух простых примерах.

Пример 1. Рассмотрим однородно намагниченный тороид, диаметр которого $D=l/\pi$ во много раз больше толщины δ. Линии вектора намагничения $\mathbf{J}_0$ представляют собой окружности, проходящие в тороиде. Как мы видели (см. (47.12)), полное магнитное поле **B**, создаваемое всеми молекулярными токами, может быть рассчитано как поле эквивалентного тока, обтекающего поверхность тороида, и величина этого тока на единицу длины равна

$$\frac{I_{\text{м}}}{l}=\frac{J_0}{k'}=I_{\text{ед}}. \qquad (48.14)$$

Как указывалось в § 33, к тонкому тороиду применима формула (33.15) для соленоида:

$$B=\mu_0 H_{\text{сол}}=\mu_0 k\cdot 4\pi\frac{I_{\text{м}}}{l}=\mu_0 k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}=\mu_0\frac{k}{k'}4\pi J_0. \qquad (48.15)$$

Подставляя это значение B в (47.13), мы найдем величину H:

$$H=\frac{B}{\mu_0}-\frac{k}{k'}\cdot 4\pi J_0=\frac{k}{k'}\cdot 4\pi J_0-\frac{k}{k'}\cdot 4\pi J_0=0. \qquad (48.16)$$

Поскольку снаружи тороида J_0, B и H равны нулю тождественно, то, таким образом, для намагниченного тороида повсюду

$$\mathbf{H}=0. \qquad (48.17)$$

Если обмотать тороид проволокой и пропускать по ее виткам микроскопический ток I, то вектор $\mathbf{H}$ уже не будет равен нулю и определится величиной макроскопического внешнего тока I по формуле (33.15). То обстоятельство, что при этом изменится величина вектора намагничения $\mathbf{J}$, не изменит величины $\mathbf{H}$, поскольку, как мы только что доказали, однородно намагниченный тороид создает не поле $\mathbf{H}$, а только $\mathbf{B}$.

Значит, в случае однородно намагничиваемого тороида вектор $\mathbf{H}$ определяется только внешними токами I и не зависит от $\mathbf{J}$. Как мы увидим в следующем примере, такая простая связь между $\mathbf{H}$ и I сохраняется только для тороида или бесконечно длинного прямого соленоида. Именно поэтому А. Г. Столетов после тщательного теоретического анализа выбрал для нахождения истинной зависимости J от H, в отличие от своих предшественников, схему опыта, описанную в начале этого параграфа.

Пример 2. Рассмотрим изображенный на рис. 3.91 круглый стержень длины l и площадью поперечного сечения $S=\pi R^2$ с однородным намагничением $J_0=\text{const}$, направленным вдоль оси стержня. Для нахождения полного макроскопического поля B поступим так же, как и в предыдущем примере, и заменим намагничение J_0 эквивалентным током на единицу длины стержня $J_0/k'=I_{\text{ед}}$. Поскольку в этом случае нельзя применить формулу (33.15), справедливую лишь для бесконечно длинного соленоида, то разобьем поверхностные токи на ряд бесконечно тонких колец толщиной dy каждое, находящихся на расстоянии y от центральной плоскости. Ток, обтекающий кольцо, будет равен

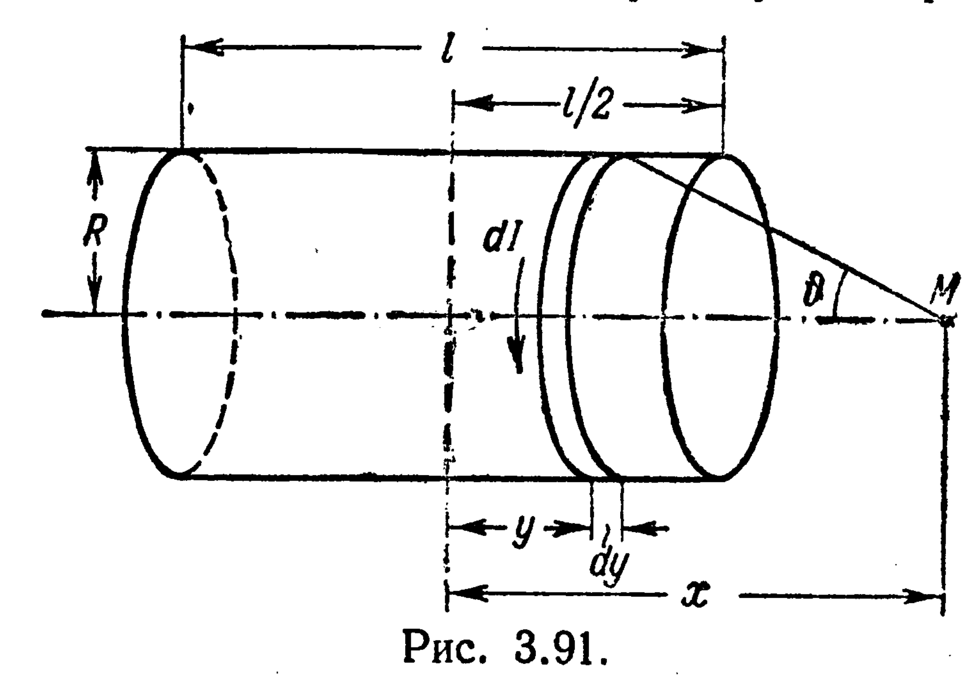


Рис. 3.91.

$$dI=\frac{J_0}{k'}dy=I_{\text{ед}}. \qquad (48.18)$$

Ограничимся определением полного поля лишь для точек, расположенных на оси. В точке M, находящейся на расстоянии x от центра соленоида

и на расстоянии $x-y$ от выделенного кольца с током dI, полное поле, создаваемое этим кольцом, согласно (30.15) равно

$$dB=\mu_0 k\frac{2\pi R^2 dI}{[R^2+(x-y)^2]^{3/2}}=\mu_0 k\frac{2\pi I_{\text{ед}} R^2}{[R^2+(x-y)^2]^{3/2}}dy. \quad (48.19)$$

Обозначим через ϑ угол между осью стержня и прямой, направленной из точки наблюдения M к кольцу с током dI. Тогда из рис. 3.93 видно, что

$$\cos\vartheta=\frac{x-y}{\sqrt{R^2+(x-y)^2}}. \quad (48.20)$$

При переходе к следующему кольцу, т. е. при перемещении на dy (при $x=\text{const}$ и $R=\text{const}$), $\cos\vartheta$ изменяется на

$$d(\cos\vartheta)=-\frac{R^2\,dy}{[R^2+(x-y)^2]^{3/2}}. \quad (48.21)$$

Знак минус в (48.21) связан с тем, что при перемещении вправо ($dy>0$) угол ϑ растет, а его косинус соответственно убывает ($d(\cos\vartheta)<0$). Сопоставляя (48.19) с (48.21), получим

$$dB=-\mu_0 k\cdot 2\pi I_{\text{ед}} d(\cos\vartheta). \quad (48.22)$$

Для нахождения $B_{\text{оси}}$ для намагниченного стержня выражение (48.22) надо проинтегрировать в пределах от $\vartheta=\vartheta_1$, соответствующего прямой, направленной на левый край стержня $\left(\cos\vartheta_1=\frac{x+(l/2)}{\sqrt{R^2+[x+l/2]^2}}\right)$, до $\vartheta=\vartheta_2$, соответствующего углу прямой, направленной на правый край стержня $\left(\cos\vartheta_2=\frac{x-(l/2)}{\sqrt{R^2+[x-l/2]^2}}\right)$. Тогда получим

$$B_{\text{оси}}=\mu_0 k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2}{2}. \quad (48.23)$$

Для бесконечно длинного соленоида $\vartheta_1=0$, $\cos\vartheta_1=1$, а $\vartheta_2=\pi$, $\cos\vartheta_2=-1$ и $B=\mu_0 k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}$, как в предыдущем примере. Для конечного соленоида B достигает максимума в центре соленоида при $x=0$ и равно

$$B_{\text{макс}}=\mu_0 k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}\frac{l/2}{\sqrt{R^2+(l/2)^2}}<\mu_0 k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}. \quad (48.24)$$

Подставляя полученные значения B в (48.13), найдем значения H на оси:

$$H_{\text{вне стержня}}=\frac{B}{\mu_0}=k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2}{2}>0 \quad (48.25\text{а})$$

и

$$H_{\text{внутри стержня}}=\frac{B}{\mu_0}-k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}=k\cdot 4\pi I_{\text{ед}}\left\{\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2}{2}-1\right\}<0. \quad (48.25\text{б})$$

Для конечного намагниченного стержня (как это следует из (48.25)) вспомогательный вектор **H** отличен от нуля как снаружи, так и внутри стержня, даже в отсутствие внешних макроскопических токов. Вне стержня **H** направлен, так же как и **B**, в положительную сторону оси (см. (48.25, *а*), учитывая, что $\vartheta_1<\vartheta_2$, а $\cos\vartheta_1>\cos\vartheta_2$). В противоположность этому внутри стержня **H** направлен против **B** (см. (48.25б)).

На рис. 3.92, *а* показаны линии вектора **B**. Как всегда, эти линии не имеют источников и замкнуты на себя. На рис. 3.92, *б* показаны линии вектора **H**. Этот вектор при переходе через границы стержня меняет свое направление на обратное, как будто

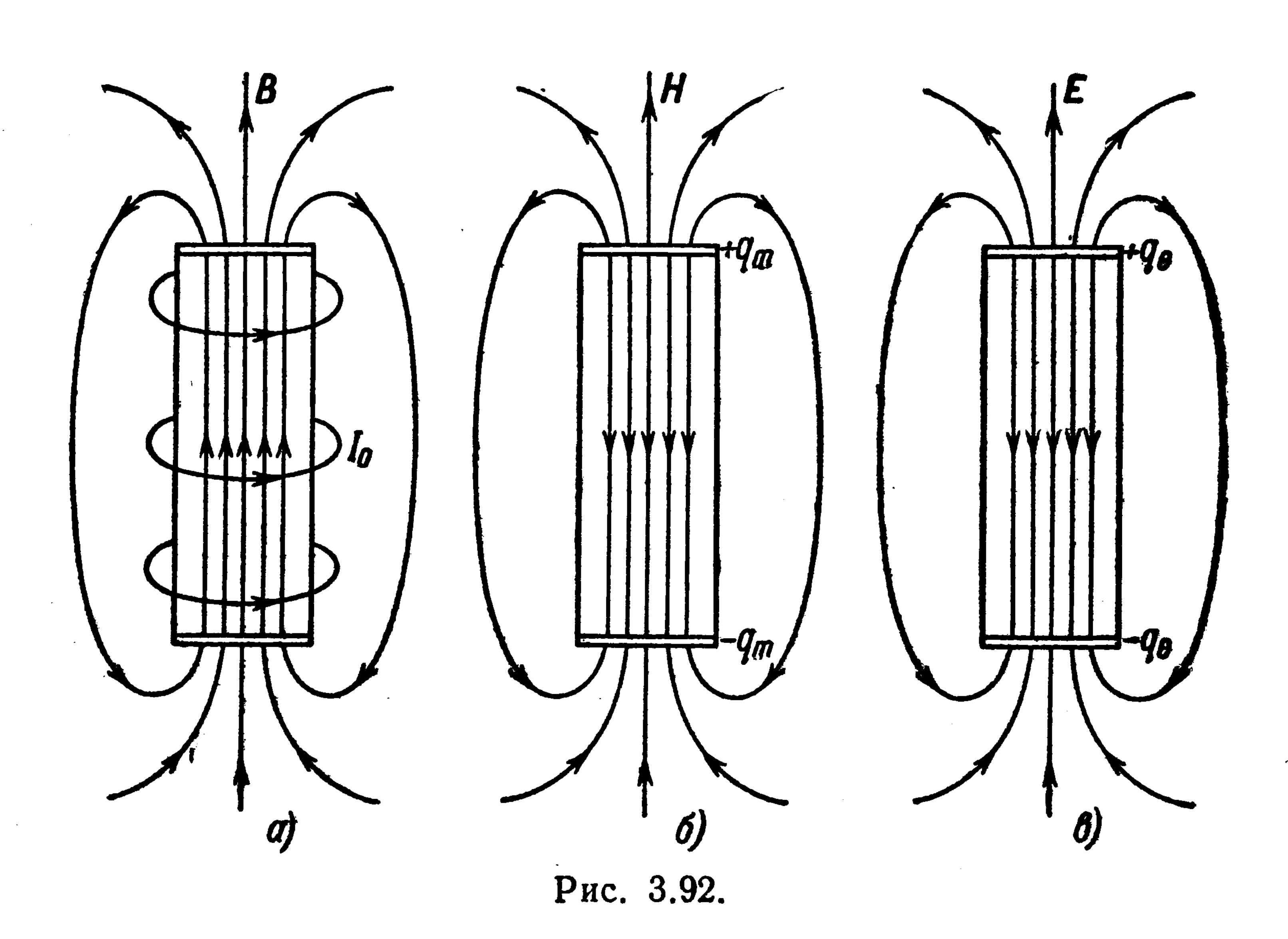


Рис. 3.92.

на этих границах расположены «источники» вектора **H**, на верхней — положительные, а на нижней — отрицательные («стоки»). По аналогии с электростатикой (рис. 3.92, *в*) можно сказать, что на границах стержня расположены фиктивные «магнитные заряды» $\pm q_m$, являющиеся концами микроскопических магнитных диполей, заполняющих стержень.

На этом же примере можно убедиться, что связь между фиктивными магнитными зарядами q_m и вектором **H** определяется законом, аналогичным закону Кулона:

$$\mathbf{H}=k\frac{q_m}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (48.26)$$

Действительно, представим себе круглую пластинку радиуса R, равномерно покрытую зарядами с плотностью $\sigma_m=\frac{q_m}{S}=\frac{q_m}{\pi R^2}$. Будем искать напряженность поля, создаваемую этой пластинкой на оси на некотором расстоянии x от ее плоскости (см. рис. 3.93). Разобьем эту пластинку мысленно на концентрические кольца переменного радиуса ϱ и ширины $d\varrho$. Площадь такого кольца будет $2\pi\varrho\, d\varrho$ и заряд $dq_m=\sigma_m\cdot 2\pi\varrho\, d\varrho$. В точке M составляющие напряженности поля, перпендикулярные к оси, от противо-

положных участков этого кольца взаимно скомпенсируются, и суммарная составляющая вдоль оси будет равна

$$dH_{\text{оси}} = k\frac{dq_m}{r^2}\cos\alpha = k\frac{\sigma_m 2\pi\rho\, d\rho}{r^2}\frac{x}{r} = k\frac{\pi\sigma_m x d(\rho^2)}{(\sqrt{x^2+\rho^2})^3}. \tag{48.27}$$

Интегрируя поля, создаваемые отдельными кольцами, найдем поле всей пластинки:

$$H_{\text{оси}} = \int_{\rho=0}^{\rho=R} dH_{\text{оси}} = k\cdot 2\pi\sigma_m\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] = k\cdot 2\pi\sigma_m(1-\cos\vartheta). \tag{48.28}$$

Намагниченный стержень, рассматривавшийся нами выше для расчета $H_{\text{оси}}$, можно заменить двумя пластинками с поверхностной плотностью фиктивных магнитных зарядов $\pm\sigma_m$ (см. рис. 3.92, *б*). Тогда согласно (48.28) напряженность поля H в некоторой точке на оси внутри стержня будет равна

$$H_{\text{оси, внутри стержня}} = -k\cdot 2\pi\sigma_m(1-\cos\vartheta_1) + \\ + k\cdot 2\pi\sigma_m(1-\cos\vartheta_2) = k\cdot 4\pi\sigma_m\left[\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2}{2}-1\right]. \tag{48.29}$$

Сопоставляя (48.29) с (48.25б), мы видим, что магнитное поле **H** намагниченного стержня может быть представлено как поле, создаваемое фиктивными магнитными зарядами (полюсами), расположенными на противоположных границах стержня с поверхностной плотностью

$$\sigma_m = \pm I_{\text{ед}} = \pm J_0/k' \tag{48.30}$$

и полным магнитным зарядом («магнитной массой»)

$$q_m = \sigma_m S = I_{\text{ед}} S = \frac{J_0 Sl}{k'l} = \frac{P_{m,V}}{k'l}. \tag{48.31}$$

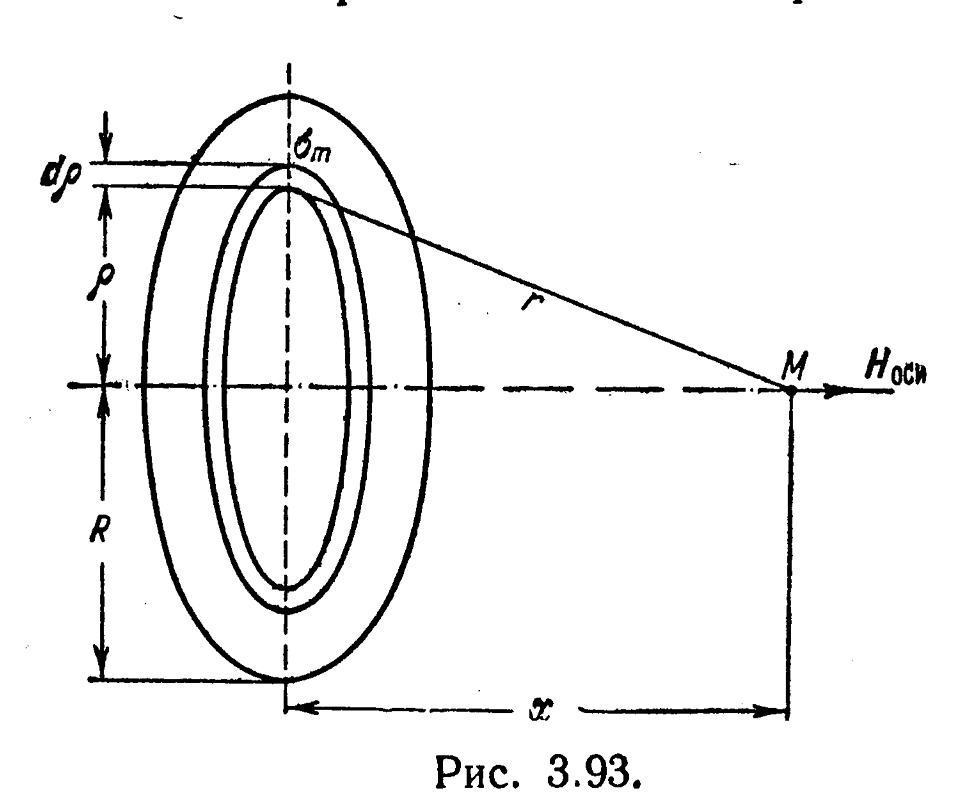


Рис. 3.93.

Из (48.31) следует, что полный магнитный момент всего стержня $P_{m,V} = J_0 Sl$ действительно равен произведению величины противоположных магнитных зарядов $\pm q_m$ на расстоянии между ними l.

Исторически сложилось так, что постоянные магниты были известны и их магнитные поля были изучены задолго до того, как было открыто магнитное поле тока и вскрыт механизм магнитных явлений. Поэтому долгое время вектор **H** рассматривался как основной и вся магнитостатика строилась аналогично электростатике. Используя длинные тонкие намагниченные стержни с удаленными противоположными полюсами, Кулон экспериментально определил, что их взаимодействие определяется законом

$$\mathbf{F} = k\frac{q_m q_m'}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{48.32}$$

аналогичным закону Кулона для электрических зарядов. Отсюда, далее, был определен вектор напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{F}}{q'_m} \qquad (48.33)$$

как сила, действующая на единичный магнитный полюс.

Лишь после открытия Эрстеда начало выясняться, что эта аналогия с электростатикой является чисто внешней. Если такая аналогия до некоторой степени и допустима, то аналогом вектора **E** в магнетизме является вектор **B**, а не **H**. Реальное электрическое поле, действующее на электрические заряды, есть поле **E**, а не введенное для удобства расчетов поле **D**. Точно так же поле **B** является реальным полем, действующим на токи, а поле **H** вводится для удобства расчетов.

Возвращаясь к рис. 3.92, *в*, на котором приведено для сравнения поле цилиндрического диэлектрика с зарядами $\pm q$ на основаниях, мы можем констатировать, что в этом случае:

1) вне вещества поля **B**(=**H**) и **E**(=**D**) по своей структуре тождественны;

2) внутри вещества реальные поля **B** и **E** совершенно различны, в частности направлены в противоположные стороны;

3) структура реального поля **E** совпадает со структурой вспомогательного поля **H**.

Подчеркнем, что реальные поля, действующие на заряды и токи, есть поля **E** и **B**, а поля **D** и **H** являются вспомогательными, вводимыми для удобства расчетов. Следует помнить, что вспомогательное поле **D** называется индукцией электрического поля и также индукцией магнитного поля **B** называется реальное магнитное поле.

В то же время вспомогательное поле **H** носит название напряженность магнитного поля, как и напряженность реального электрического поля **E**.

Эта досадная неувязка терминологии возникла исторически и связана со способом введения проницаемостей ε_a и μ_a: $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}=\mu_a\mathbf{H}$ (а следовало бы $\mathbf{D}=\varepsilon_a\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}=\varkappa_a\mathbf{B}$).

ГЛАВА XI

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 49. Ток смещения. Взаимосвязь электрического и магнитного полей

В главе IX при рассмотрении явления электромагнитной индукции было показано, что движущееся или изменяющееся со временем магнитное поле **B** порождает электрическое поле **E**. Теперь нам предстоит установить такую же связь между переменным во времени полем **E** и порождаемым этим полем магнитным полем **B**. На наличие подобной связи указывает рассмотренное нами в § 39 поле движущегося заряда. В этом и пятидесятом параграфах, как и в § 39, мы будем пользоваться гауссовой системой единиц.

Электрический заряд e, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, создает в точке M на расстоянии $\mathbf{r}$ электрическое поле

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{r}}{r^3} \qquad (49.1)$$

и магнитное поле (см. (39.7))

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right]=\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\frac{e\mathbf{r}}{r^3}\right]. \qquad (49.2)$$

В последнем выражении величина в скобках справа есть не что иное, как поле **E** точечного заряда e (49.1). Это позволяет переписать (49.2) в виде

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]. \qquad (49.3)$$

При движении заряда e связанное с ним электрическое поле **E** перемещается вместе с зарядом с той же скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathrm{E}}=\mathbf{v}. \qquad (49.4)$$

Отвлекаясь от «источника поля» e и рассматривая лишь поле в данной точке пространства M, мы на основании (49.3) приходим

к заключению, справедливому и в общем случае (а не только для поля, связанного с точечным зарядом e):

если в данной точке пространства имеется электрическое поле **E**, *перемещающееся со скоростью* $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}$, *то оно порождает в той же точке магнитное поле* **H**, *равное*

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\times\mathbf{E}]. \tag{49.5}$$

Выражение (49.5) не является самым общим. Изменение **E** со временем может состоять не только в перемещении **E** в пространстве, но, например, и в изменении со временем в е л и ч и н ы **E** в неподвижном поле.

Для установления общей связи между изменяющимся электрическим полем и порождаемым этим изменением магнитным полем проще всего рассмотреть случай однородного электрического поля между пластинами конденсатора, изменяющегося со временем при разрядке конденсатора. Пусть площадь пластин равна S. Заряды пластин равны $\pm q$ и поверхностная плотность электричества на левой (положительной) пластине

$$\sigma=\frac{q}{S}. \tag{49.6}$$

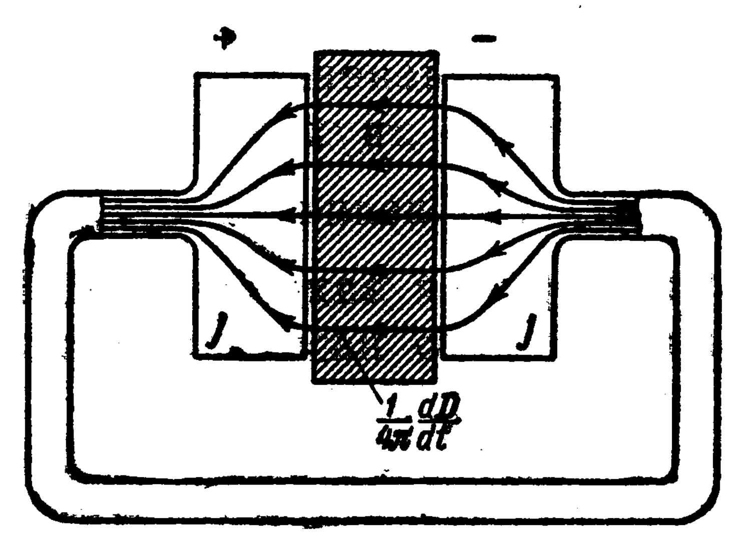


Рис. 3.94.

Пространство между пластинами заполнено диэлектриком. Электрическое поле внутри конденсатора однородно, и вектор электрической индукции **D** равен

$$D=4\pi\sigma. \tag{49.7}$$

Соединим обкладки конденсатора внешним проводником, как это показано на рис. 3.94. Тогда по проводнику пойдет ток i, и величина зарядов на пластинах начнет уменьшаться. По определению тока (14.1) имеем

$$i=\frac{dq}{dt}. \tag{49.8}$$

Так как ток идет против часовой стрелки, то мы должны считать его величину отрицательной. Это в соотношении (49.8) учитывается автоматически: так как при разряде конденсатора заряд его положительной (левой) пластины убывает, то $\frac{dq}{dt}<0$.

У границ пластин линии тока перпендикулярны к поверхности и плотность тока равна

$$j=\frac{i}{S}=\frac{1}{S}\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{S}\right)=\frac{d\sigma}{dt}. \tag{49.9}$$

Сопоставляя (49.9) с (49.7), можно написать

$$j=\frac{1}{4\pi}\frac{dD}{dt}. \qquad (49.10)$$

Вектор $\mathbf{j}$ направлен перпендикулярно к пластинам. Поскольку при разряде конденсатора электрическое поле в нем ослабевает, то вектор $\mathbf{D}$ убывает со временем, и его производная по времени $d\mathbf{D}/dt$ направлена противоположно вектору $\mathbf{D}$ и параллельна $\mathbf{j}$. Соотношение (49.10) на границе проводник — диэлектрик можно тогда записать в векторном виде

$$\mathbf{j}=\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{D}}{dt}. \qquad (49.11)$$

Левая часть этого равенства характеризует электрический ток в проводнике — ток проводимости. Правая же часть показывает скорость изменения электрического поля в диэлектрике. Равенство (49.11) этих двух векторов на границе металл — диэлектрик показывает, что величина $\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ как бы продолжает линии тока через диэлектрик и замыкает их. По предложению Максвелла эту величину принято называть плотностью тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}}=\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{D}}{dt}. \qquad (49.12)$$

Указанное название не лишено физического смысла. Подставляя в (49.12) вместо вектора $\mathbf{D}$ его значение из (11.5), получаем:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}}=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P})=\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{E}}{dt}+\frac{d\mathbf{P}}{dt}. \qquad (49.13)$$

Второе слагаемое (49.13) объясняет происхождение термина «ток смещения»: это — изменение поляризации диэлектрика со временем, связанное со смещениями его зарядов при изменении поля $\mathbf{E}$.

Если поместить диэлектрик в переменное электрическое поле высокой частоты, то составляющие диэлектрик электрические диполи, поворачиваясь за меняющимся полем, при своем движении сталкиваются с соседними атомами и молекулами и передают им свою энергию — диэлектрик разогревается. В технике этим пользуются, если хотят прогреть диэлектрик сразу по всей его толще.

Поскольку величина $d\mathbf{P}/dt$ представляет скорость смещения реальных зарядов в диэлектрике, то ей соответствует возникающее в окружающем пространстве магнитное поле, которое рассчитывает по закону Био — Савара — Лапласа как поле, порождаемое плотностью тока проводимости $\mathbf{j}_{\text{пров}}$.

Однако величина $d\mathbf{P}/dt$ есть лишь часть полного тока смещения (49.13), замыкающего переменный ток i в контуре. Более того, в отсутствие диэлектрика, когда между пластинами конденсатора

находится вакуум, $\mathbf{P}=0$ и $d\mathbf{P}/dt=0$. Следовательно, в вакууме плотность тока смещения равна

$$\mathbf{j}_{\text{смещ. вак}}=\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathbf{E}}{dt}. \qquad (49.14)$$

Максвелл предположил, что этот ток смещения не есть чисто формальное понятие, а что он создает вокруг себя магнитное поле по тем же законам, как токи $d\mathbf{P}/dt$ и $\mathbf{j}_{\text{пров}}$. Многочисленные опыты подтвердили это предположение. Действительно, любое переменное электрическое поле порождает магнитное поле, которое может быть рассчитано из (49.12) по закону Био — Савара — Лапласа.

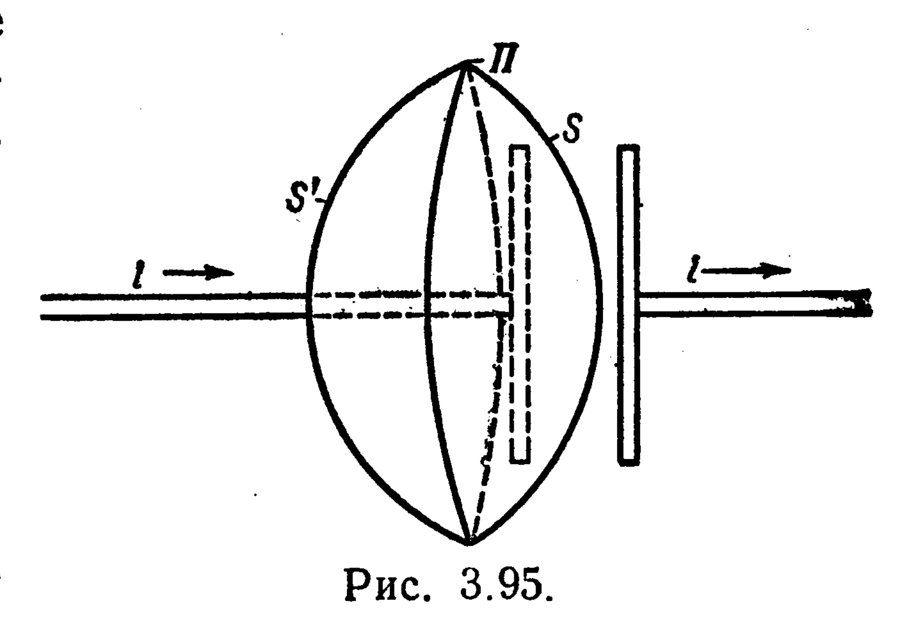


Рис. 3.95.

Из рассмотренного примера вытекает одно очень важное следствие: конденсатор в цепи переменного тока не разрывает цепь; переменный ток, идущий по проводам, проходит через конденсатор в виде тока смещения, т. е. изменения электрического поля конденсатора. Другими словами, конденсатор в цепи переменного тока не прерывает его, так как на пластинах конденсатора меняются заряды, а вместе с ними меняется и электрическое поле в конденсаторе.

Рассмотрим теперь общий случай неоднородного переменного электрического поля. Выделим в той области пространства, где нет движущихся свободных зарядов, произвольный замкнутый контур П. Для нахождения полного тока смещения, пронизывающего этот контур, мы должны построить какую-либо поверхность S' или S, опирающуюся на контур П (рис. 3.95), и просуммировать токи, текущие через отдельные элементарные площадки (через S' — токи проводимости, через S — токи смещения):

$$i_{\text{смещ}}=\int\limits_{(S)} j_{\text{смещ}}\,dS=\int\limits_{(S)}\frac{1}{4\pi}\frac{dD_n}{dt}\,dS=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_{(S)} D_n dS. \qquad (49.15)$$

Интеграл

$$N=\int\limits_{(S)} D_n dS \qquad (49.16)$$

представляет собой поток вектора $\mathbf{D}$ через поверхность S и контур П. Следовательно,

$$i_{\text{смещ}}=\frac{1}{4\pi}\frac{dN}{dt}. \qquad (49.17)$$

Для нахождения магнитного поля **H**, создаваемого этим током смещения, воспользуемся теоремой о циркуляции (33.11). Результат этот не зависит от выбора между S' и S, т. е. учета токов проводимости или смещения:

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} i = \frac{1}{c} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int D_n dS. \qquad (49.18)$$

Это соотношение аналогично закону электромагнитной индукции (41.11), который может быть записан в виде

$$\oint E_l dl = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int B_n dS. \qquad (49.19)$$

Соотношение (49.19) утверждает, что при изменении вектора магнитной индукции **B** и потока этого вектора Φ со временем вокруг вектора $d\mathbf{B}/dt$ возникает в и х р е в о е электрическое поле **E**, линии которого направлены по л е в о м у в и н т у, как показано на рис. 3.96, *а*. *Переменное магнитное поле порождает электрическое поле.*

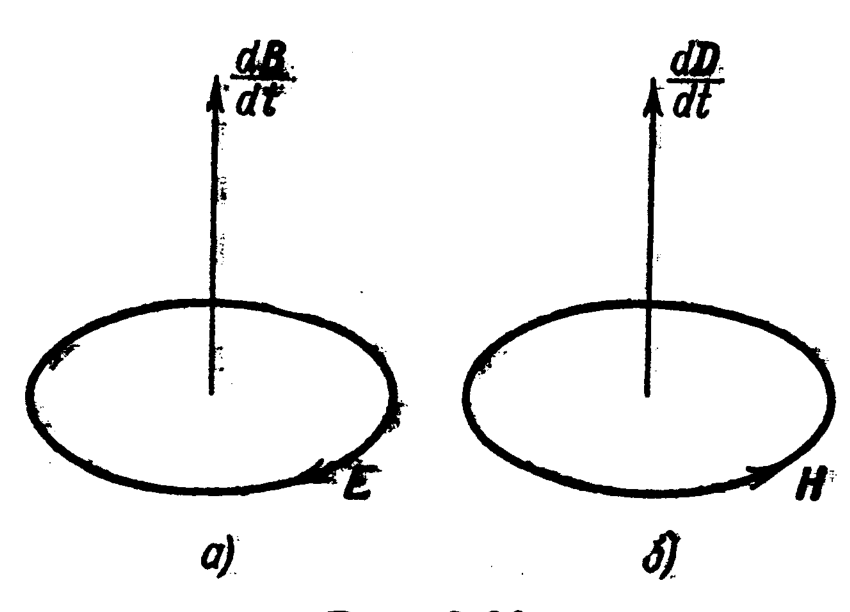


Рис. 3.96.

Соотношение (49.18) утверждает, что аналогичным образом при изменении вектора электростатической индукции **D** и потока этого вектора N со временем вокруг вектора $d\mathbf{D}/dt$ возникает вихревое магнитное поле, линии которого направлены по п р а в о м у в и н т у, как показано на рис. 3.96, *б*. *Переменное электрическое поле порождает магнитное поле.*

В силу этого переменные электромагнитные поля могут, взаимно порождаясь, существовать независимо от зарядов и токов. Такими полями, порожденными зарядами и токами, но распространяющимися затем в пространстве независимо от этих последних, являются радиоволны, свет, рентгеновы лучи, гамма-излучение атомных ядер.

В следующем параграфе мы рассмотрим законы распространения таких свободных электромагнитных полей в вакууме, в отсутствие зарядов и токов, и покажем, что скорость их распространения равна входящей в формулы (49.18) и (49.19) постоянной c — скорости света в вакууме.

§ 50. Скорость распространения электромагнитных полей

Рассматривавшиеся в предыдущих главах электромагнитные поля были в основном связаны с их источниками. Электростатические поля (главы I—III) были связаны с зарядами, магнитостатические (главы VII, VIII, X)—с токами. Эти поля могли перемещаться вместе со всеми источниками, не отрываясь от них. В главе IX и в § 49 настоящей главы мы установили, что с движущимся магнитным полем связано электрическое поле, а с движущимся электрическим полем—магнитное поле. Уравнения, выражающие взаимосвязь движущихся полей **E** и **B**, представлены формулами (49.18) и (49.19); однако для дальнейшего интегральное выражение этой взаимосвязи неудобно. Следует получить выражения, связывающие поля **E** и **B** и скорость их перемещения **v** в любой точке пространства.

Одно такое выражение мы получили в § 41 при выводе индуктированного электрического поля **E**′ из лоренцовой силы. Если магнитное поле **B** движется со скоростью $\mathbf{v}_B$ относительно неподвижного заряда, помещенного в данную точку, то оно создает в этой точке индуктированное электрическое поле, равное согласно (41.20)

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_B \times \mathbf{B}]. \qquad (50.1)$$

Ограничимся сначала случаем распространения полей в вакууме, т. е. положим $\varepsilon = \mu = 1$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Тогда

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_H \times \mathbf{H}]. \qquad (50.2)$$

Далее, согласно (49.5) электрическое поле **E**, движущееся со скоростью $\mathbf{v}_E$, порождает в данной точке магнитное поле

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_E \times \mathbf{E}]. \qquad (50.3)$$

В соотношениях (50.2) и (50.3) источники полей присутствуют, так сказать, косвенно: скорость $\mathbf{v}_H$ поля **H** есть скорость порождающих это поле токов, а $\mathbf{v}_E$ есть скорость заряда—источника поля **E**.

Поставим теперь следующий вопрос. Не могут ли поля **E**′ и **H**′ взаимно порождаться и, следовательно, существовать и двигаться независимо от полей **E** и **H**, связанных с зарядами и токами?

Предположим, что такое электромагнитное поле возможно. Тогда скорость перемещения обоих взаимосвязанных полей должна быть одной и той же:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_H = \mathbf{v}. \qquad (50.4)$$

В уравнении (50.2) магнитное поле, связанное с токами, надо заменить полем $\mathbf{H}'$, а в (50.3) поле $\mathbf{E}$ — полем $\mathbf{E}'$. Мы получим, таким образом, два уравнения, связывающих взаимно порождаемые поля $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$:

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}'] = \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\times\mathbf{v}] \tag{50.5}$$

и

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}']. \tag{50.6}$$

Поскольку вектор, выражаемый векторным произведением, всегда перпендикулярен к обоим перемножаемым векторам, то из (50.5) и (50.6) следует, что векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ перпендикулярны друг к другу и к вектору $\mathbf{v}$, указывающему направление распространения этих полей. Далее, из знаков векторных произведений следует, что все три вектора образуют правовинтовую систему в порядке расположения $\mathbf{E}' \to \mathbf{H}' \to \mathbf{v}$, как это изображено на рис. 3.97.

Из взаимной перпендикулярности этих векторов следуют соотношения для синусов углов между ними:

$$\sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{E}'}) = \sin(\widehat{\mathbf{H}', \mathbf{v}}) = \sin\frac{\pi}{2} = +1, \tag{50.7}$$

что дает для абсолютных значений векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$, определяемых из (50.5) и (50.6), значения

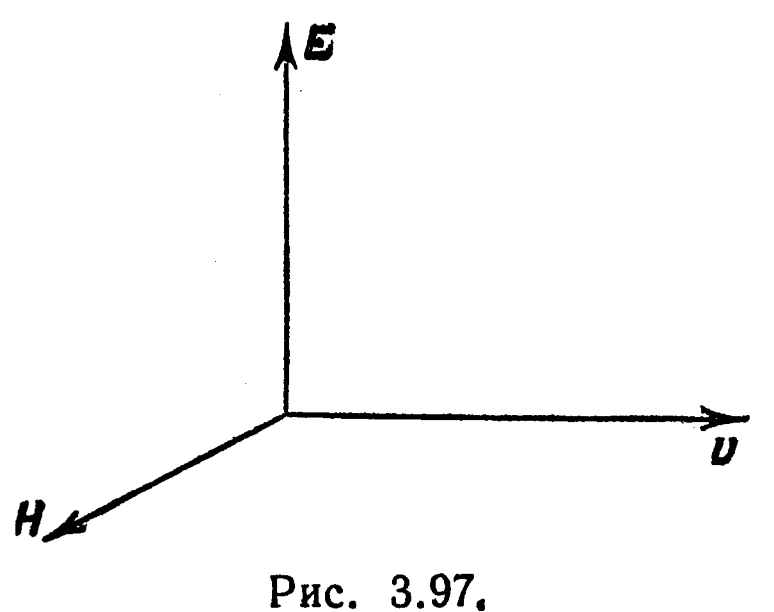


Рис. 3.97.

$$E' = \frac{1}{c}H'v \tag{50.8}$$

и

$$H' = \frac{1}{c}vE'. \tag{50.9}$$

Подставляя H' из (50.9) в (50.8) и сокращая на E', находим, что $\frac{v^2}{c^2} = 1$, или

$$v = c \tag{50.10}$$

(направление $\mathbf{v}$ было уже определено, см. рис. 3.97).

Таким образом, мы доказали, что *величина скорости распространения свободного* (не связанного с зарядами и токами) *электромагнитного поля, называемого полем излучения, равна скорости света в вакууме $c = 3\cdot 10^{10}$ см/сек*. Этот результат позволил Максвеллу высказать предположение о том, что свет есть частный случай распространяющегося электромагнитного поля.

Отметим еще две важные особенности поля излучения. Из рис. 3.97 видно, что

$$\mathbf{E}' \perp \mathbf{v} \text{ и } \mathbf{H}' \perp \mathbf{v}, \tag{50.11}$$

т. е. векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ всегда расположены поперек направления распространения. Это значит, что *электромагнитное поле излучения поперечно.*

Подставляя значение v в (50.8) или в (50.9) из (50.10), получаем

$$E' = H', \tag{50.12}$$

т. е. *в каждой точке поля излучения напряженности электрического и магнитного полей по величине равны друг другу.* Естественно, что это соотношение выполняется лишь в гауссовой системе единиц, в которой размерности E и H одинаковы.

Для поля излучения, распространяющегося в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ, скорость распространения излучения $v_д$ будет иной и соотношения величин $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ (50.5) и (50.6) заменятся соответственно на

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}_д \times \mathbf{B}'] = -\frac{\mu}{c}[\mathbf{v}_д \times \mathbf{H}'] \tag{50.13}$$

и

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c}[\mathbf{v}_д \times \mathbf{D}'] = \frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{v}_д \times \mathbf{E}']. \tag{50.14}$$

Взаимная ориентация векторов $\mathbf{E}'(\mathbf{D}')$, $\mathbf{H}'(\mathbf{B}')$ и $\mathbf{v}_д$ останется, следовательно, такой же, как и в вакууме. Останется в силе и вывод о поперечности электромагнитного поля. Используя значения синусов (50.11), получаем для величин векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ из (50.13) и (50.14)

$$E' = \frac{\mu v_д}{c} H' \tag{50.15}$$

и

$$H' = \frac{\varepsilon v_д}{c} E'. \tag{50.16}$$

Подставляя значение E' из (50.15) в (50.16) и сокращая на H', находим

$$\frac{\varepsilon\mu v_д^2}{c^2} = 1,$$

откуда

$$v_д = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{50.17}$$

В диэлектриках величина ε всегда больше единицы. Величина μ в парамагнитных и ферромагнитных телах также больше единицы, так что

$$\varepsilon\mu > 1; \qquad (50.18)$$

для диамагнитных тел величина μ может быть меньше единицы, однако, настолько мало отличаясь от нее, что неравенство (50.18) остается в силе. Таким образом, *скорость распространения электромагнитного поля в веществе всегда меньше, чем в вакууме.*

Подставляя выражение для скорости (50.17) в (50.15) или (50.16), находим, что при наличии среды соотношение между величинами напряженности электрического и магнитного полей принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon}E' &= \sqrt{\mu}H' \\ \text{или} \qquad \varepsilon E'^2 &= \mu H'^2. \end{aligned}\right\} \qquad (50.19)$$

Плотность энергии электромагнитного поля излучения, в соответствии с (45.14) и при учете (50.19), может быть представлена одним из нескольких эквивалентных выражений:

$$W_0 = W_{0,\,\text{эл}} + W_{0,\,\text{магн}} = \frac{\varepsilon E'^2 + \mu H'^2}{8\pi} = \\ = \frac{\varepsilon E'^2}{4\pi} = \frac{\mu H'^2}{4\pi} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}E'H'}{4\pi}\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}. \qquad (50.20)$$

Перемещаясь в пространстве со скоростью $v_\text{д} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, электромагнитное поле переносит с собой эту энергию. Поток энергии можно характеризовать введенным в томе I (гл. XV, § 61) вектором Умова

$$\mathbf{S} = W_0 \mathbf{v}_\text{д}, \qquad (50.21)$$

величина которого, в соответствии с (50.20) и (50.17), равна

$$S = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}E'H'}{4\pi}\,\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{4\pi}E'H'\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\,\text{сек}}. \qquad (50.22)$$

Вектор $\mathbf{S}$ (как и $\mathbf{v}$) параллелен векторному произведению $[\mathbf{E}' \times \mathbf{H}']$. Поскольку $\mathbf{E}' \perp \mathbf{H}'$, то

$$|[\mathbf{E}' \times \mathbf{H}']| = E'H',$$

и окончательное выражение для вектора плотности потока энергии примет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}' \times \mathbf{H}']. \qquad (50.23)$$

Это выражение для электромагнитного поля излучения было выведено Пойнтингом.

Движущееся электромагнитное поле переносит с собой энергию, плотность которой $W_{0.\,\text{эл.-магн}}$ определяется соотношением (50.20). Согласно теории относительности это поле обладает массой, которая (см. т. I, § 9) распределена в пространстве с плотностью

$$\varrho = \frac{W_0}{c^2} \frac{г}{см^3}. \qquad (50.24)$$

Наличие массы, а следовательно, и количества движения у электромагнитного поля проявляется, например, при «столкновении» его с телами, т. е. при отражении и рассеянии излучений. Наличие этих качеств у поля излучения приводит к существованию светового давления, предсказанного впервые Максвеллом и обнаруженного экспериментально Лебедевым.

В отличие от других форм материи поле излучения не может находиться в состоянии покоя. Оно всегда движется, причем скорость его в пустоте может принимать по величине лишь одно значение, именно c. *Эта скорость одна и та же во всех системах отсчета, независимо от их относительного движения.* Опытный факт, показывающий, что к движению поля излучения закон сложения скоростей не применим, лежит в основе теории относительности (см. т. III, гл. VIII).

В остальном полю излучения присущи такие же атрибуты, как и другим видам материи: оно обладает энергией, массой, количеством движения. В этом томе мы рассматриваем его как *непрерывную* материальную субстанцию. В томе III будет показано, что такое рассмотрение является лишь приближением к истинной картине поля и что многие величины, характеризующие поле, меняются не непрерывно, а скачкообразно (см. т. III, гл. X).

Следует отметить, что в соотношениях (50.13)—(50.20) величины ε и μ можно принимать постоянными и равными их значениям для статических полей **E** и **B** лишь в тех случаях, когда поле излучения медленно меняется со временем (в случае периодических полей — для полей малой частоты). Действительно, ε и μ характеризуют смещения зарядов ($\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}$) и ориентацию магнитных диполей ($\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$) вещества под действием внешнего поля. Эти процессы происходят не мгновенно, но требуют некоторого времени для своего установления.

В переменных полях $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ вследствие инерции движущихся зарядов изменения поляризации **P** и намагничения **J** будут отставать от изменения полей и степень этого отставания будет существенно зависеть от частоты изменения $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$. Величины ε и μ являются довольно сложными функциями частоты электромагнитного поля излучения. К этому вопросу мы еще вернемся в томе III при анализе взаимодействия света с веществом и, в частности, при

рассмотрении явления, называемого дисперсией света, т. е. зависимости скорости его распространения $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ от частоты.

Переменное электромагнитное поле отражается от поверхности металла. Если оно меняется во времени не слишком быстро, то под его влиянием электроны на поверхности металла перемещаются так, что напряженность электрического поля внутри металла оказывается равной нулю. Но если внутри металла электрическое поле $\mathbf{E}'$ равно нулю, то равно нулю и связанное с ним магнитное поле $\mathbf{H}'$. Из закона сохранения энергии следует, что энергия падающего на металл поля излучения не может исчезнуть. Часть энергии излучения (обычно малая) переходит в джоулево тепло, которое выделяется токами, вызванными на поверхности металла полем излучения. Бóльшая же часть энергии излучения покидает поверхность металла с отраженным излучением.

Формально мы можем рассматривать металл как диэлектрик, в котором заряды могут смещаться сколь угодно далеко, т. е. как диэлектрик с бесконечно большой поляризуемостью, и положить

$$\varepsilon_{\text{мет}} = \infty. \tag{50.25}$$

Подставляя это значение ε в выражение для скорости распространения излучения в веществе (50.17), найдем

$$v_{\text{мет}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\infty}} = 0. \tag{50.26}$$

Для распространения электромагнитного поля излучения внутри металла следует сделать те же оговорки, что и для диэлектрика. При очень большой частоте изменения поля, соответствующей частоте колебаний рентгеновых лучей и γ-лучей радиоактивных веществ, свободные электроны не успеют сколько-нибудь заметно сместиться за время, пока колеблющееся поле $\mathbf{E}'$ изменит свое направление на противоположное. Для таких частот даже в металле $\varepsilon \to 1$, и такое излучение должно распространяться в металле так же, как излучение более низкой частоты распространяется в диэлектрике. Действительно, рентгеновы лучи пронизывают большие толщи диэлектриков и металлов, распространяясь в них со скоростью, близкой к скорости c распространения света в вакууме.

Внутри замкнутой металлической полости электромагнитное поле излучения может существовать в виде стоячих волн, наподобие стоячих волн воздуха в акустических резонаторах (см. том I, § 59). Как и акустические волны, стоячие электромагнитные волны могут обладать дискретным спектром возможных частот (длин волн). Наибольшая возможная длина волны (наименьшая возможная частота) определяется из условия, чтобы между стенками полости резонатора укладывалась половина волны. Обозначая расстояние между

стенками через l, имеем

$$\left.\begin{aligned} l&=\frac{\lambda}{2},\\ \nu&=\frac{1}{T}=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{2l}. \end{aligned}\right\} \qquad (50.27)$$

Полые металлические резонаторы, в которых возбуждаются стоячие электромагнитные волны (см. § 52), сейчас широко применяются в ультракоротковолновой (деци- и сантиметровой) радиотехнике (радиолокация, телевидение, радиоспектроскопия, ускорители заряженных частиц и т. д.).

§ 51. Колебательный контур

Как мы видели в начале предыдущего параграфа, электромагнитное поле излучения **E**′ и **H**′ создается полями **E** и **H**, связанными с движущимися зарядами и токами. Поля **E** и **H** очень быстро убывают с удалением от их источников, по крайней мере обратно пропорционально квадрату расстояния (законы Кулона и Био — Савара — Лапласа). Индуктированные же поля **E**′ и **H**′ и на больших расстояниях от источника взаимно порождаются и полностью отрываются от первоначально породивших их зарядов и токов.

Таким образом, любой ускоренно движущийся заряд или изменяющийся ток порождает распространяющееся от него во все стороны электромагнитное поле излучения. Огромное значение и многочисленные практические применения этого излучения (радиоволны, свет, рентгеновы лучи и т. д.) требуют создания таких излучающих систем, в которых поддерживалось бы длительное переменное движение зарядов и токов, а значит, длительное излучение электромагнитных волн. Простейшей такой системой является электрический колебательный контур.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L. Пусть вначале цепь разомкнута, а на обкладках конденсатора находятся заряды $\pm q_0$. При этом контур будет обладать энергией W, равной энергии заряженного конденсатора $W_{эл}$ (см. (13.5)):

$$W=W_{эл}=\frac{q_0^2}{2C}, \qquad (51.1)$$

которая локализована в электрическом поле конденсатора (рис. 3.98, *а*). Положим для простоты, что сопротивление контура пренебрежимо мало, так что можно считать $R\approx 0$.

Замкнем контур ключом K. Конденсатор начнет разряжаться, но ток в контуре будет нарастать лишь постепенно вследствие

«электрической инертности» катушки. По мере уменьшения заряда на обкладках конденсатора его энергия будет убывать. Так как $R=0$ и других возможностей потери энергии здесь нет *), энергия контура меняться не должна. Убыль энергии электрического поля конденсатора в точности возмещается увеличением энергии возникающего и растущего магнитного поля катушки (рис. 3.98, *б*). В тот момент, когда конденсатор полностью разрядится, ток в контуре будет максимальным. Вслед за этим конденсатор начнет перезаряжаться, и ток начнет убывать, но постепенно, в силу той же инертности катушки.

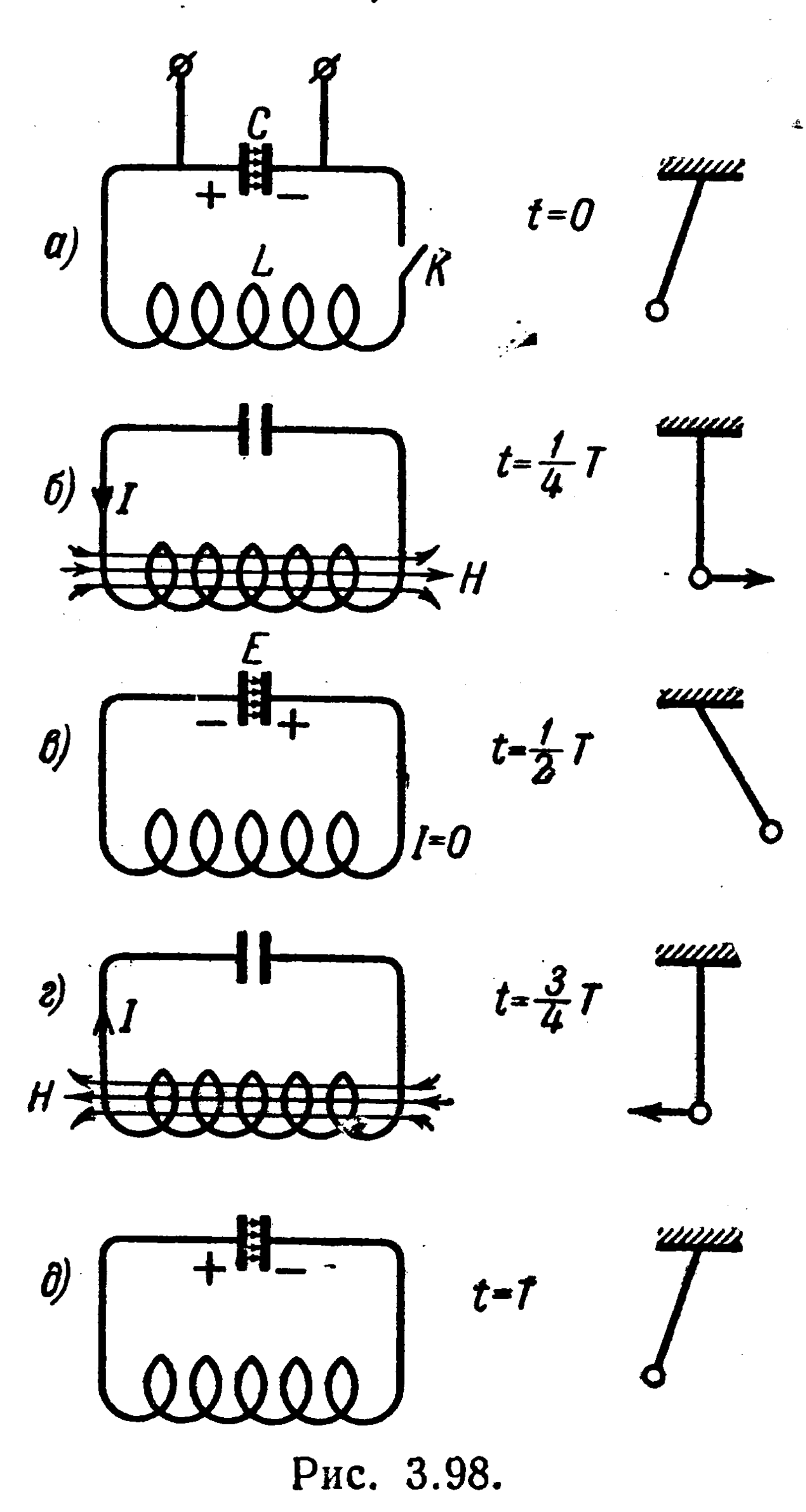


Рис. 3.98.

Максимальный ток $i_{\text{макс}}$ легко вычислить, исходя из закона сохранения энергии. В тот момент, когда $q=0$, энергия $W_{\text{эл}}=0$ и вся сосредоточена в магнитном поле катушки. Следовательно, согласно (45.5)

$$W=W_{\text{магн}}=\frac{k'^2 L i_{\text{макс}}^2}{2}=\frac{q_0^2}{2C}, \quad (51.2)$$

откуда

$$i_{\text{макс}}=\frac{q_0}{\sqrt{k'^2 LC}} \quad (51.3)$$

Когда ток прекратится, $W_{\text{магн}}$ обратится в нуль и $W_{\text{эл}}$ примет прежнее значение — заряды на обкладках конденсатора достигнут прежней величины и лишь поменяются знаками. Затем возникнет ток обратного направления, конденсатор снова перезарядится, и весь процесс будет повторяться (рис. 3.98, *в* — *д*). Таким образом, в контуре возникнут электрические колебания заряда—тока. Поэтому цепь, представленную на рис. 3.98, называют **колебательным контуром**.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с колебаниями материальной точки под действием квазиупругой силы (см. рис. 3.98, справа). Как было показано в т. I, § 52, в этом случае происходит непрерывный переход потенциальной

*) Вопрос о потере энергии, связанной с излучением, будет рассмотрен в § 53.

энергии материальной точки, $E_{\text{пот}}=\varkappa x^2/2$ *), в кинетическую, $E_{\text{кин}}=mv^2/2$, и обратно. Сопоставление $W_{\text{эл}}=q_0^2/2C$ и $E_{\text{пот}}=\varkappa x^2/2$ и $W_{\text{магн}}=k'^2Li^2/2$ с $E_{\text{кин}}=mv^2/2$, произведенное на рисунке 3.98, наталкивает на предположение, что и электрические колебания в контуре должны происходить по гармоническому закону. Убедимся в правильности этого предположения, а заодно определим частоту колебаний заряда и тока в контуре с емкостью C и индуктивностью L.

В начальный момент времени, при $t=0$, заряд на обкладках конденсатора равен $\pm q_0$; замыкание контура ключом приводит к возникновению тока i, который вызовет в катушке э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}}=-k'^2L\frac{di}{dt}. \tag{51.4}$$

По второму правилу Кирхгофа (см. § 17) сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна сумме действующих в этом контуре э. д. с. В данном случае падение напряжения на сопротивлении отсутствует, так как $R=0$, и остается лишь падение напряжения U между обкладками конденсатора

$$U=\frac{q}{C}. \tag{51.5}$$

Единственной э. д. с. в контуре будет $\mathscr{E}_{\text{инд}}$. Следовательно, уравнение Кирхгофа для контура примет вид

$$U=\mathscr{E}_{\text{инд}}. \tag{51.6}$$

Подставляя (51.4) и (51.5) в (51.6), находим

$$\frac{q}{C}=-k'^2L\frac{di}{dt}. \tag{51.7}$$

Но

$$i=\frac{dq}{dt}, \tag{51.8}$$

следовательно,

$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{51.9}$$

Подставляя (51.9) в (51.7), получаем дифференциальное уравнение, которому подчиняется изменение заряда q в колебательном контуре:

$$k'^2L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0. \tag{51.10}$$

*) Коэффициент жесткости здесь для избежания путаницы обозначен не k, как в т. I, а $\varkappa$.

Уравнение гармонических колебаний материальной точки массы m под действием квазиупругой силы с коэффициентом жесткости $\varkappa$ (том I, формула (54.3)) имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\varkappa x=0. \tag{51.11}$$

Сравнивая (51.10) и (51.11), видим, что эти уравнения имеют одинаковый вид. Поэтому и решения этих уравнений должны совпадать по форме. Нужно лишь в известном решении уравнения (51.11) заменить m на k'^2L, а $\varkappa$ на $\frac{1}{C}$. Это означает, что если материальная точка с массой m под действием квазиупругой силы $-\varkappa x$ совершает гармонические колебания, т. е. координата x точки меняется со временем по синусоидальному закону с частотой $\omega_0=\sqrt{\varkappa/m}$ (том I, формула (51.6)), то и величина заряда q будет меняться со временем по такому же закону с частотой

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{k'^2LC}}=\frac{1}{k'\sqrt{LC}} \tag{51.12}$$

и периодом

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi k'\sqrt{LC}. \tag{51.13}$$

Решение уравнения (51.10) можно, следовательно, записать в виде

$$q=a\cos(\omega_0t+\varphi)=a\cos\left(\frac{t}{k'\sqrt{LC}}+\varphi\right), \tag{51.14}$$

что легко проверить прямой подстановкой (51.14) в (51.10). Внося q в (51.8), находим, что ток в контуре также меняется по гармоническому закону:

$$i=\frac{dq}{dt}=-\frac{a}{k'\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{k'\sqrt{LC}}+\varphi\right), \tag{51.15}$$

но отстает от заряда по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$-\sin(\omega_0t+\varphi)=\cos\left(\omega_0t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

так что (51.15) можно переписать в виде

$$i=\frac{a}{k'\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{k'\sqrt{LC}}+\varphi-\frac{\pi}{2}\right). \tag{51.16}$$

Значения постоянных a и φ определяются из начальных условий. В нашем случае эти условия гласят: при $t=0$ $q=q_0$ и $i=0$;

полагая в (51.14) и (51.15) $t=0$, получаем

$$q_0 = a\cos\varphi, \tag{51.17}$$

$$0 = -\frac{a}{k'\sqrt{LC}}\sin\varphi. \tag{51.18}$$

Так как $a \neq 0$, то $\sin\varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$ (одно из возможных значений, так как φ определяется с точностью до величины, кратной 2π). Подставляя это значение φ в (51.17), находим $a = q_0$.

Таким образом, при данных начальных условиях имеем

$$q = q_0\cos\frac{t}{k'\sqrt{LC}}, \tag{51.19}$$

$$i = \frac{q_0}{k'\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{k'\sqrt{LC}} - \frac{\pi}{2}\right). \tag{51.20}$$

(Отметим, что амплитуда тока в (51.20) действительно совпадает с полученной в (51.3) из закона сохранения энергии.)

Возвращаясь к уравнениям (51.10) и (51.11), заметим, что индуктивность L играет в рассматриваемой электрической системе роль массы m колеблющейся точки, а величина, обратная емкости, $1/C$ — роль коэффициента жесткости $\varkappa$. То обстоятельство, что индуктивность в контуре сообщает ему «электрическую инертность», т. е. играет такую же роль, какую играет масса в механике, уже обсуждалось. Аналогию $\varkappa$ и $1/C$ также легко понять физически.

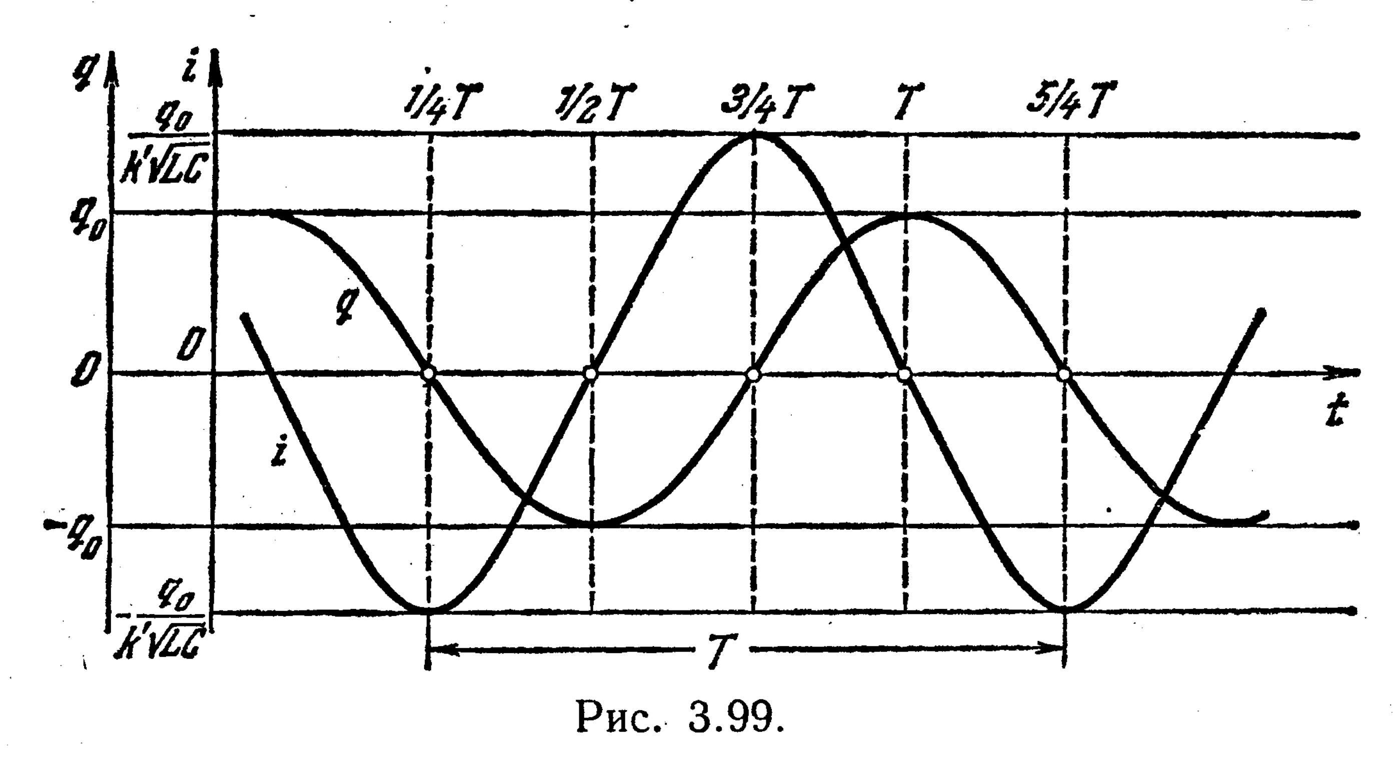


Рис. 3.99.

Чем больше $\varkappa$, тем больше меняется сила, действующая на материальную точку, при изменении ее координаты на Δx. Аналогично, чем больше $1/C$, т. е. чем меньше емкость конденсатора, тем больше меняется его «электрическая сила» — падение напряжения на обкладках при изменении его заряда на Δq.

Итак, математическое решение задачи об электрических колебаниях в контуре с емкостью и индуктивностью известно; рассмотрим физически происходящие в контуре явления. Для этого удобно воспользоваться графиками функций q и i, показанными на рис. 3.99.

Заметим, во-первых, что разность потенциалов между двумя любыми точками колебательного контура равна нулю, так как его омическое сопротивление принято равным нулю. Это означает, что э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ между любыми двумя точками контура все время по величине равна падению напряжения U на обкладках конденсатора и противоположна ему по знаку. Но U обусловлено наличием заряда q на обкладках конденсатора, в то время как $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ катушки обусловлена изменением тока в контуре, т. е. величиной di/dt.

В те моменты, когда конденсатор полностью разряжается, $q=0$ и $U=0$, значит, должна обратиться в нуль и $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, т. е. di/dt. В эти моменты ток i должен достигать экстремального значения — максимума или минимума. Это и имеет место, как видно из рис. 3.99 (при $t={}^1/_4T$, ${}^3/_4T$, ${}^5/_4T$ и т. д.).

В начальный момент $t=0$, $q=q_0$ и $i=0$. Величина U, а значит, и di/dt имеют максимальное значение. Ток начинает течь, и заряд на пластинах уменьшается. В момент $t={}^1/_4T$ $U=0$, $q=0$, а ток, будучи отрицательным по величине, достигает амплитудного значения $i_{\text{макс}}=q_0/k'\sqrt{LC}$.

«Инертность» индуктивности мешает конденсатору разрядиться мгновенно: ток возрастает постепенно, пока действует ускоряющая «электрическая сила» U конденсатора. Та же инертность мешает току прекратиться в тот момент, когда U становится равным нулю.

Как видно из 3.99, после момента $t={}^1/_4T$ заряд q, а следовательно, и U меняют знаки. Ток, поддерживаемый индуктивностью, идет теперь против тормозящего напряжения, все уменьшаясь по модулю. К моменту $t={}^1/_2T$ ток прекращается, а q (и U) достигает наибольшего по величине отрицательного значения. Затем процесс повторяется, но при обратных знаках всех величин: q, i, U, $\mathscr{E}_{\text{инд}}$; полный цикл завершается к моменту $t=T$ и повторяется снова. Таким образом, в колебательном контуре, состоящем из индуктивности L и емкости C, при отсутствии сопротивления, $R=0$, будут происходить гармонические (незатухающие) колебания заряда и тока с круговой частотой $\omega_0=1/k'\sqrt{LC}$ и сдвигом фазы $\pi/2$.

Найдем баланс энергии колебательного контура. Энергия конденсатора емкостью C с зарядом q равна

$$W_{\text{эл}}=\frac{q^2}{2C}. \qquad (13.5)$$

Энергия катушки индуктивностью L с током i равна

$$W_{\text{магн}}=k'^2\frac{Li^2}{2}. \qquad (45.9)$$

Подставляя сюда значения q и i из (51.19) и (51.20) и складывая, находим полную энергию контура и убеждаемся в ее постоянстве:

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{магн}} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{q_0^2}{2C}\cos^2\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{q_0^2}{2C}\left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right] = \frac{q_0^2}{2C} = \text{const}. \quad (51.21)$$

В моменты $t = 0$, $^1/_2 T$, T, $^3/_2 T$, ... вся энергия контура локализована в электрическом поле конденсатора. В моменты времени $t = {}^1/_4 T$, $^3/_4 T$, $^5/_4 T$, ... вся энергия контура локализована в магнитном поле индуктивности.

Рассмотрим теперь реальный контур с конечным сопротивлением R. Применяя правило Кирхгофа для этого случая, имеем

$$Ri + U = \mathscr{E}_{\text{инд}}. \quad (51.22)$$

Выражая все входящие в (51.22) величины через q, как это было сделано раньше (см. (51.2)—(51.5)), получим

$$k'^2 L \frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (51.23)$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению колебаний под действием квазиупругой силы и силы трения (т. I, формула (54.6)):

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \varkappa x = 0. \quad (51.24)$$

Роль коэффициента трения r играет здесь электрическое сопротивление R. В результате трения в механической системе часть ее энергии переходит в тепло, так что колебания затухают. Наличие сопротивления R в контуре также приводит к тому, что электрическая энергия тратится на выделение тепла (по закону Джоуля — Ленца), в силу чего электрические колебания должны затухать.

Мы получим решение (51.23), заменив в решении уравнения (51.24) (см. т. I, формулу (54.7)) m на $k'^2 L$, r на R и $\varkappa$ на $1/C$. Учитывая начальные условия (при $t = 0$): $q = q_0$ и $i = \frac{dq}{dt} = 0$, найдем

$$q = \frac{q_0}{\omega k' \sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2k'^2 L} t} \cos(\omega t - \varphi), \quad (51.25)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{k'^2 LC} - \frac{R^2}{4k'^4 L^2}} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{R}{2k'^2 L}, \quad (51.26)$$

что можно проверить прямой подстановкой в (51.23). Дифференцируя (51.25) по t, находим ток в контуре

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{q_0}{\omega k'\sqrt{LC}}e^{-\frac{R}{2k'^2L}t}\left\{\omega\sin(\omega t-\varphi)+\frac{R}{2k'^2L}\cos(\omega t-\varphi)\right\}.$$

Преобразуя с помощью известных тригонометрических формул скобки в выражении для i, получаем

$$i=-\frac{q_0}{\omega k'^2LC}e^{-\frac{R}{2k'^2L}t}\sin\omega t=\frac{q_0}{\omega k'^2LC}e^{-\frac{R}{2k'^2L}t}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right). \quad (51.27)$$

Как и в случае механических колебаний, сопротивление R приводит к затуханию электрических колебаний и к уменьшению их частоты. Кроме того, меняется на φ сдвиг фазы между током и зарядом.

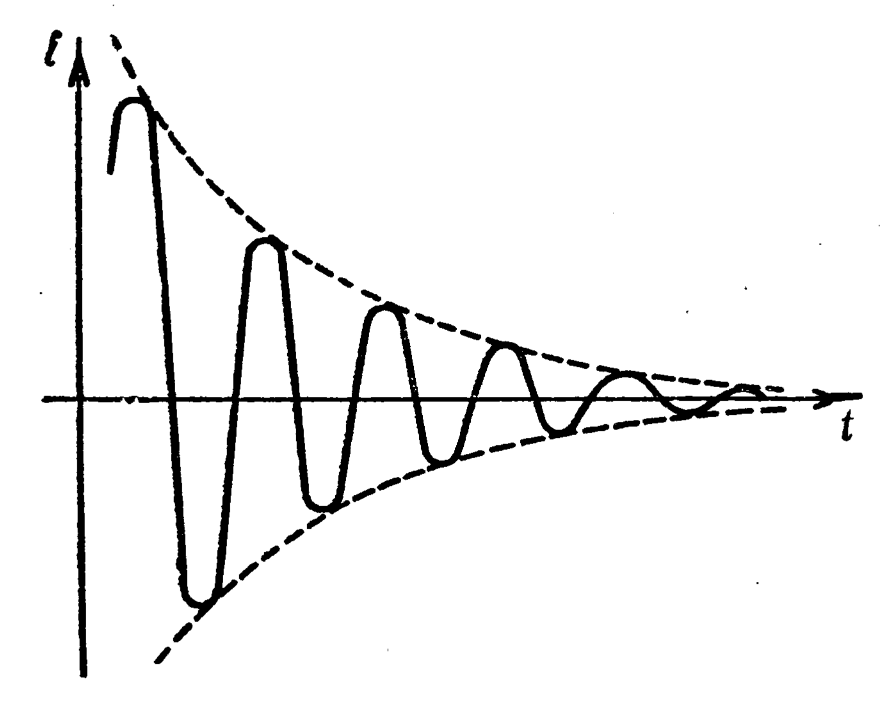


Рис. 3.100.

При малом сопротивлении R, когда

$$\frac{R}{2k'^2L}\ll\frac{1}{\sqrt{k'^2LC}}=\omega_0,$$

т. е.

$$R\ll 2k'\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (51.28а)$$

изменения сдвига фазы и собственной частоты незначительны. Приближенно

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{k'^2LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{4k'^2L}}\approx\frac{1}{k'\sqrt{LC}}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{R^2C}{4k'^2L}\right\},$$

или

$$\omega\approx\omega_0\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2k'^2L\omega_0}\right)^2\right\}. \quad (51.29)$$

Этот случай изображен на рис. 3.100.

При

$$\frac{R}{2k'^2L}\longrightarrow\frac{1}{k'\sqrt{LC}} \quad (51.28б)$$

частота ω стремится к нулю, а период собственных колебаний $T=2\pi/\omega$ растягивается до бесконечности. При этом $\operatorname{tg}\varphi\to\infty$, а $\varphi\to\pi/2$. Таким образом, при условии (51.28б) сдвиг фазы между колебаниями тока и заряда $-\frac{\pi}{2}+\varphi$ стремится к нулю.

Наконец, при

$$\frac{R}{2k'^2L} > \frac{1}{k'\sqrt{LC}} \qquad (51.28\text{в})$$

частота ω становится мнимой и колебание — апериодическим, как показано на рис. 3.101.

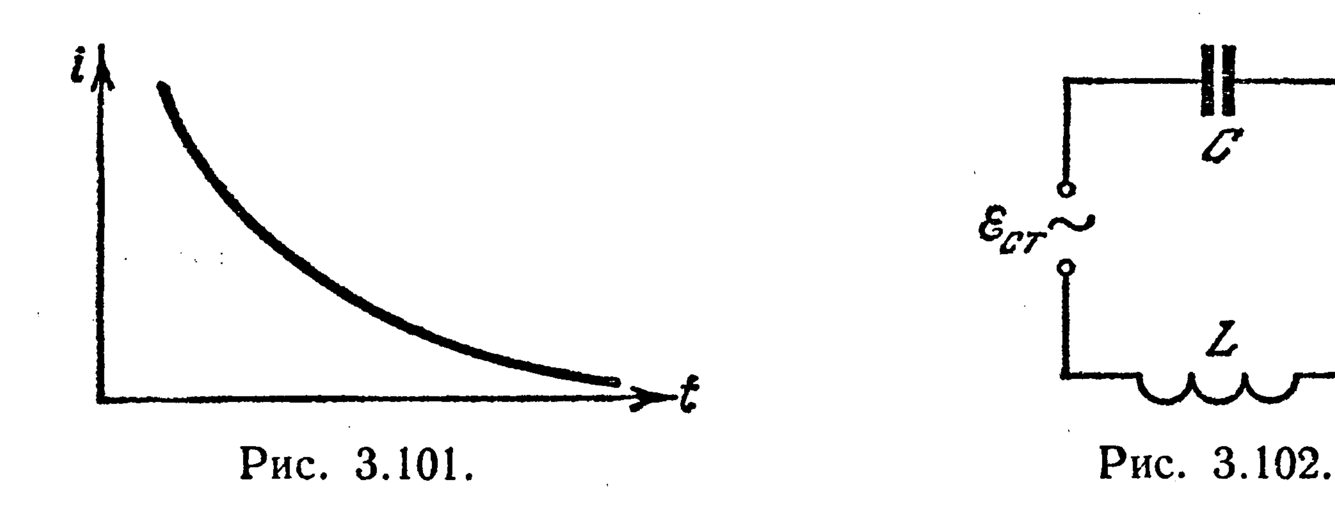


Рис. 3.101. Рис. 3.102.

Перейдем теперь к наиболее важному для приложений случаю, когда в контур дополнительно включена сторонняя гармоническая э. д. с. $\mathcal{E}_{\text{ст}}$ (рис. 3.102):

$$\mathcal{E}_{\text{ст}} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \qquad (51.30)$$

Уравнение колебаний заряда q будет отличаться от (51.23) наличием $\mathcal{E}_{\text{ст}}$:

$$k'^2 L \frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \qquad (51.31)$$

Сопоставляя его с уравнением движения материальной точки под действием квазиупругой силы, силы трения и сторонней гармонической силы (т. I, формула (54.16)):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + \varkappa x = F_0 \cos \Omega t, \qquad (51.32)$$

мы можем, как это уже делалось, воспользоваться готовым решением. Это решение будет состоять из решения однородного уравнения $q^*_{\text{своб}}$ (при $\mathcal{E}_0 = 0$), которое уже было найдено (см. (51.25)), и частного решения $q_{\text{вын}}$ неоднородного уравнения (51.27), которое может быть написано по аналогии с решением уравнения (51.32) (см. т. I, формулу (54.18)):

$$q_{\text{вын}} = A \cos(\Omega t + \Phi). \qquad (51.33)$$

Соответственно

$$i_{\text{вын}} = \frac{dq_{\text{вын}}}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \Phi) = i_0 \cos(\Omega t + \Phi'), \qquad (51.34)$$

где амплитуда вынужденных колебаний тока в контуре

$$i_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{\left(\Omega k'^2 L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2 + R^2}} \qquad (51.35)$$

и сдвиг фазы между $i_{вын}$ и $\mathscr{E}_{ст}$

$$\Phi' = \operatorname{arctg} \frac{\Omega k'^2 L - \frac{1}{\Omega C}}{R}. \qquad (51.36)$$

Напомним, что произвольные постоянные, определяемые из начальных условий, входят только в решение однородного уравнения, соответствующего собственным колебаниям, и не содержатся в частном решении неоднородного уравнения.

Так как собственные колебания из-за наличия сопротивления R затухают, то через некоторое время в контуре установятся вынужденные колебания тока i, определяемые целиком приложенной переменной э. д. с. $\mathscr{E}_{ст}$ по соотношениям (51.34)—(51.36) и не зависящие от начальных условий.

Как и в случае механических колебаний, существует **электрический резонанс**. Амплитуда вынужденных колебаний тока i_0 резко возрастает, когда $\Omega \to \frac{1}{k' \sqrt{LC}}$ как следует из (51.35), амплитуда тока достигает максимального значения при $\left(\Omega k'^2 L - \frac{1}{\Omega C}\right) = 0$ независимо от величины R. Таким образом, резонансная частота внешней э. д. с. равна

$$\Omega_{рез} = \frac{1}{k' \sqrt{LC}} = \omega_0, \qquad (51.37)$$

т. е. совпадает с частотой собственных колебаний контура в отсутствие сопротивления $\omega_0 = \frac{1}{k' \sqrt{LC}}$. Резонансная амплитуда

$$i_{0,\,рез} = \frac{\mathscr{E}_0}{R} \qquad (51.38)$$

соответствует амплитуде колебаний напряжения $\mathscr{E}_0$ по закону Ома и при $R \to 0$ стремится к бесконечности.

График зависимости i_0 от Ω при разных значениях R приведен на рис. 3.103. Для малых сопротивлений, удовлетворяющих неравенству (51.28а), эти кривые имеют вид узких вытянутых пиков. Практически с достаточно хорошим приближением можно считать, что в некотором узком интервале частот внешней э. д. с. около частоты ω_0:

$$\Omega_1 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_2, \qquad (51.39)$$

электрический ток в контуре имеет амплитуду, близкую к (51.38), а при частотах Ω, лежащих вне этого интервала:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega < \Omega_1 \\ \Omega > \Omega_2,\end{array}\right\} \qquad (51.40)$$

и

амплитуда i_0 практически равна нулю и ток в колебательном контуре не возбуждается вовсе. Для оценки ширины этого интервала частот

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \qquad (54.41)$$

положим, что при $\Omega = \Omega_{1,2}$ амплитуда тока i_0 в $\sqrt{10} = 3{,}15$ раза меньше $i_{0,\,\text{рез}}$. Тогда из (51.35) следует

$$\left(\Omega k'^2 L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2 + R^2 = 10R^2,$$

или

$$\Omega k'^2 L - \frac{1}{\Omega C} = \pm 3R.$$

Отсюда

$$\Omega^2 = \frac{1}{k'^2 LC} \pm \frac{3R\Omega}{k'^2 L}. \qquad (51.42)$$

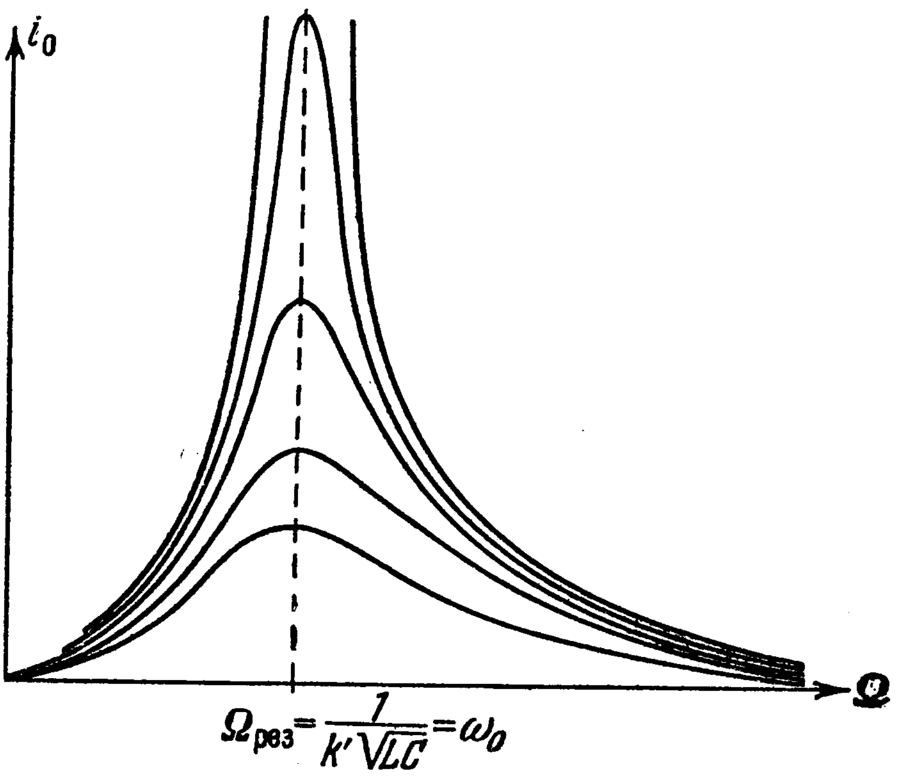


Рис. 3.103.

Заменяя в правой части (51.42) Ω приближенно на $\omega_0 = 1/k'\sqrt{LC}$ также приближенно извлекая квадратный корень, как это было сделано при выводе формулы (51.29), находим

$$\Omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{3R}{2k'^2 L} \qquad (51.43)$$

и

$$\Delta\Omega \approx 3\frac{R}{k'^2 L}. \qquad (51.44)$$

Таким образом, если согласно (51.38) $i_{0,\,\text{рез}}$ с уменьшением R растет, то полоса частот, которые возбуждают сильный ток в колебательном контуре, с уменьшением R сжимается, как это видно из рис. 3.103. Смещение же собственной частоты ω от ω_0 при малых сопротивлениях R в контуре, как видно из (51.29), незначительно, и величина ω лежит всегда внутри интервала, между Ω_1 и Ω_2. Эти обстоятельства играют важную роль в радиотехнике при настройке приемного контура на частоту передающей радиостанции.

При малых сопротивлениях основной величиной, характеризующей колебательный контур, является круговая частота собственных колебания ω_0 и обратный ей период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi k' \sqrt{LC} \qquad (51.45)$$

—формула Томсона. Следовательно, в единицах СИ

$$T=2\pi\sqrt{LC}, \tag{51.45а}$$

где T выражается в секундах, L—в генри, C—в фарадах.

В гауссовых единицах

$$T=\frac{2\pi}{c}\sqrt{LC}, \tag{51.45б}$$

где T также выражается в секундах, L—в сантиметрах, C—в сантиметрах.

§ 52. Возбуждение электрических колебаний

Колебательный контур, схему действия которого мы разобрали в предыдущем параграфе, является принципиальной основой современной радиотехники. Колебания электрического заряда и тока в контуре создают вокруг контура периодически колеблющееся электромагнитное поле, порождающее электромагнитное излучение, которое распространяется во все стороны в виде электромагнитных волн (см. § 53) и, доходя до какого-либо другого контура, возбуждает в последнем переменный ток той же частоты.

Полная электромагнитная энергия

$$W=\frac{q^2}{2C}+\frac{k'^2Li^2}{2}, \tag{52.1}$$

переходящая из катушки самоиндукции в конденсатор и обратно, в реальном контуре постепенно уменьшается. Часть этой энергии затрачивается на преодоление омического сопротивления и переходит в тепло. Другая часть энергии непрерывно расходуется на создание электромагнитного излучения, уносящего эту энергию в пространство.

Поэтому для создания и поддержания электрических колебаний в контуре к нему надо непрерывно подводить энергию от внешнего источника. Рассмотрим вкратце основные способы возбуждения колебаний электрического контура.

Вначале колебания контура возбуждались сравнительно редкими толчками с помощью индукционной катушки (индуктора). Схема такого способа возбуждения изображена на рис. 3.104. Индуктор $И$ представляет собой катушку с железным сердечником и двумя обмотками. В первичной обмотке, обычно с помощью механического прерывателя, создается пульсирующий ток. Частота разрывов тока достигает 10^3—10^4 раз в секунду. Благодаря большому числу витков во вторичной обмотке в ней индуктируется переменная э. д. с. высокого напряжения, до $\sim 10\,000$ *в*, и той же частоты. Эта э. д. с. заряжает конденсатор C. Цепь самого колебательного контура, со-

стоящего из емкости C и индуктивности L, разомкнута воздушным промежутком S. В тот момент, когда напряжение на этом разрядном промежутке достигает пробивного значения $U_{\text{проб}}$, проскакивает искра, образовавшийся при пробое столб ионизованного воздуха замыкает цепь контура, и в нем возникают собственные колебания высокой частоты. Эти колебания быстро затухают, и контур размыкается до следующей искры.

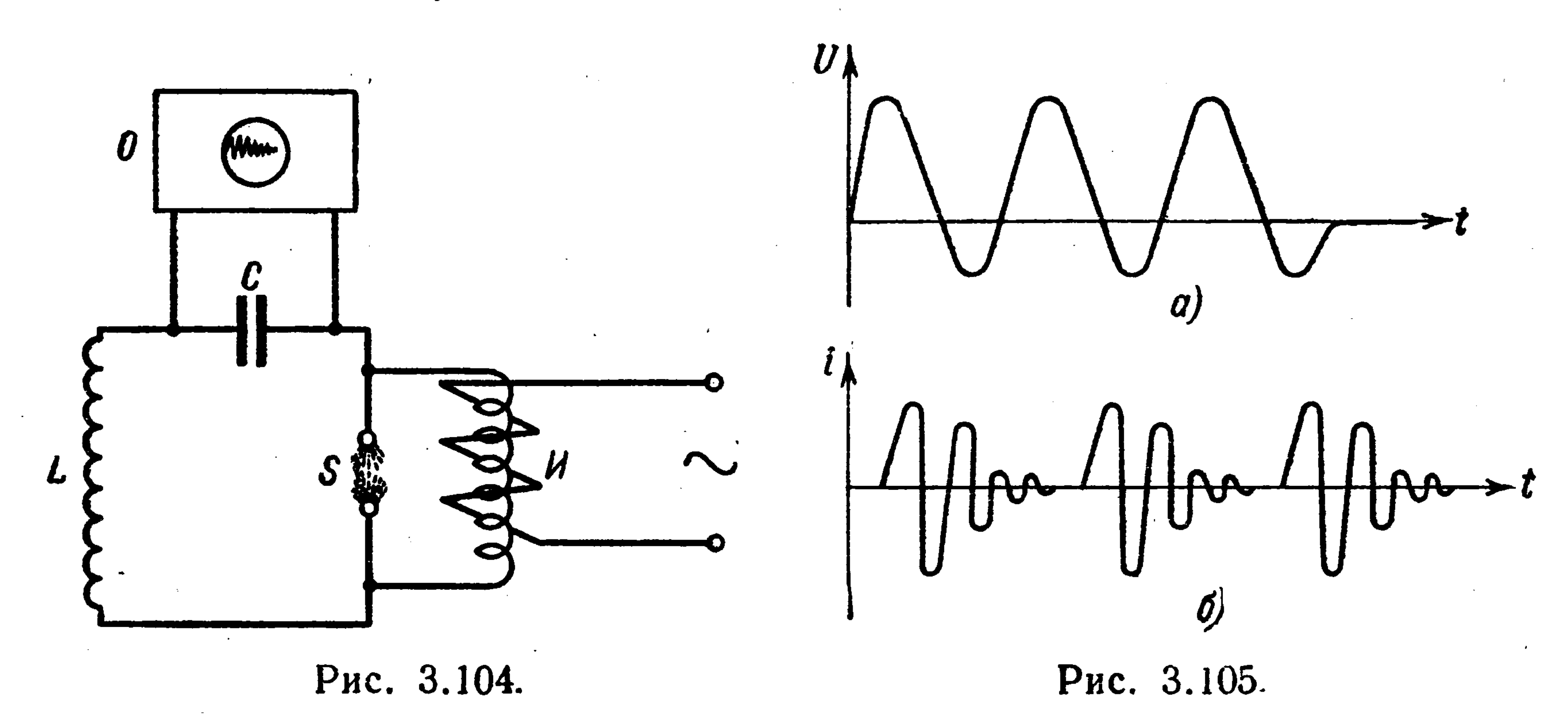


Рис. 3.104. Рис. 3.105.

На рис. 3.105, *а* показано изменение э. д. с. вторичной катушки индуктора со временем, а на рис. 3.105, *б* изображен ток i в цепи колебательного контура. Для наглядности на рис. 3.104 изображен присоединенный к контуру осциллограф O, на экране которого воспроизводится кривая зависимости i от t.

Несмотря на все несовершенство такого метода возбуждения, с его помощью Герц в 1886 г. впервые получил и изучил электромагнитные волны. Из формулы (51.45) следует, что частота собственных колебаний контура с достаточно малым омическим сопротивлением связана с остальными параметрами контура соотношением

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi k'^2 \sqrt{LC}}. \qquad (52.2)$$

Отсюда видно, что для увеличения собственной частоты колебаний контура надо уменьшить его емкость C и индуктивность L. Идя по этому пути, Герц оставил в контуре всего один виток, а затем стал уменьшать площадь пластин конденсатора и раздвигать их друг от друга, как показано на рис. 3.106, *а*—*в*.

В результате **вибратор Герца** получил форму, изображенную на рис. 3.106, *в*,—двух стерженьков с разрядным промежутком между ними, к которому подводились провода от индуктора.

Принципиально важным для увеличения интенсивности излучения явилось то обстоятельство, что контур при этом стал **открытым**.

Если в первоначальной форме контура переменное электрическое поле было все заключено внутри конденсатора (рис. 3.106, *а*), то в окончательной форме оно уже окружало вибратор снаружи (рис. 3.106, *в*).

Используя такой вибратор, Герц получил электромагнитные волны с частотой ν до 10^8 *сек*$^{-1}$ (10^8 *гц*). Позже П. Н. Лебедев,

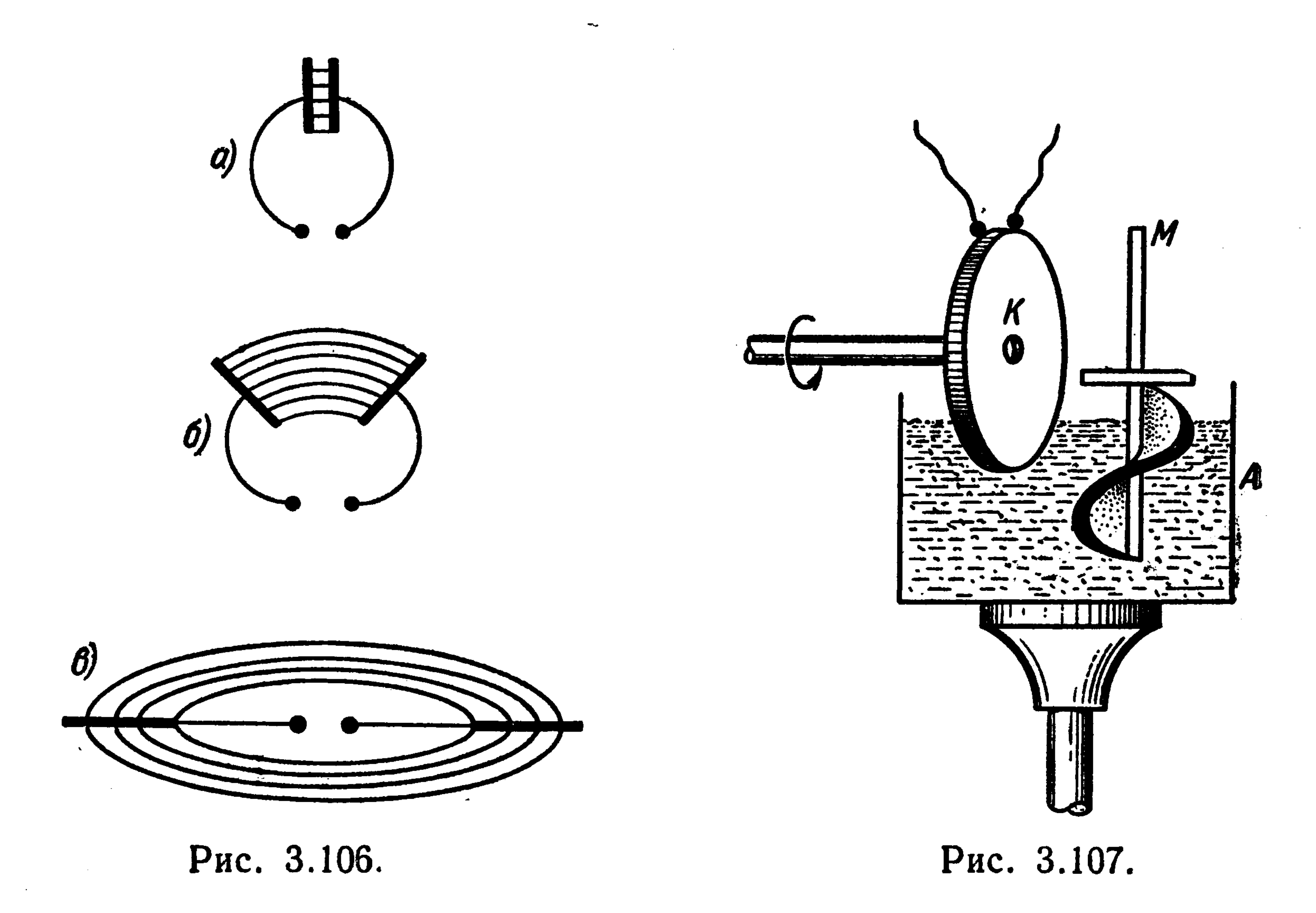


Рис. 3.106. Рис. 3.107.

применив маленькие тоненькие платиновые стерженьки, сконструировал вибратор с еще большей частотой: $\sim 10^{10}$ *гц*.

Частоты собственных колебаний электрических зарядов в атомах и молекулах еще выше и достигают примерно 10^{12}—10^{15} *гц*.

Для получения близких к этим частотам электрических колебаний макроскопических вибраторов А. А. Глаголева-Аркадьева в 1922 г. построила прибор, названный ею массовым излучателем. В сосуд *А* (рис. 3.107) наливается масло со взвешенными в нем мелкими металлическими опилками, непрерывно перемешиваемое мешалкой *М*. Колесико *К*, вращающееся вокруг горизонтальной оси, захватывает слой масла с опилками, покрывающий его обод в виде тонкой пленки—своеобразной «шины». Сверху к этой шине подводятся концы проводов от индуктора, возбуждающего электрические колебания в опилках. Благодаря непрерывной смене опилок при вращении колесика *К* они не успевают сгорать от проскакивающих между ними искр. Большое число одновременно возбуждаемых вибраторов обеспечивает достаточную для обнаружения интенсивность электромагнитных волн. Неоднородность размеров и формы отдельных вибраторов вызывает в массовом излучателе одновременные электрические колебания с различными частотами в интервале 10^{10}—10^{12} *гц*, перекрывающем промежуток на шкале частот между электрическими колебаниями атомов и макроскопических вибраторов.

В своих опытах 1887—1891 гг. для регистрации электромагнитного поля, излучаемого вибратором, Герц использовал явление электрического резонанса. Вибратор *В*, возбуждаемый индуктором *И*, являлся источником электромагнитного поля определенной частоты (рис. 3.108). Достигая второго контура с искровым промежутком, являющегося в данном случае резонатором *Р*, переменное магнитное поле возбуждало в нем электрические колебания той же частоты. При достаточной амплитуде последних через искровой промежуток резонатора проскакивала искра, сигнализировавшая о приходе электромагнитной волны.

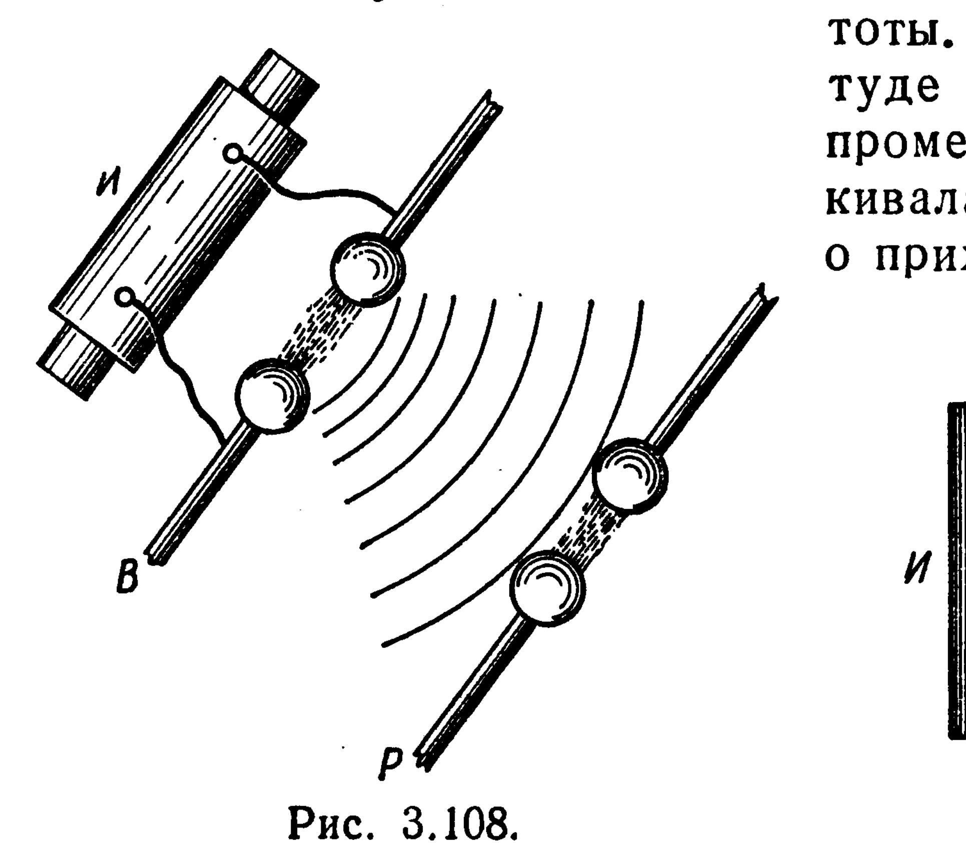


Рис. 3.108.

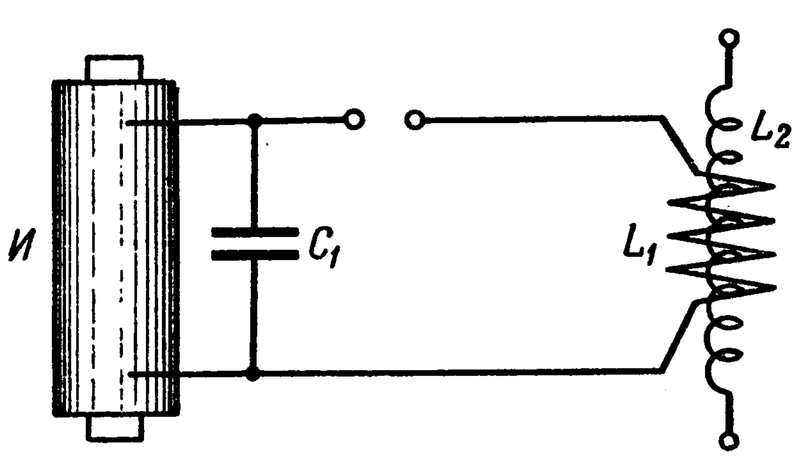


Рис. 3.109.

Для получения максимальной амплитуды колебаний контура *Р* он настраивался в резонанс с вибратором *В*.

В данном случае резонатор представляет собой контур, в котором возникают вынужденные электрические колебания. Периодическая э. д. с. возникает в нем под действием переменного электромагнитного поля первого вибратора.

Принцип электрического резонанса используется и в **трансформаторе Тесла**, схема которого проведена на рис. 3.109. В первичной обмотке этого трансформатора с помощью индуктора *И* возбуждаются электрические колебания высокой частоты $\Omega = 1/\sqrt{L_1C_1}$. Значительная часть подаваемой в контур энергии при этом излучается в пространство в виде переменного электромагнитного поля. Чтобы бо́льшая часть этой энергии передавалась во вторичную обмотку и возбуждала в ней электрические колебания значительной амплитуды, частота собственных колебаний вторичного контура $\omega_0 = 1/\sqrt{L_2C_2}$ должна совпадать с частотой вынуждающей силы Ω. Условие резонанса тогда примет вид

$$L_1C_1 = L_2C_2. \qquad (52.3)$$

Для получения во вторичной обмотке очень высоких напряжений

необходимо делать ее из большого числа витков и тем самым увеличивать ее индуктивность, так что $L_2 \gg L_1$. Для соблюдения условия резонанса (52.3) приходится соответственно сильно уменьшать емкость вторичного контура: $C_2 \ll C_1$, для чего его делают открытым. С помощью трансформатора Тесла удается получать токи высокой частоты, до 10^6 *гц*, с напряжением около миллиона вольт. Концы катушки L_2 на воздухе искрят, а в помещенных поблизости разрядных трубках с разреженными газами возникает свечение.

Для переменного тока технической частоты, 50 *гц*, потери на излучение относительно малы. Поэтому в обычных технических трансформаторах нет необходимости в строгом соблюдении условия резонанса (52.3).

Во всех рассмотренных выше системах частота подвода энергии от индуктора много меньше частоты собственных колебаний контура. Вследствие потерь энергии на джоулево тепло и на излучение после каждого «толчка» амплитуды колебаний заряда и тока в контуре быстро убывают (см. рис. 3.105, *б*). Для техники особый интерес представляет контур, в котором и при потере энергии могли бы поддерживаться незатухающие колебания. Такой контур способен испускать незатухающие электромагнитные волны. При наличии потерь незатухающие колебания можно получать только за счет постоянного притока энергии в колебательный контур. Создать такой устойчиво работающий контур удалось лишь благодаря изобретению триода.

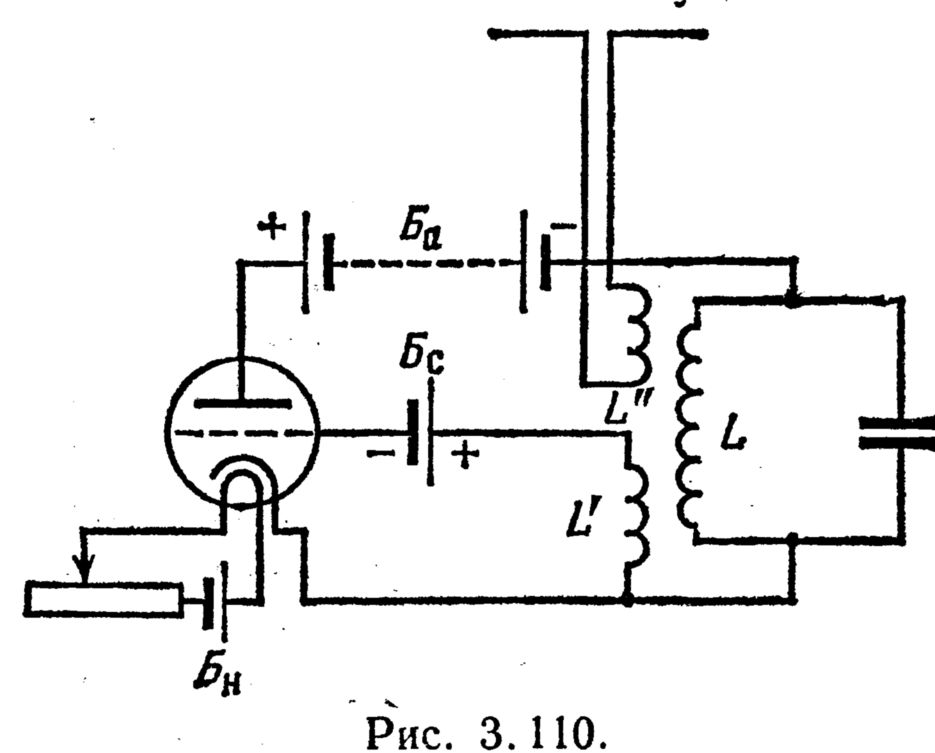


Рис. 3.110.

Рассмотрим простейший колебательный контур с триодом, в котором незатухающие колебания поддерживаются за счет энергии источника постоянной э. д. с. (например, аккумулятора). Схема такого генератора незатухающих электромагнитных колебаний показана на рис. 3.110.

Задача состоит в том, чтобы, грубо говоря, включать и выключать источник постоянного напряжения с частотой, равной частоте колебаний контура ν, так, чтобы при включениях э. д. с. источника усиливала ток в контуре.

Основная идея всех **автоколебательных** систем (механических и прочих, в том числе рассматриваемой) состоит в том, что «клапан», открывающий доступ энергии в контур, управляется самой колебательной частью прибора (в данном случае — колеба-

тельным контуром). Часть прибора, осуществляющая связь колебательной части и клапана, носит название обратной связи. При таком управлении работой клапана исключается возможность включения и выключения источника энергии «не в такт».

В нашем примере источником энергии является батарея $Б_а$, в цепь которой включен колебательный контур. Клапаном же является триод. Обратная связь реализуется следующим образом. Как известно, небольшие изменения сеточного напряжения (по отношению к катоду) сильно меняют сопротивления триода (см. § 23). Между сеткой и катодом включается катушка L', которая связывается индуктивно с катушкой L колебательного контура. Катушка L индуктирует в L' колебания, очевидно, той же самой частоты, что и частота колебаний ν в контуре. Таким образом, ток в анодной цепи (анод $\longrightarrow$ батарея $Б_а \longrightarrow$ колебательный контур $\longrightarrow$ катод) модулируется с частотой ν*). Таким образом, в колебательный контур оказывается включенной сторонняя э. д. с. нужной частоты, передающая ему энергию.

Отвод необходимой энергии в антенну также можно осуществить с помощью катушки L'', индуктивно связанной с L. Если частота контура L'' близка к ν, то передача энергии от L к L'' будет достаточно большой.

Описанный способ получения незатухающих электромагнитных колебаний используется в современной радиотехнике в области частот от 10^5 *гц* (и, при желании, меньших) до 10^9 *гц*, что отвечает диапазону длин волн от 3 *км* до 30 *см*.

Дальнейшее повышение частоты и переход к так называемому сантиметровому диапазону электромагнитных волн с помощью лампового генератора рассмотренной схемы наталкивается на два существенных затруднения. Во-первых, в соответствии с (52.2) необходимо уменьшать размеры самого контура, что, помимо прочих трудностей, снижает мощность контура. Во-вторых, при этом будет не успевать срабатывать «клапан», т. е. электронный поток в лампе. Действительно, при частоте порядка 10^{11} *гц* электроны, летящие со скоростью порядка 10^9 *см/сек*, за время одного периода $T \approx 10^{-11}$ *сек* пройдут расстояние всего лишь 10^{-2} *см* $= 0{,}1$ *мм* и будут доходить до противоположного электрода, когда его потенциал будет уже совсем не тот, что был в момент их вылета из катода.

Радиоволны сантиметрового диапазона генерируются с помощью клистронов и магнетронов. Электромагнитные волны возбуждаются в клистроне примерно так, как возбуждаются звуковые волны в органной трубе или свистке.

---

*) Батарея $Б_с$ включена в цепь обратной связи для того, чтобы лампа работала на линейной части своей характеристики.

Клистрон состоит из двух полых резонаторов P_1 и P_2 (рис. 3.111), настроенных в резонанс с помощью винтов настройки H_1 и H_2. Донышки резонаторов сделаны в виде сеток C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, сквозь которые может проходить пучок электронов. Электроны испускаются плоским подогревным катодом K, ускоряются между ним и сеткой C_1 и попадают через C_2 в первый резонатор P_1. В зависимости от фазы стоячей волны в P_1, т. е. направления вектора **E** в области между C_2 и C_3, электроны либо ускоряются в этом поле, либо тормозятся.

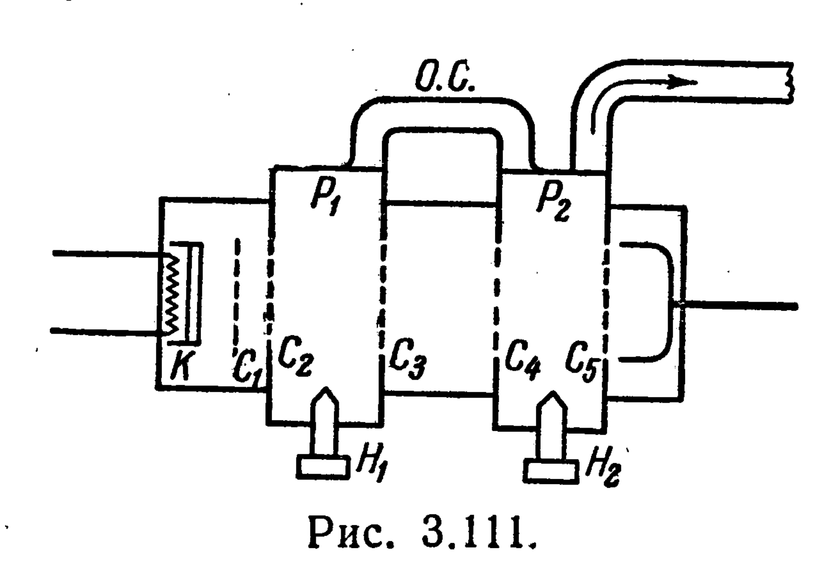


Рис. 3.111.

Представим себе, что в начальный момент электроны в P_1 тормозятся. Тогда, выходя в пространство между резонаторами, они будут двигаться медленнее, чем двигались раньше. Электроны, попадающие в резонатор через время $T/2$, будут ускоряться электрическим полем, так что их скорость возрастет. Расстояние между C_3 и C_4 — пространство дрейфа — подобрано так, чтобы запоздавшие на $T/2$, но более быстрые электроны нагнали электроны, которые движутся медленнее, вблизи C_4. В дальнейшем эта же картина будет повторяться с периодом T.

Таким образом, в результате взаимодействия с полем первого резонатора однородный пучок электронов, проходящих через C_2, разбивается на ряд «сгустков», или пакетов, формирующихся перед сеткой C_4. Если фаза поля в резонаторе P_2 такова, что пролетающий сквозь него пакет электронов тормозится полем P_2, то это же будет происходить и со всеми последующими пакетами. Это означает, что в P_2 электроны будут терять свою энергию, передавая ее электромагнитному полю, амплитуда которого будет возрастать.

Часть этого поля будет поступать через специальную полую металлическую трубку в резонатор P_1, поддерживая колебания в нем. Эта трубка играет роль обратной связи рассматриваемой автоколебательной системы; на рис. 3.111 она обозначена *О. С.* Часть энергии отводится от P_2 с помощью другой металлической трубки — волновода, оканчивающегося металлическим рупором, который является излучателем электромагнитного поля.

Клистроны очень легки и удобны в обращении. Но значительно бóльшую мощность излучения можно получить с помощью магнетрона. Магнетрон представляет собой диод с очень большим анодным напряжением. Однако ток в нем весьма невелик, так как внутри лампы имеется мощное магнитное поле **H**, параллельное оси диода. Электроны, вылетающие из катода и ускоряемые электрическим полем по направлению к аноду, отклоняются магнитным

полем и описывают траектории, показанные на рис. 3.112. Двигаясь ускоренно, электроны испускают электромагнитное излучение, которое выводится затем из магнетрона так же, как из клистрона.

Для вывода излучения высокой частоты в пространство в случае волновода можно использовать рупор, в прочих случаях — антенну, механизм действия которой будет разобран в следующем параграфе.

Для передачи электромагнитного поля без излучения его в пространство можно пользоваться также **коаксиальным кабелем**, состоящим из центрального провода и соосной с ним металлической оболочки (рис. 3.113). Токи в этом кабеле идут по поверхности внутреннего проводника и по внутренней поверхности проводника — оболочки. Электромагнитное поле в таком кабеле целиком распространяется в пространстве между проводниками и вне проводника всегда равно нулю. Поэтому коаксиальный кабель в отличие от обычных «открытых» линий, состоящих из двух параллельных проводников, ничего не излучает.

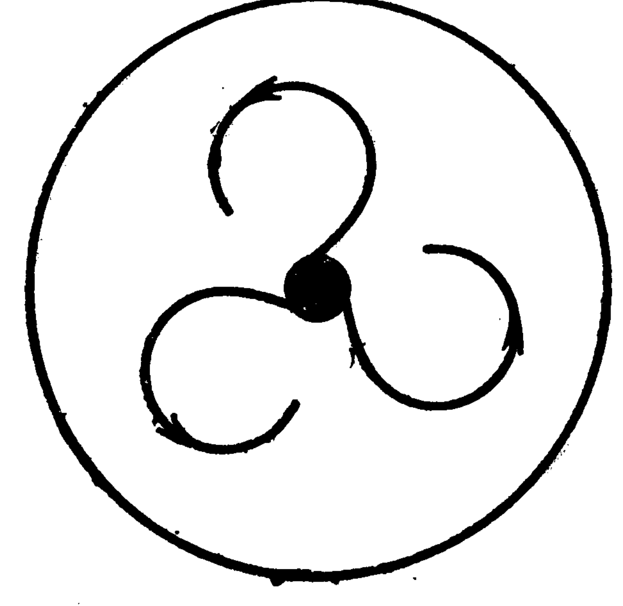


Рис. 3.112.

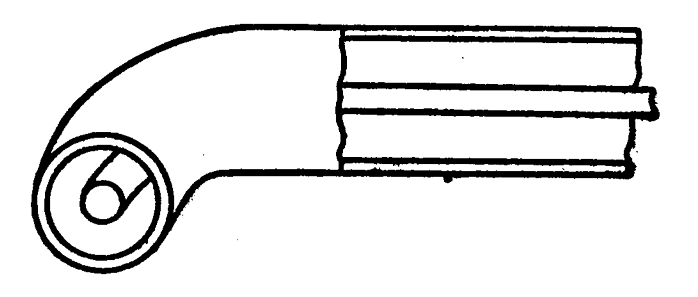


Рис. 3.113.

§ 53. Электромагнитные волны

В идеальном колебательном контуре (см. рис. 3.98) электрические заряды противоположного знака то разделяются на противоположных пластинах конденсатора, то компенсируют друг друга в моменты максимума тока. Та же картина движения зарядов и токов наблюдается в вибраторе Герца (рис. 3.106, *в*) при возбуждении его индуктором и в антенне, возбуждаемой от лампового генератора (рис. 3.110).

Для выяснения механизма образования электромагнитных волн этими излучателями представим излучатель схематически в виде колеблющегося электрического диполя. Такой простейший вибратор, изображенный на рис. 3.114, состоит из двух зарядов $+q$ и $-q$, гармонически колеблющихся с некоторой частотой ν вдоль вертикальной прямой в противоположные стороны. Амплитуда колебаний обоих зарядов одинакова, а фазы противоположны. На рис. 3.114,

а—ж изображены последовательные положения зарядов системы и линии электрического поля **E**.

В момент $t = 0$ оба заряда находятся в одной и той же начальной точке и электрическое поле отсутствует (рис. 3.114, *а*). На рис. 3.114, *б* изображено положение этих зарядов спустя некоторый промежуток времени t после начала движения. Заряды сместились на некоторое расстояние от равновесных положений, и система представляет собой электрический диполь, линии поля которого выходят из заряда $+q$ и входят в заряд $-q$. Однако на более далеких расстояниях от диполя электрическое поле еще отсутствует.

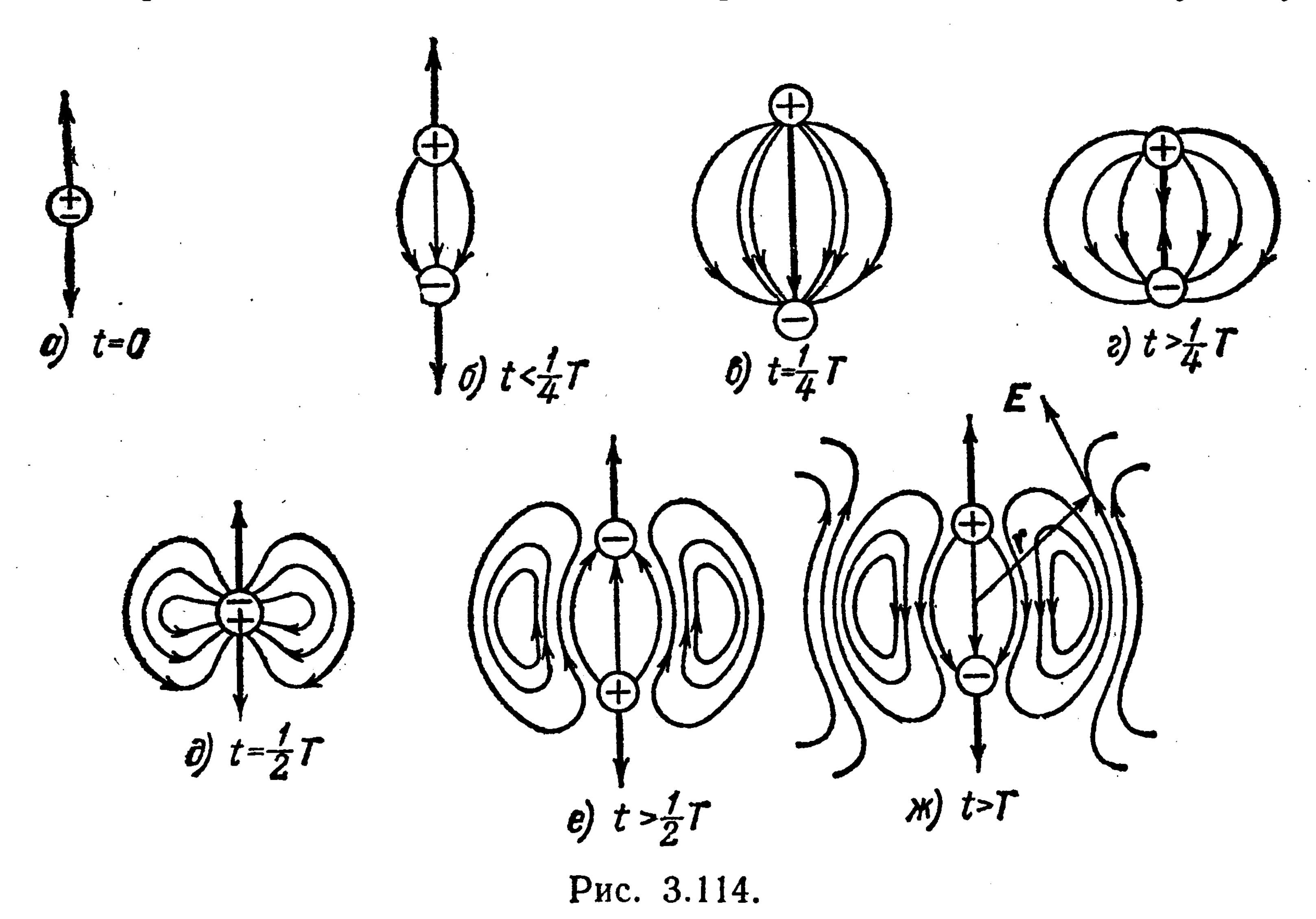


Рис. 3.114.

На рис. 3.114, *в* и *г* показаны положения обоих зарядов спустя четверть периода ($t = {}^1/_4T$) и несколько позже ($t > {}^1/_4T$). За это время электрическое поле успевает распространиться на некоторое расстояние от диполя. В момент $t = {}^1/_2T$ (рис. 3.114, *д*) оба заряда проходят через положение равновесия и компенсируют друг друга. Однако электрическое поле, созданное в окружающем пространстве за предыдущее время, не исчезает, и линии этого поля, отрываясь от зарядов, замыкаются сами на себя. В следующий момент, $t > {}^1/_2T$, заряды вновь расходятся (рис. 3.114, *е*) и начинают создавать электрическое поле обратного направления. «Отшнуровавшиеся» же замкнутые линии вектора **E** уходят от источника поля со скоростью c. По истечении первого периода колебания ($t = T$) от зарядов «отшнуруется» новая группа линий электрического поля, как показано на рис. 3.114, *ж*, и т. д.

Напомним еще раз, что линии напряженности электрического поля являются не физической реальностью, а лишь графическим способом описания структуры поля.

«Отшнуровывающееся» поле будет содержать не только электрическую составляющую. Как уже было показано, с движущимся электрическим полем всегда связано магнитное поле. Часть электрического поля, отделившаяся от поля, связанного с зарядами, будет двигаться в пространстве, и ей будет сопутствовать магнитное поле **H′**, перпендикулярное к **E**.

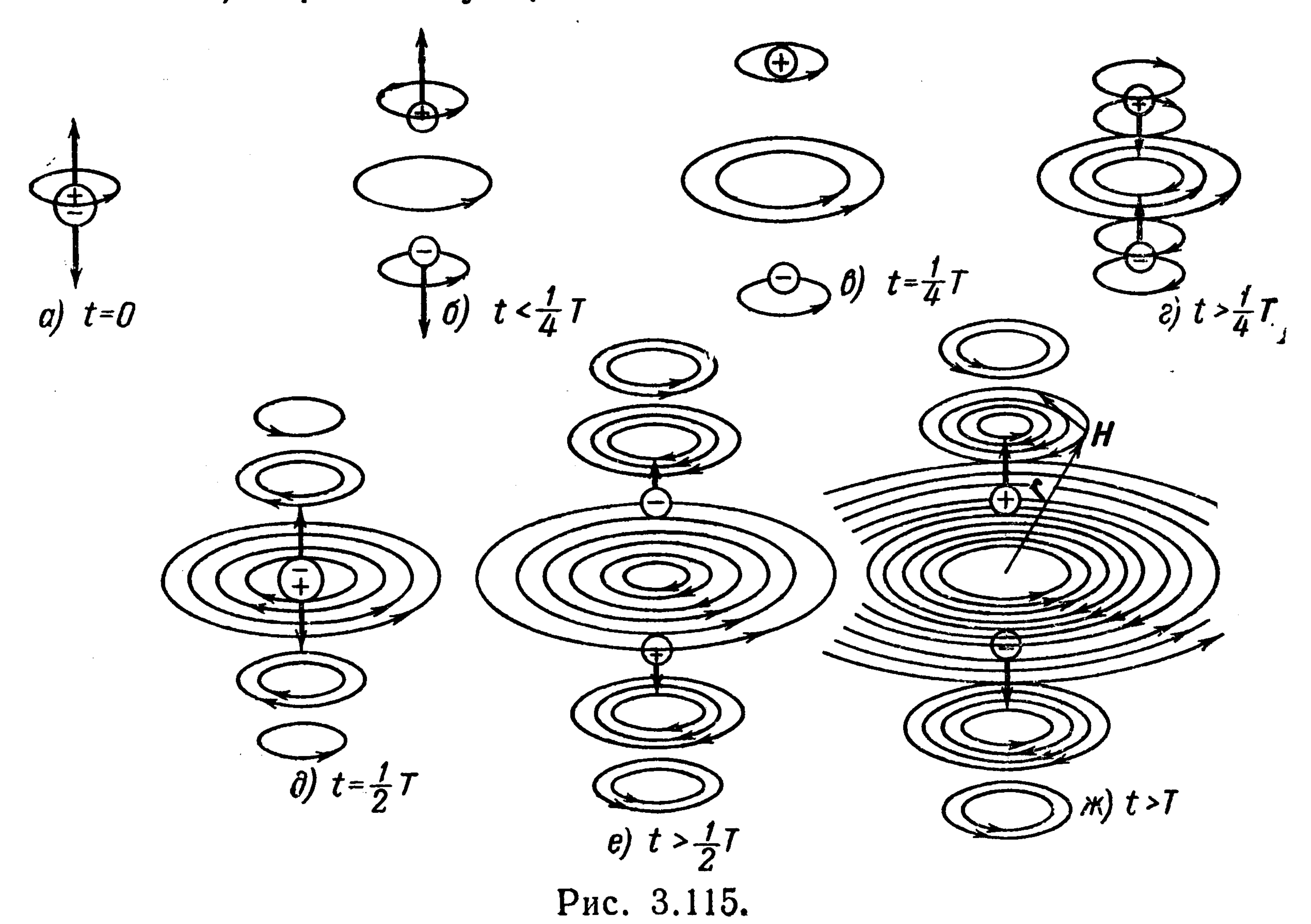


Рис. 3.115.

Если провести из центра колеблющегося диполя произвольный радиус-вектор (луч) **r**, то, как видно из рис. 3.114, *ж*, во всех точках луча вектор **E** перпендикулярен к лучу и лежит в плоскости, проходящей через луч и ось диполя (плоскости рисунка). От точки к точке луча вектор **E** периодически колеблется, изменяя свое направление на противоположное, но оставаясь в той же плоскости. Но так как линии поля движутся вдоль луча, то **E** будет периодически изменяться не только в пространстве, но и во времени.

«Отшнуровывание» поля излучения происходит не только от связанного с колеблющимися зарядами электрического поля, но и от связанного с ними магнитного поля. На рис. 3.115, *а—ж* показаны различные стадии движения линий вектора **H**, создаваемых движением зарядов, т. е. переменным током *i*. Проводя на рис. 3.115, *ж* луч **r**, мы видим, что вектор **H** перпендикулярен к плоскости, содержащей луч и вектор **E** рассмотренного выше поля,

и также периодически колеблется в пространстве и во времени. С этим магнитным полем **H** будет связано электрическое поле **E′**, обусловленное движением «отшнуровавшегося» поля **H**.

Как видно, в непосредственной близости от источника возникающее поле носит очень сложный характер. Основными слагающими здесь являются электростатическое поле диполя, которое согласно (2.19) изменяется с расстоянием по закону

$$E_{д} \sim \frac{qx}{r^3}, \qquad (53.1)$$

и магнитное поле тока, которое по закону Био—Савара—Лапласа убывает с расстоянием по закону

$$H_{т} \sim \frac{i\,dl}{r^2} \sim \frac{qu}{r^2}, \qquad (53.2)$$

где $u = dx/dt$ — мгновенная скорость движущихся зарядов.

Эти поля взаимно перпендикулярны, и их колебания сдвинуты по фазе на $\pi/2$, так же как сдвинуты по фазе колебания заряда и тока в колебательном контуре (см. § 51).

Уже отмечалось, что переменное электрическое поле $\mathbf{E}_{д}$ создает вихревое магнитное поле, а переменное магнитное поле $\mathbf{H}_{т}$ создает вихревое электрическое поле. Эти новые индукционные поля колеблются с той же частотой ν, что и породившие их поля $\mathbf{E}_{д}$ и $\mathbf{H}_{т}$, и распространяются от источника со скоростью v, рассчитанной выше, в § 50.

В результате картина суммарного электромагнитного поля еще более усложняется по сравнению с изображенной на рис. 3.114 и 3.115. Однако общая структура поля и взаимная перпендикулярность векторов **E**, **H** и **r** остаются теми же. Изменяются лишь постепенно фазовые соотношения между полями и напряженности их с удалением от источника.

Остается также в силе и зависимость напряженности индукционных полей от угла ϑ между током по оси диполя и направлением радиус-вектора, даваемая законом Био—Савара—Лапласа:

$$E_{инд},\ H_{инд} \sim \sin\vartheta. \qquad (53.3)$$

Точный расчет электромагнитного поля, излучаемого колеблющимся диполем, довольно сложен. Остановимся лишь на некоторых основных характеристиках этого излучения, основываясь на результатах, полученных в § 50.

В случае гармонических колебаний диполя

$$qx = qx_0 \sin 2\pi\nu t \qquad (53.4)$$

и элемента тока

$$i\,dl = qu = q\frac{dx}{dt} = 2\pi\nu q x_0 \cos 2\pi\nu t \qquad (53.5)$$

индукционные поля

$$E_{\text{инд}},\ H_{\text{инд}} \sim -L\frac{di}{dt} \sim -\frac{du}{dt} \sim \nu^2 \sin 2\pi\nu t \qquad (53.6)$$

колеблются с той же частотой и распространяются в виде синусоидальных волн. Зная скорость распространения волны в окружающей среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (53.7)$$

можно найти длину бегущей волны λ из соотношения

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}, \qquad (53.8)$$

справедливого для волн любого типа (см. т. I, § 55).

В соответствии с (50.19) величины $E_{\text{инд}}$ и $H_{\text{инд}}$ в каждой точке поля пропорциональны друг другу. Следовательно, при периодических колебаниях $E_{\text{инд}}$ и $H_{\text{инд}}$ одновременно достигают максимальных значений и одновременно переходят через нуль, т. е. колеблются в одинаковой фазе.

Распространяясь во все стороны от источника, электромагнитные волны непрерывно уносят с собой энергию. При установившемся процессе излучения через любую сферу поверхностью $4\pi r^2$, окружающую источник, за единицу времени проходит одно и то же количество энергии, равное произведению плотности потока энергии (50.22) на площадь поверхности сферы:

$$\frac{c}{4\pi} E_{\text{инд}} H_{\text{инд}} 4\pi r^2 = \text{const}. \qquad (53.9)$$

Отсюда и из (50.19) следует, что

$$E_{\text{инд}} \sim H_{\text{инд}} \sim \frac{1}{r}, \qquad (53.10)$$

т. е. индукционные поля убывают с расстоянием много медленнее, чем $E_{\text{д}}$ и $H_{\text{т}}$, и при $r \gg \lambda$, в так называемой волновой зоне, электромагнитное поле сводится практически к индукционным полям. Собирая результаты (53.3), (53.6) и (53.10), находим, что амплитуды полей в электромагнитной волне

$$E_{\text{инд}},\ H_{\text{инд}} \sim \frac{\nu^2 \sin\vartheta}{r}. \qquad (53.11)$$

Наибольших значений E и H достигают в экваториальной плоскости ($\vartheta = \pi/2$), а вдоль оси диполя ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) напряженность поля равна нулю.

Вектор Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \qquad (53.12)$$

в каждой точке волны направлен вдоль ее распространения — по радиус-вектору **r**. Амплитуда потока энергии

$$S \sim \frac{\nu^4 \sin^2 \vartheta}{r^2}. \tag{53.13}$$

Зависимость потока излучаемой энергии от угла ϑ изображена на рис. 3.116 в виде так называемой полярной диаграммы направленности. На этой диаграмме длины отрезков, проведенных из центра диполя под различными углами ϑ, прямо пропорциональны потоку энергии S, излучаемому в данном направлении.

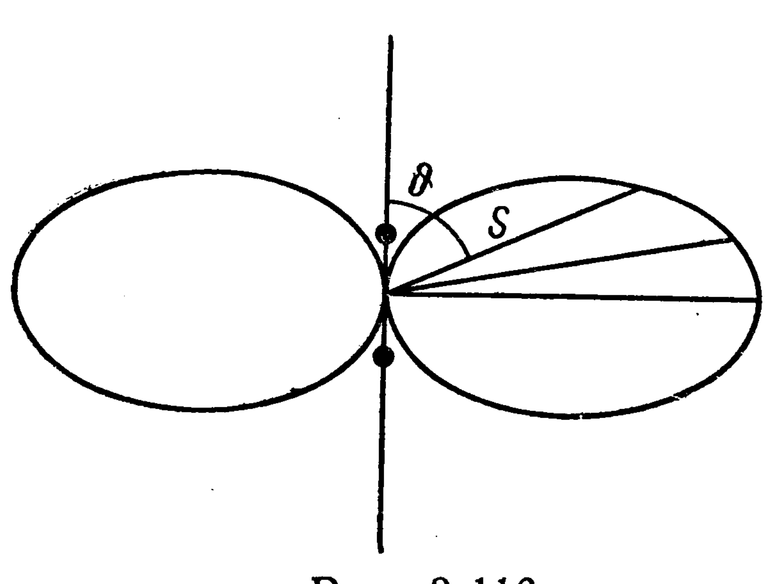


Рис. 3.116.

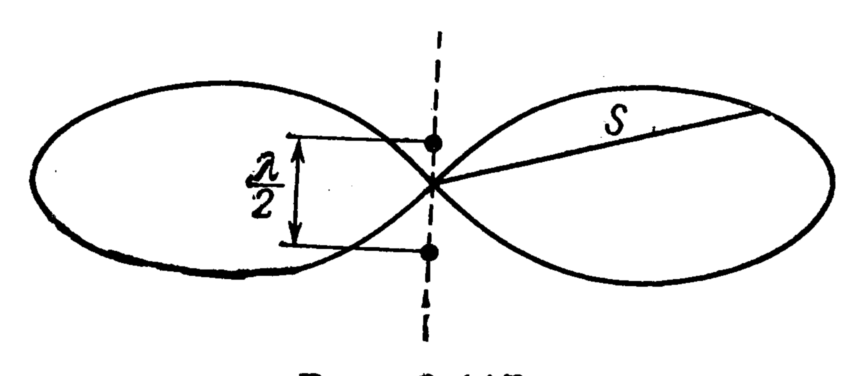


Рис. 3.117.

Приведенная диаграмма направленности для излучения одиночного вибратора показывает, что излучающая антенна на радиостанции должна располагаться вертикально. При этом максимальное излучение энергии будет происходить в горизонтальной плоскости вдоль поверхности Земли, а вертикально вверх энергия излучаться не будет вовсе.

Рис. 3. 118.

Если необходимо получить направленное излучение в самой горизонтальной плоскости, то используют явление интерференции волн. На рис. 3.117 приведен простейший пример двух антенн, колеблющихся в одинаковой фазе и расположенных на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга, — полуволнового диполя (вид сверху). В точки, лежащие на линии, соединяющей антенны, обе волны будут приходить в противоположной фазе и гасить друг друга. В перпендикулярном же направлении обе волны будут приходить в одинаковой фазе и максимально усиливать друг друга. Диаграмма направленности излучения подобной системы в горизонтальной плоскости будет иметь характерный вид «лепестка», как изображено на рис. 3.117.

Применяя более сложные системы излучателей, можно добиться значительно более узкого лепестка диаграммы направленности (рис. 3.118). Для получения практически параллельного пучка в современных радиолокаторах используют свойство электромагнитных волн отражаться от металлических поверхностей и поме-

щают излучающий диполь в фокусе параболы металлического зеркала. Этот способ применим для радиоизлучения с длиной волны, не превышающей десятка сантиметров, так как размеры отражателей должны быть много больше длины волны, чтобы не сказались дифракционные явления (см. т. I, § 60).

Даже без такого отражения на больших расстояниях от излучающего диполя участок сферической волны можно считать практически плоским. «Моментальный снимок» структуры такой плоской волны показан на рис. 3.119. Плоскости колебаний векторов **E** и **H** взаимно перпендикулярны, и сами векторы перпендикулярны к направлению распространения **v** || **S** (электромагнитные волны поперечны).

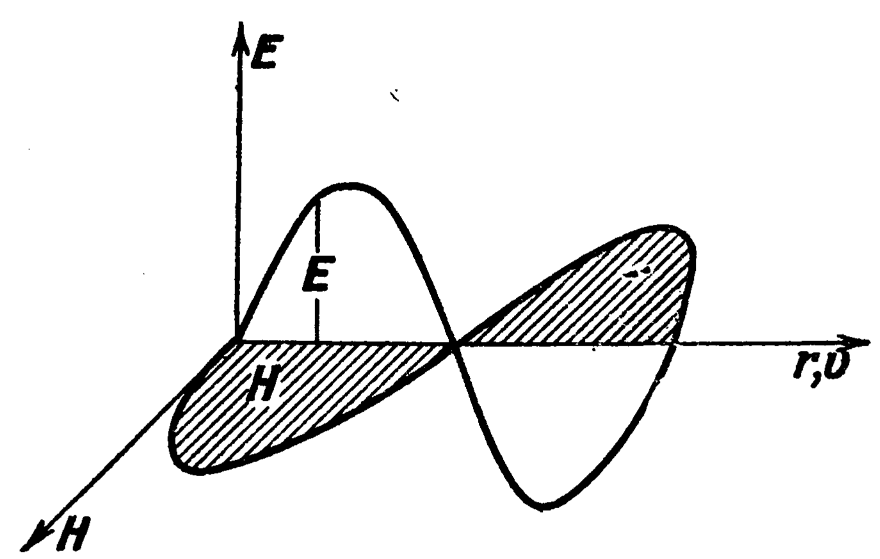


Рис. 3.119.

Из (53.13) следует, что интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени частоты колебаний вибратора. Поэтому при расчете линий переменного тока технической частоты ($\nu = 50$ *сек*$^{-1}$) учитывают лишь потери на нагревание проводов (по закону Джоуля—Ленца) и пренебрегают практически ничтожными потерями на излучение. В противоположность этому для высокой частоты ($\nu \sim 10^6$ *сек*$^{-1}$ и выше) основную роль играют потери на излучение. Эти потери настолько велики, что для поддержания незатухающих колебаний вибратора необходимо подводить к нему порции энергии от внешнего источника через каждый период, как это и делается в ламповом генераторе. По этим же причинам передача токов сверхвысокой частоты по открытым проводам без больших потерь невозможна. В этих случаях используют полые металлические волноводы, в которых «заперто» электромагнитное поле. Весьма часто для этих целей употребляют коаксиальные кабели.

Из полученного выше соотношения (53.6) видно, что частота электромагнитного излучения пропорциональна ускорению движущихся зарядов du/dt. Излучать, следовательно, будет и одиночный заряд, если он движется у с к о р е н н о с любым, положительным или отрицательным, ускорением. По сравнению с колеблющимся диполем различие будет состоять лишь в том, что в случае произвольного непериодически меняющегося ускорения заряд будет излучать не монохроматическую волну определенной частоты, а набор волн различных частот.

Примером «тормозного» излучения является сплошной спектр рентгеновых лучей. В изображенной на рис. 3.120 рентгеновской трубке поток электронов, испускаемых накаленным катодом K,

ускоряется, проходя разность потенциалов U порядка 20 000—70 000 *в*, а затем резко тормозится при ударе о сплошной металлический антикатод *А*. Вследствие огромного отрицательного ускорения при торможении на очень коротком отрезке пути электроны испускают электромагнитные волны с очень большой частотой, порядка 10^{18}—10^{20} *сек*$^{-1}$. Чем выше приложенное напряжение U, тем бо́льшую скорость имеют электроны в момент удара, тем резче они тормозятся и тем более высокую частоту (и соответственно более короткую длину волны) имеют испускаемые ими рентгеновы лучи.

Примером «ускоренного» излучения является испускание видимого света свободными электронами при ускорении их в макроскопическом поле. Такое излучение возникает в бетатронах (см. § 41), когда электроны приобретают достаточно большую скорость (весьма близкую к c). Излучение в бетатроне обусловлено центростремительным ускорением, связанным с круговым движением электронного пучка. Предсказание и расчет этого своеобразного явления «светящегося» электрона принадлежат Д. Д. Иваненко и И. Я. Померанчуку.

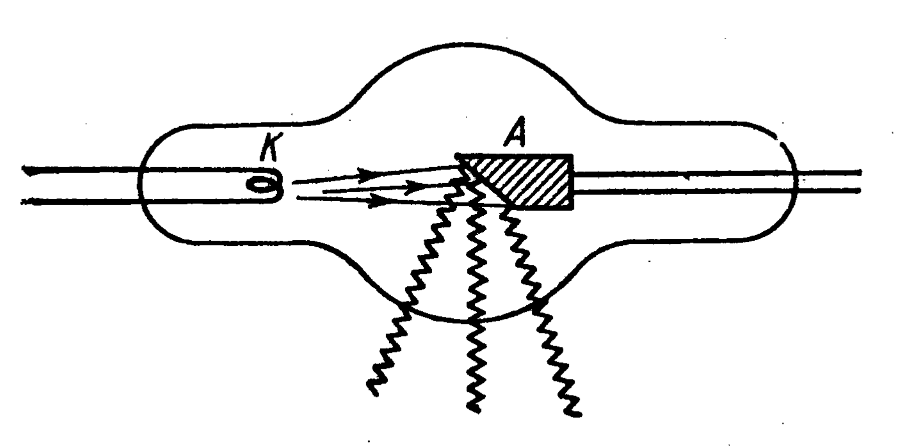


Рис. 3.120.

Свечение свободных электронов в бетатроне легко наблюдать, если часть тора, в котором происходит ускорение, сделать из прозрачного материала. При достижении электронами достаточной скорости (т. е. достаточного центростремительного ускорения) появляется красноватое свечение. Дальнейшее увеличение скорости вызывает изменение цвета излучения к голубоватому.

При движении электронов в полях меньшей напряженности, чем в бетатронах, видимое излучение уже не наблюдается — чаще всего оно лежит в радиодиапазоне. Так, по всей вероятности, возникают некоторые радиоизлучения в Галактике, воспринимаемые радиотелескопами.

Электрон, движущийся равномерно с постоянной скоростью $\mathbf{v}_{эл} = \text{const}$, не излучает, а лишь переносит с собой электрическое и магнитное поля. Вследствие того, что изменения этого поля, вызванные перемещением электрона, не охватывают мгновенно всего пространства, а распространяются с конечной скоростью, поле в данной точке будет определяться не расстоянием r до положения электрона в данный момент времени, а расстоянием до электрона в предыдущий момент времени:

$$t' = t - \frac{r}{v_r}, \tag{53.14}$$

где v_r — проекция скорости распространения электромагнитного поля $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ на направление радиус-вектора **r**. Пока

$$v_{эл} \ll \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{53.15}$$

указанной незначительной поправкой можно пренебречь.

В вакууме всегда

$$v_{эл} < c. \tag{53.16}$$

При движении же быстрого электрона в какой-либо диэлектрической среде (например, воде) может иметь место случай, когда

$$c > v_{эл} > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{53.17}$$

т. е. когда движение электрона происходит со скоростью, превышающей скорость распространения электромагнитного поля в

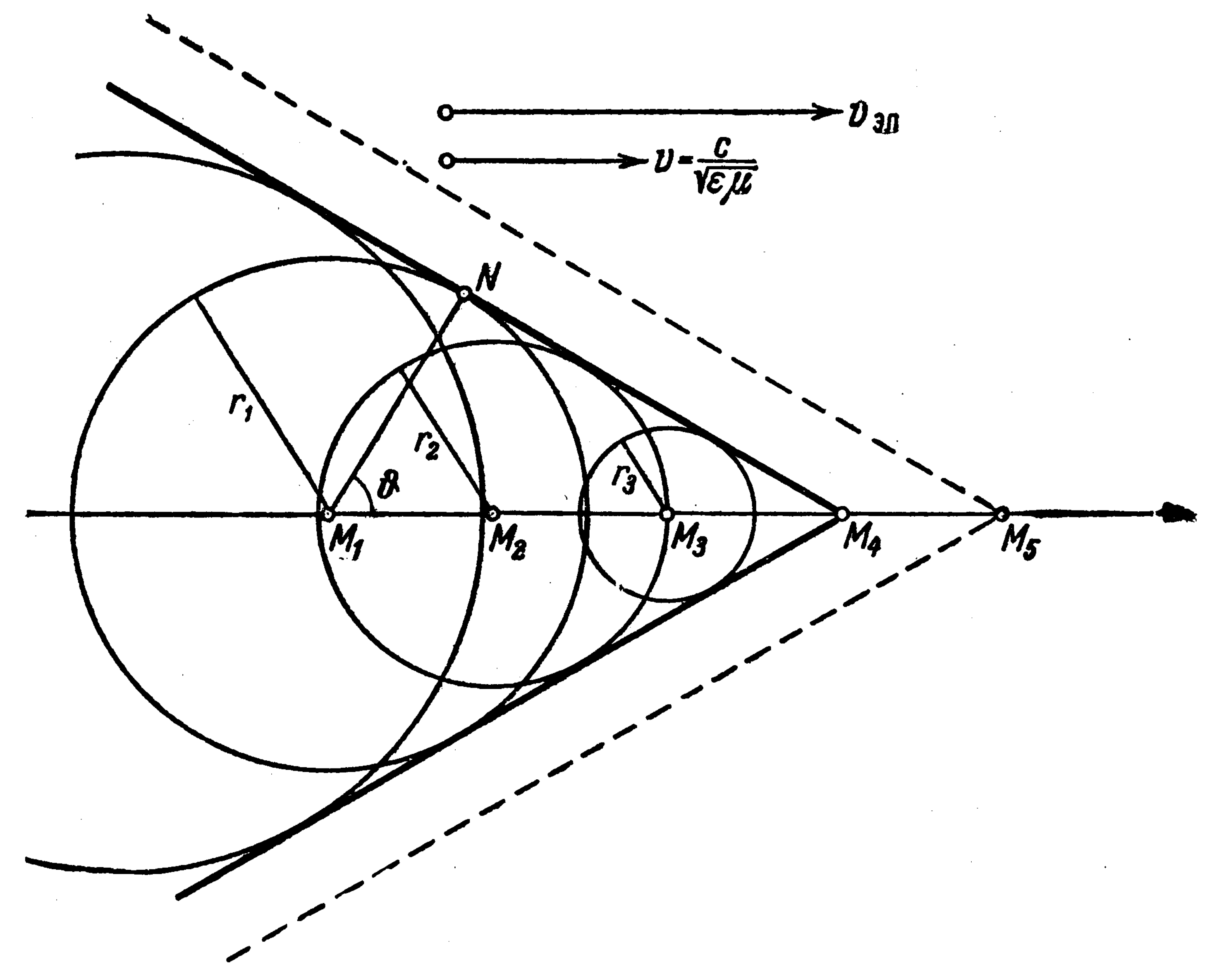


Рис. 3.121.

данной среде (но, конечно, меньшей c). В этом случае, изображенном на рис. 3.121, равномерно движущийся электрон будет опережать свое собственное поле.

На чертеже отмечен ряд последовательных положений движущегося электрона M_1, M_2, M_3, M_4 в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Чтобы изобразить область пространства, заполненную полем электрона в момент t_4, поступим следующим образом. Из точки M_1 проведем сферу радиусом

$$r_1 = v(t_4 - t_1). \tag{53.18}$$

На поверхности этой сферы лежат те точки, до которых к моменту t_4 дошло поле, созданное электроном, находившимся в момент времени t_1 в точке M_1. Аналогичные сферы радиусов $r_2 = v(t_4 - t_2)$, $r_3 = v(t_4 - t_3)$ и $r_4 = v(t_4 - t_4) = 0$ проведем из точек M_2, M_3 и M_4. Огибающая все эти сферы поверхность конуса будет показывать положение фронта электромагнитного излучения электрона в момент t_4. Пунктиром на том же рисунке показано положение фронта электромагнитного излучения в последующий момент $t_5 > t_4$, когда электрон дошел до точки M_5.

Таким образом, оказывается, что равномерно движущийся электрон может излучать электромагнитные волны, когда его скорость превышает скорость распространения этих волн в данной среде. Это чрезвычайно интересное явление было обнаружено в 1934 г. П. А. Черенковым в работе, выполненной под руководством С. И. Вавилова.

Теория этого явления, получившего название **черенковского излучения**, была разработана И. Е. Таммом и И. М. Франком. Не касаясь всех деталей теории, определим из рис. 3.121 угол ϑ между направлением этого излучения (лучом M_1N) и траекторией электрона:

$$\cos\vartheta = \frac{M_1N}{M_1M_4} = \frac{v(t_4 - t_1)}{v_{эл}(t_4 - t_1)} = \frac{v}{v_{эл}} = \frac{c}{v_{эл}n}, \tag{53.19}$$

где

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1 \tag{53.20}$$

— так называемая оптическая плотность, или показатель преломления данной среды.

Черенковское излучение возникает при прохождении через среду лишь очень быстрых частиц, скорость которых $v > \frac{c}{n}$; оно широко применяется в современной ядерной физике для регистрации прохождения энергичных частиц через вещество. В «черенковском» счетчике слабая световая вспышка попадает на фотоумножитель (см. рис. 2.50) и регистрируется специальными электронными схемами.

Применяя среды с различной оптической плотностью n, можно с помощью таких счетчиков отбирать частицы с определенными энергиями и подсчитывать их число.

§ 54. Радиосвязь

Длинные электромагнитные волны, которые были впервые использованы для нужд связи, называются **радиоволнами**.

В 1894 г. А. С. Попову удалось создать чувствительный и удобный приемник для электромагнитных волн, основные принципиальные особенности устройства которого сохранились в современной радиоприемной аппаратуре. Во-первых, Попов применил высоко поднятую приемную антенну, которая значительно увеличивает дальность приема. Во-вторых, Попов осуществил то, что называется **релейной схемой**: ничтожная энергия приходящих электромагнитных волн принимается не непосредственно (как, например, для возбуждения искры в опытах Герца), а для управления включением местного источника энергии, который и питает регистрирующий прибор. Схема первого радиоприемника Попова изображена на рис. 3.122. **Когерер** *К* представляет собой стеклянную трубку, в которой помещены металлические опилки; в оба конца трубки *А* и *В* введены провода, соприкасающиеся с опилками. Приходящая электромагнитная волна, создавая в когерере переменный ток высокой частоты, вызывает проскакивание между опилками мельчайших искр, которые сваривают опилки друг с другом. При этом сопротивление когерера резко уменьшается, и он замыкает цепь батареи *Б*, питающей электромагнит $Э_1$. Электромагнит притягивает стальную пластинку $П_1$ и с помощью контакта *Е* замыкает цепь второго электромагнита $Э_2$. Последний притягивает к себе стальную пластинку $П_2$, и соединенный с ней молоточек *М* ударяет по звонку *З*. Притянувшись к $Э_2$, пластинка $П_2$ размыкает контакт и отсоединяет $Э_2$ от батареи. Тогда пружина возвращает пластинку $П_2$ в исходное положение, и молоточек *М* ударяет через резиновый амортизатор по когереру. Когерер встряхивается, и контакты между опилками разрушаются. Вследствие этого сопротивление когерера вновь становится очень большим, цепь батареи размыкается, и приемник вновь готов к работе.

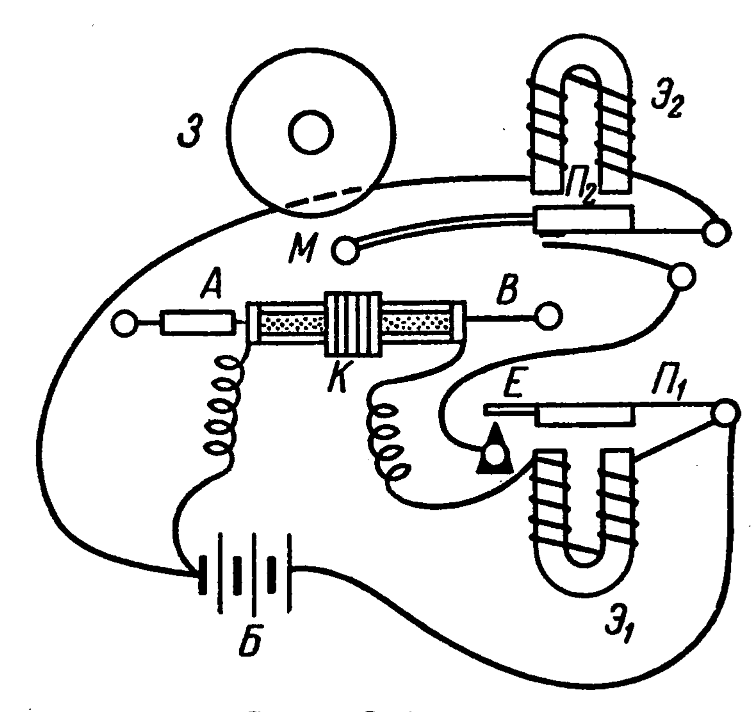


Рис. 3.122.

В современных радиоприемниках когерер заменили электронные лампы, но принцип реле остался в силе. Электронная лампа работает, как реле: слабые сигналы, подводимые на сетку лампы, управляют энергией местных источников тока, включенных в анодную цепь лампы. Схема лампового приемника изображена на

рис. 3.123. Приходящая электромагнитная волна воспринимается антенной A и создает слабые электрические колебания в контуре, состоящем из катушки L и конденсатора переменной емкости C. Варьируя емкость конденсатора, настраивают контур в резонанс с частотой колебаний передающей радиостанции. Возникающее в контуре переменное напряжение подается на сетку лампы *Л* и управляет прохождением значительно более сильного тока в анодной цепи, создаваемого анодной батареей *Б*. С приемной лампы это напряжение обычно поступает дальше на усилитель *У* и в телефон *Т*.

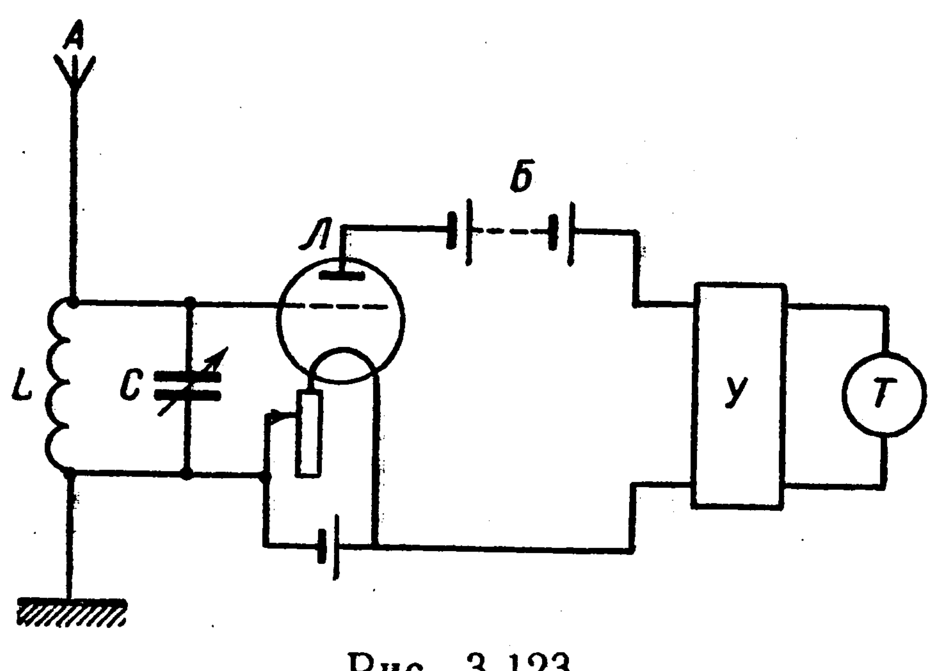


Рис. 3.123.

Даже длинные радиоволны с $\lambda \approx 1-3$ *км* имеют частоту $\nu = c/\lambda > 10^5$ *гц*, лежащую значительно выше области звуковых частот. Поэтому непосредственное преобразование приходящих электромагнитных волн в механические колебания той же высокой частоты, не воспринимаемые органами слуха, является нецелесообразным. Кроме того, чем выше частота, тем труднее создать малоинерционную механическую систему, которая успевала бы следовать за быстропеременными воздействиями и регистрировать их.

Если обозначить несущую круговую частоту генератора на передающей радиостанции через ω_0, то для передачи сигналов более низкой частоты Ω необходимо изменять излучаемые электромагнитные волны с частотой сигнала, как говорят, модулировать их. Модулировать можно амплитуду (см. рис. 3.124, *а*), частоту (см. рис. 3.124, *б*) или фазу испускаемого излучения.

Рассмотрим вкратце принцип амплитудного модулирования. В отсутствие модуляции напряженности электрического и магнитного полей излучения колеблются по гармоническому закону

$$A \cos \omega_0 t. \tag{54.1}$$

Пусть теперь на передающей станции напряжение микрофона, колеблющееся со звуковой частотой Ω, подается на сетку генераторной лампы. Амплитуда несущей волны A перестает быть постоянной и начинает сравнительно медленно меняться с частотой Ω по закону

$$A(t) = A_0 + B \cos \Omega t. \tag{54.2}$$

Подставляя (54.2) в (54.1) и производя несложные тригонометриче-

ские преобразования, находим

$$E\,(\text{или}\ H) = (A_0 + B\cos\Omega t)\cos\omega_0 t =$$
$$= A_0\cos\omega_0 t + \frac{B}{2}\cos(\omega_0 - \Omega)\,t + \frac{B}{2}\cos(\omega_0 + \Omega)\,t. \quad (54.3)$$

Таким образом, изображенное на рис. 3.124, *а* модулированное колебание эквивалентно трем радиоволнам с близкими частотами:

$$\omega_0 - \Omega, \quad \omega_0 \ \text{и}\ \omega_0 + \Omega.$$

В приемнике радиосигнал дает также модулированный по амплитуде переменный ток, который усиливается в приемном контуре и выпрямляется в детекторе. Затем производится освобождение звукового сигнала от несущей волны; для этого выпрямленный радиосигнал пропускается через контур, состоящий из

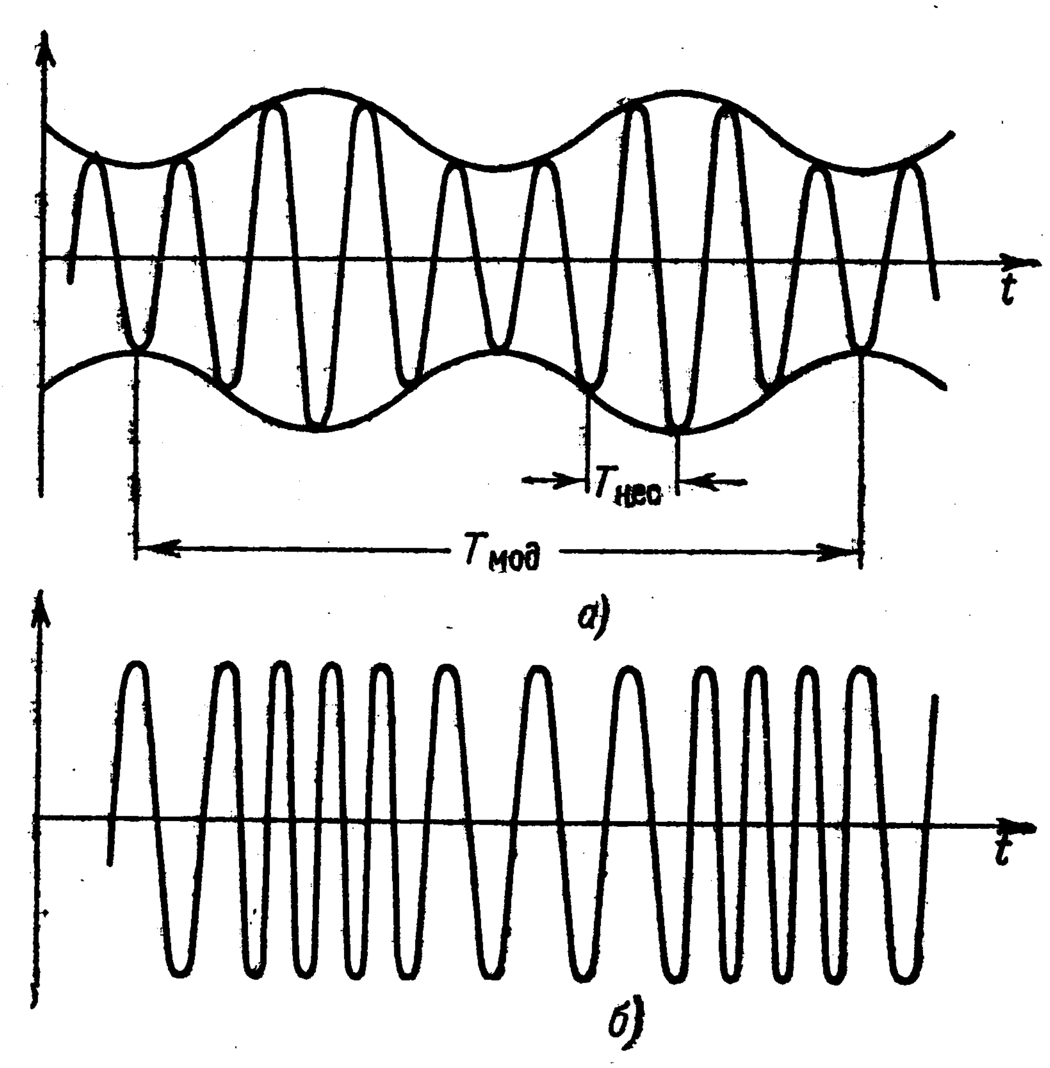


Рис. 3.124.

индуктивности (дроссель) или емкости (конденсатор), соединенных с сопротивлением. При этом инерционность контура, равная

$$\tau_L \approx \frac{L}{R} \quad \text{или} \quad \tau_C \approx RC, \qquad (54.4)$$

должна быть велика по сравнению с периодом колебаний несущей частоты $T_{нес} = 2\pi/\omega_0$, но мала по сравнению с периодом звуковых колебаний $T_{зв} = \frac{2\pi}{\Omega}$, чтобы не исказить последние. Полученная таким образом «огибающая» (рис. 3.124, *а*) поступает в катушку телефона и вызывает колебания мембраны со звуковой частотой Ω.

Если приемный контур имеет слишком «острую» настройку, то он будет реагировать лишь на частоты, лежащие в интервале $\omega_0 \pm \Delta\omega$, где $\Delta\omega < \Omega$. Тогда, как было показано в § 51, из всего излучения (54.3) он воспримет только первую составляющую с постоянной амплитудой, и ток в нем окажется немодулированным по амплитуде, т. е. сигнал не будет принят.

В случае передачи музыки и речи радиоволны модулируются весьма сложным набором частот и модулированная по амплитуде волна будет представлять собой не сумму волн трех частот, как в рассмотренном выше примере, но целую полосу частот в интервале

$$\omega_0 - \Omega_0 < \omega < \omega_0 + \Omega_0, \tag{54.5}$$

где Ω_0 — наивысшая частота передаваемых звуковых сигналов.

Чтобы звуковые сигналы могли передаваться без искажений, колебательные контуры радиопередатчика и радиоприемника должны пропускать одновременно всю полосу частот (54.5), т. е. обладать не слишком «острой» настройкой.

Поэтому несущие частоты двух радиостанций не должны быть близкими — иначе полосы частот, на которых они работают, будут перекрываться, так что раздельный прием их окажется невозможным. В лучшем случае попытка отстроиться от одной из этих станций приведет к отбрасыванию модулирующих наиболее высоких частот, т. е. к искажению принимаемых сигналов.

При телевизионных передачах частота модулирования значительно больше, чем при радиопередачах. Воспроизведение движущихся изображений требует передачи ежесекундно 25 кадров. При этом каждый кадр для четкого воспроизведения должен быть разбит на сотни тысяч последовательно передаваемых элементов. Таким образом, число передаваемых сигналов (а значит, частота модуляции) должно составлять несколько миллионов колебаний в секунду, так что несущая частота должна по крайней мере иметь порядок десятков миллионов герц. Одна из принятых в СССР несущих частот телевещания равна $5 \cdot 10^7$ *гц*, что отвечает длине волны в 6 метров.

К сожалению, возможность использования для телевидения лишь коротких волн очень ограничивает дальность приема. В то время как длинноволновое радиоизлучение, отражаясь от верхних ионизованных слоев атмосферы, способно огибать поверхность Земли, коротковолновое излучение, не отражаясь от этих слоев, распространяется по прямой. Поэтому дальность приема коротких волн ограничивается линией горизонта, и для увеличения радиуса телевещания необходимо поднимать антенны передающих и приемных станций на большую высоту.

Важным применением радио является радиолокация — определение положения самолетов, кораблей и т. п. с помощью радио-

волн. Способ определения расстояния до объектов основан на точном измерении времени прохождения радиосигнала от радиостанции к цели и обратно (отраженного сигнала). В радиолокации используется радиоизлучение с длиной волны от сантиметров и до метров, обладающее высокой направленностью (см. § 53). Длительность сигнала (импульса электромагнитных волн) составляет миллионные доли секунды. Сигналы повторяются от нескольких сот до тысяч раз в секунду (достаточно часто, но так, чтобы одновременно «в пути» в пределах радиуса обзора радиолокатора не оказались два сигнала). На экране электронно-лучевой трубки радиолокатора луч развертывается с постоянной скоростью, причем частота развертки равна числу сигналов, посылаемых в секунду станцией. В момент отправления очередного импульса подается и импульс напряжения на пластины конденсатора, управляющего вертикальным смещением луча. На экране осциллографа возникает отметка, фиксирующая момент отправления сигнала *O* (рис. 3.125). После этого антенна радиолокатора переключается на прием. Радиосигнал, достигая цели, рассеивается на ней и частично отражается обратно. Отраженный сигнал принимается, усиливается и дает вторую вертикальную отметку на экране осциллографа. Положение первой отметки, получаемой при отправлении сигнала, строго неподвижно. Расстояние между обеими отметками пропорционально времени прохождения сигнала от радиолокатора до цели:

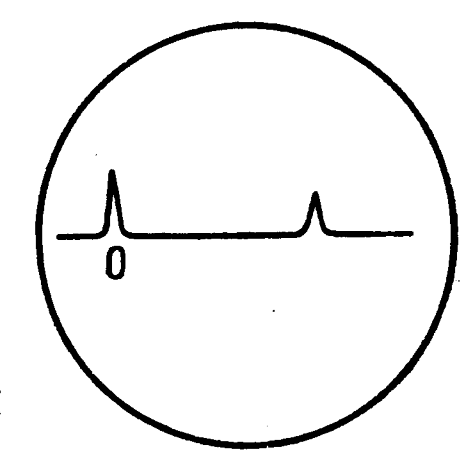


Рис. 3.125.

$$t=\frac{2l}{c}, \tag{54.6}$$

и измерение этого времени по особой шкале на экране осциллографа позволяет определить расстояние до цели l.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН В РАЗНЫХ СИСТЕМАХ, ИХ РАЗМЕРНОСТИ, ПЕРЕВОДНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

В абсолютных системах единиц — Гаусса (СГС), электростатической (СГСЭ) и электромагнитной (СГСМ) исходными являются единицы: массы — грамм (*г*), длины — сантиметр (*см*) и времени — секунда (*сек*).

В Международной системе единиц СИ исходными являются единицы: массы — килограмм (*кг*), длины — метр (*м*), времени — секунда (*сек*) и силы тока — ампер (*а*). Последняя единица рассматривается как независимая (определение см. стр. 208).

Для введения производных электрических единиц в системах СГС и СГСЭ исходят из взаимодействия зарядов, определяя из закона Кулона единицу заряда (см. стр. 12).

В системах СИ и СГСМ исходят из взаимодействия токов.

В системе СГСМ закон взаимодействия токов используется для определения единицы силы тока (стр. 208). В системе СИ единица тока введена как независимая и закон взаимодействия токов используется для определения магнитной постоянной μ_0 (стр. 209).

В большинстве разделов книги формулы записаны так, что их можно читать как в абсолютной гауссовой системе, так и в системе единиц СИ. Для этого нужно положить:

В системе СГС $k_0 = 1$; $k' = \frac{1}{c}$, $k = \frac{1}{c}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$.

В системе СИ $k_0 = \frac{1}{4\pi}$, $k' = 1$, $k = \frac{1}{4\pi}$,

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 9}\ \text{ф} \cdot \text{м}^{-1} = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}\ \text{м}^{-1}\,\text{сек}\ \text{а}\,\text{в}^{-1} = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}\ \text{м}^{-3}\,\text{кг}^{-1}\,\text{сек}^4\text{а}^2,$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{гн} \cdot \text{м}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{м}^{-1}\text{сек}\ \text{а}^{-1}\text{в} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{сек}^{-2}\text{а}^{-2}.$$

В приводимой ниже таблице для краткости введены следующие обозначения для величин, не имеющих наименований:

СГС-единица заряда ≡ СГС (q),

СГСМ-единица напряженности электрического поля ≡ СГСМ (E),

СГСЭ-единица индукции магнитного поля ≡ СГСЭ (B) и т. д.

Всюду принято приближение $c = 3 \cdot 10^8$ *м сек*$^{-1}$ $= 3 \cdot 10^{10}$ *см сек*$^{-1}$.

Физическая величина, обозначение	Физические величины, их размерности				
	СИ	СГС	Соотношение единиц СИ и СГС	СГСЭ	СГСМ
Электрический заряд q	кулон (*к*) $[q]=a\cdot сек$	$[q]=см^{3/2}\ г^{1/2} сек^{-1}$	$1\ к=3\cdot 10^9$ СГС (q)	совпадает с СГС	1 СГСМ $(q)=$ $=10$ *кулон* $[q]=см^{1/2}\ г^{1/2}$
Напряженность электрического поля E	$1\ \frac{ньютон}{кулон}=1\ \frac{вольт}{метр}$ $[E]=м\ кг\ сек^{-3} a^{-1}$	$[E]=$ $=см^{-1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$	$1\ \frac{в}{м}=$ $=\frac{1}{3\cdot 10^4}$ СГС (E)	то же	1СГСМ $(E)=$ $=\frac{1}{3\cdot 10^{10}}$ СГС (E) $[E]=$ $=см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Индукция электрического поля D	$1\ \frac{кулон}{(метр)^2}$ $[D]=м^{-2} сек\ a$	$[D]=$ $=см^{-1/2}\ г^{1/2} сек^{-1}$	$1\ \frac{к}{м^2}=$ $=4\pi 3\cdot 10^5$ СГС (D)	» »	1 СГСМ $(D)=$ $=3\cdot 10^{10}$ СГС (D) $[D]=см^{1/2}\ г^{1/2} сек^{-2}$
Потенциал электрического поля φ, V	вольт (*в*) $[V]=$ $=м^2\ кг\ сек^{-3}\ a^{-1}$	$[V]=$ $=см^{1/2}\ г^{1/2}\ сек^{-1}$	$1\ в=\frac{1}{300}$ СГС (V)	» »	1 СГСМ $(V)=$ $=\frac{1}{3\cdot 10^{10}}$ СГС (V) $[V]=$ $=см^{3/2}\ г^{1/2}\ сек^{-2}$
Электрическая емкость C	фарада (*ф*) $[C]=$ $=м^{-2}\ кг^{-1}\ сек^4\ a^2$	сантиметр (*см*) $[C]=см$	$1\ ф=9\cdot 10^{11}$ *см*	» »	1 СГСМ $(C)=$ $=\ 9\cdot 10^{20}$ *см* $[C]=см^{-1}\ сек^2$

Продолжение

Физическая величина, обозначение	Физические величины, их размерности				
	СИ	СГС	Соотношение единиц СИ и СГС	СГСЭ	СГСМ
Электрический ток I	ампер (*а*) $[I]=а$	$[I]=$ $=см^{3/2}\,г^{1/2}\,сек^{-2}$	$1а=3\cdot10^{9}$ СГС (I)	» »	1 СГСМ (I) = $=3\cdot10^{10}$ СГС (I) = $=10\,а$ $[I]=см^{1/2}\,г^{1/2}\,сек^{-1}$
Электрическое сопротивление R	ом (*ом*) $[R]=$ $=м^{2}\,кг\,сек^{-3}\,а^{-2}$	$[R]=см^{-1}\,сек$	1 *ом* = $=\frac{1}{9\cdot10^{11}}$ СГС (R)	» »	1 СГСМ (R) = $=\frac{1}{9\cdot10^{20}}$ СГС(R) = $=10^{-9}\,ом$ $[R]=см\cdot сек^{-1}$
Индукция магнитного поля B	тесла (*тл*) $[B]=кг\,сек^{-2}\,а^{-1}$	гаусс (*гс*) $[B]=$ $=см^{-1/2}\,г^{1/2}\,сек^{-1}$	1 *тл* = 10^{4} *гс*	1 СГСЭ (B) = $=3\cdot10^{10}гс=$ $=3\cdot10^{6}тл$ $[B]=см^{-3/2}\,г^{1/2}$	совпадает с СГС
Напряженность магнитного поля H	$1\,\frac{ампер}{метр}$ $[H]=м^{-1}а$	эрстед (*э*) $[H]=$ $=см^{-1/2}\,г^{1/2}\,сек^{-1}$	$1\,\frac{а}{м}=4\pi10^{-3}э$	1 СГСЭ (H) = $=3\cdot10^{10}э=$ $=\frac{1}{4\pi3\cdot10^{7}}\,а/м$ $[H]=$ $=см^{-1/2}\,г^{1/2}\,сек^{-2}$	то же
Магнитный поток Φ	вебер (*вб*) $[\Phi]=$ $=м^{2}\,кг\,сек^{-2}\,а^{-1}$	максвелл (*мкс*) $[\Phi]=$ $=см^{3/2}\,г^{1/2}\,сек^{-1}$	1 *вб* = 10^{8} *мкс*	1 СГСЭ (Φ) = $=3\cdot10^{10}\,мкс=300\,вб$ $[\Phi]=см^{1/2}\,г^{1/2}$	» »
Индуктивность L	генри (*гн*) $[L]=$ $=м^{2}\,кг\,сек^{-2}\,а^{-2}$	сантиметр (*см*) $[L]=см$	1 *гн* = 10^{9} *см*	1 СГСЭ (L) = $=9\cdot10^{20}\,см=9\cdot10^{11}_{гн}$ $[L]=см^{-1}\,сек^{-2}$	» »

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЭЛЕКТРОИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

Для количественного измерения электрических (q, I, U, ...) и магнитных (B, Φ, L, ...) величин применяются различные электроизмерительные приборы: гальванометры Γ, амперметры A, вольтметры V и др., а также комбинации этих приборов в различных измерительных схемах.

Измеряют электрические величины по различным их проявлениям и воздействиям: а) механическим; например, разность потенциалов между двумя пластинами может быть измерена по силе их взаимного притяжения; б) химическим; например, количество протекшего электричества может быть измерено по весу выделившегося на электродах вещества; в) тепловым — по нагреву проводника и т. д. Измерение одной величины можно часто заменить измерением другой, с ней связанной. Например, зная сопротивление участка цепи и измерив вольтметром падение напряжения, можно найти величину тока по закону Ома. Измерение может быть абсолютным (измерение q электрометром) или сравнительным (измерение R мостовой схемой). Как правило, всякое измерение в конечном счете сводят к измерению перемещения стрелки или луча света («зайчика») по шкале.

Измерительная аппаратура разделяется на **м е р у** (эталоны сопротивления, электродвижущей силы, емкости и т. д.) и **и з м е р и т е л ь н ы й п р и б о р**, сравнивающий измеряемую величину с единицей ее измерения. Сам измеритель заключен обычно в корпус, предохраняющий его от механических повреждений. Вспомогательные детали могут находиться вне корпуса.

Обозначения систем электроизмерительных приборов

Система	Условные обозначения
Магнитоэлектрическая	
Электромагнитная	
Электродинамическая	
Тепловая	

Приборы разделяются: а) по характеру замера — на приборы с непосредственным отсчетом и самозаписывающие; б) по условиям работы — на стационарные, переносные и транспортные; в) по точности — на классы 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; цифра класса, наносимая на шкалу прибора, дает процент погрешности от номинального предела измерения; г) по принципу работы —

магнитоэлектрические, электромагнитные, тепловые, электродинамические и т. д. Символ, указывающий принцип действия прибора, также наносится на его шкалу (см. таблицу этих символов на стр. 353). На шкалу, кроме того, наносятся и другие характеристики прибора: род тока — постоянный (—) или переменный (∽); установка прибора — вертикально (⊥), горизонтально (»→) или под углом (∠ 60°); пробивное напряжение изоляции (⚡ 2 *кв*) и т. д.

1. Магнитоэлектрические приборы

В лабораториях наиболее употребительными являются магнитоэлектрические приборы, основанные на действии постоянного магнита на катушку, через которую идет измеряемый ток. Основным магнитоэлектрическим прибором является г а л ь в а н о м е т р — высокочувствительный прибор, служащий для измерения слабых токов и других электрических величин.

На рис. П. 1 изображена схема с т р е л о ч н о г о г а л ь в а н о м е т р а. Катушка (рамка) K из тонкой проволоки может вращаться между полюсами постоянного магнита. Для усиления магнитного поля внутри расположен железный сердечник $C_р$. При пропускании тока через катушку она стремится установиться по полю. Вращающий момент $M_{вр}$, действующий на катушку, прямо пропорционален току I, т. е. $M_{вр}=k_1I$, где коэффициент k_1 зависит от напряженности поля, созданного магнитом, числа витков катушки, размеров и взаимного расположения элементов прибора. При повороте катушки и связанной с нею стрелки на некоторый угол φ спиральная пружина $П$ растягивается и создает противодействующий момент $M_{упр}$. Этот момент прямо пропорционален углу закручивания, т. е. $M_{упр}=k_2\varphi$, где коэффициент k_2 зависит от размеров и материала пружины.

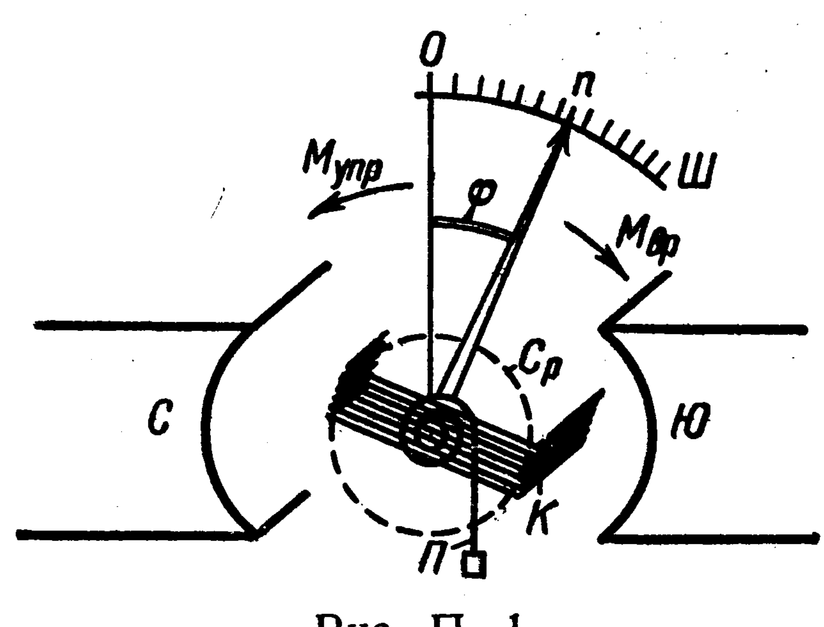


Рис. П. 1.

При равновесии

$$M_{вр}=M_{упр},$$

т. е.

$$k_1I=k_2\varphi \text{ и } I\sim\varphi\sim n, \qquad (П.\ 1)$$

где n — число делений, отмечаемое стрелкой на пропорциональной шкале $Ш$. Как видно из соотношения (П. 1), шкала магнитоэлектрического гальванометра р а в н о м е р н а я.

Следовательно,

$$I=Cn, \text{ или } n=SI.$$

Зависящий от параметров прибора коэффициент пропорциональности C называется п о с т о я н н о й п р и б о р а. Обратная ему величина $S=1/C$ называется ч у в с т в и т е л ь н о с т ь ю прибора. Обычно постоянная гальванометра имеет порядок величины $C\approx10^{-7}$ *а/дел*.

Для увеличения чувствительности гальванометра облегчают его подвижную часть и заменяют спиральную пружину упругой закручивающейся нитью, на которой подвешивают маленькую катушку, так называемую р а м к у. Схема подобного з е р к а л ь н о г о г а л ь в а н о м е т р а изображена на рис. П. 2. Для регистрации угла закручивания нити φ к ней при-

крепляют маленькое зеркальце *З*. Луч света от источника *И* падает на зеркальце и, отражаясь, попадает на прозрачную шкалу, расположенную на некотором расстоянии от прибора. При повороте зеркальца световой «зайчик» перемещается на соответствующее число делений по шкале. Деления обычно измеряются в *мм* при расстоянии от шкалы до зеркальца в 1 *м*.

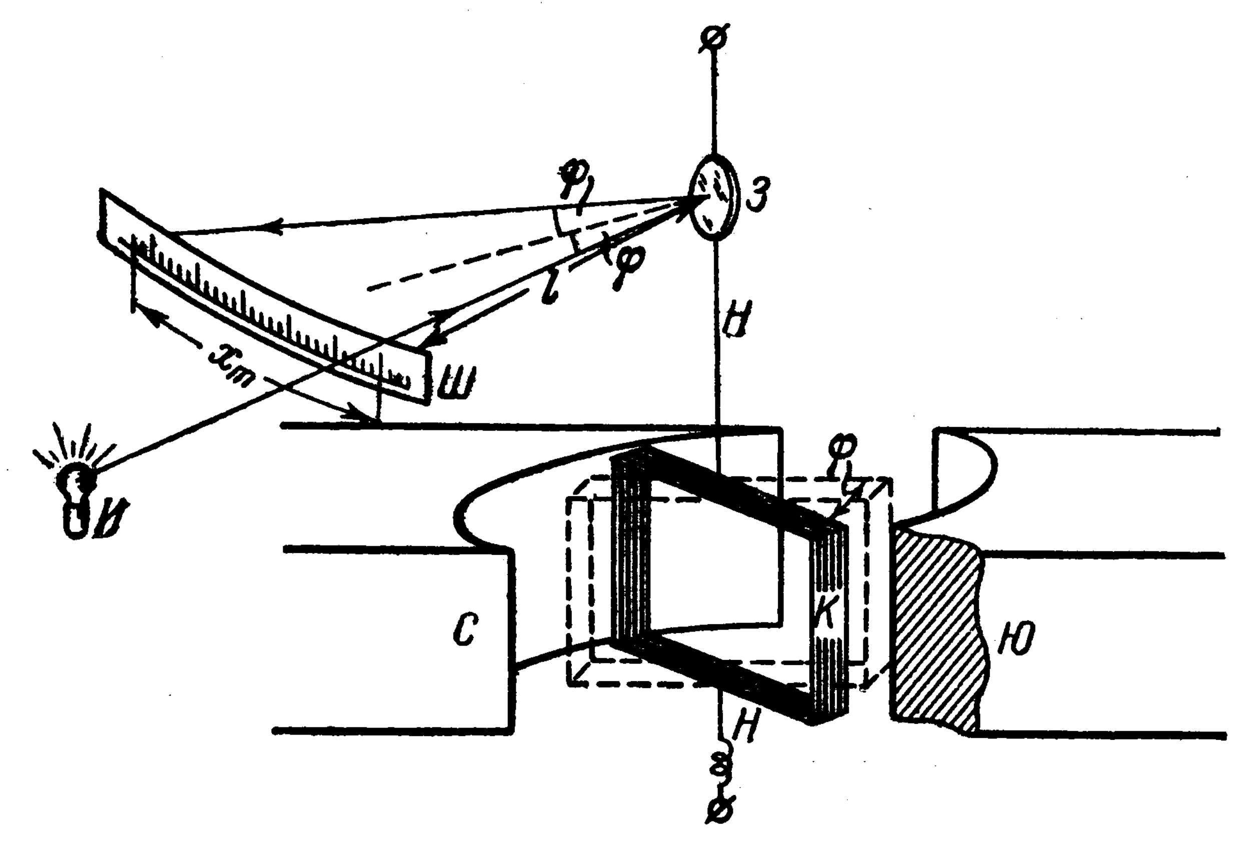


Рис. П. 2.

В соответствии с высокой чувствительностью постоянная зеркального гальванометра достигает $C \approx 10^{-11} \dfrac{a}{мм/м}$. Если столь малый ток $I = 10^{-11}\,a$ измерять электрохимически, то для выделения на электроде 1 *мг* серебра пришлось бы ожидать около 3000 лет.

Прикрепляя к рамочке дополнительные грузики (рис. П. 3) и увеличивая тем самым ее момент инерции J, можно превратить зеркальный гальванометр в так называемый **баллистический гальванометр** и измерять с его помощью кратковременные импульсы тока. Если ток I проходит через рамку в течение короткого промежутка времени Δt, то прошедший заряд $q = I\,\Delta t \sim M_{вр}\,\Delta t$, т. е. пропорционален импульсу момента сил, действующих при этом на рамку. Из законов механики следует, что этот импульс равен приращению момента количества движения рамки, т. е.

$$M_{вр}\Delta t = J(\omega - 0),$$

где ω — угловая скорость вращения, приобретенная рамкой к концу этого промежутка. В результате толчка рамка приобретает кинетическую энергию вращения $J\omega^2/2$ и начинает закручивать нить. При этом совершается работа против сил упругости, и через некоторое время, обычно через 5—10 *сек*, рамка останавливается, повернувшись на некоторый угол φ. В этот момент вся кинетическая энергия, накопленная рамкой при толчке, перейдет в потенциальную энергию упругой деформации нити, т. е.

Рис. П. 3.

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{k\varphi^2}{2},$$

где $k=\frac{M_{\text{упр}}}{\varphi}$ — коэффициент упругости нити. Отсюда $\varphi \sim \omega$, и из последовательных соотношений

$$q=I\,\Delta t \sim M_{\text{вр}}\,\Delta t \sim \omega \sim \varphi \sim n_{\text{макс}}$$

следует, что прошедший заряд q прямо пропорционален максимальному отбросу «зайчика», т. е.

$$q=C_{б}n_{\text{макс}}. \qquad (\text{П.2})$$

Величина $C_{б}$ носит название баллистической постоянной гальванометра и обычно имеет порядок $10^{-9}\frac{к}{мм/м}$.

После остановки нить начнет раскручиваться, и рамка станет совершать колебания, которые вследствие трения будут затухающими. Для успокоения (демпфирования) колебаний рамку замыкают накоротко, и в ней возникают индукционные токи, резко тормозящие ее движение.

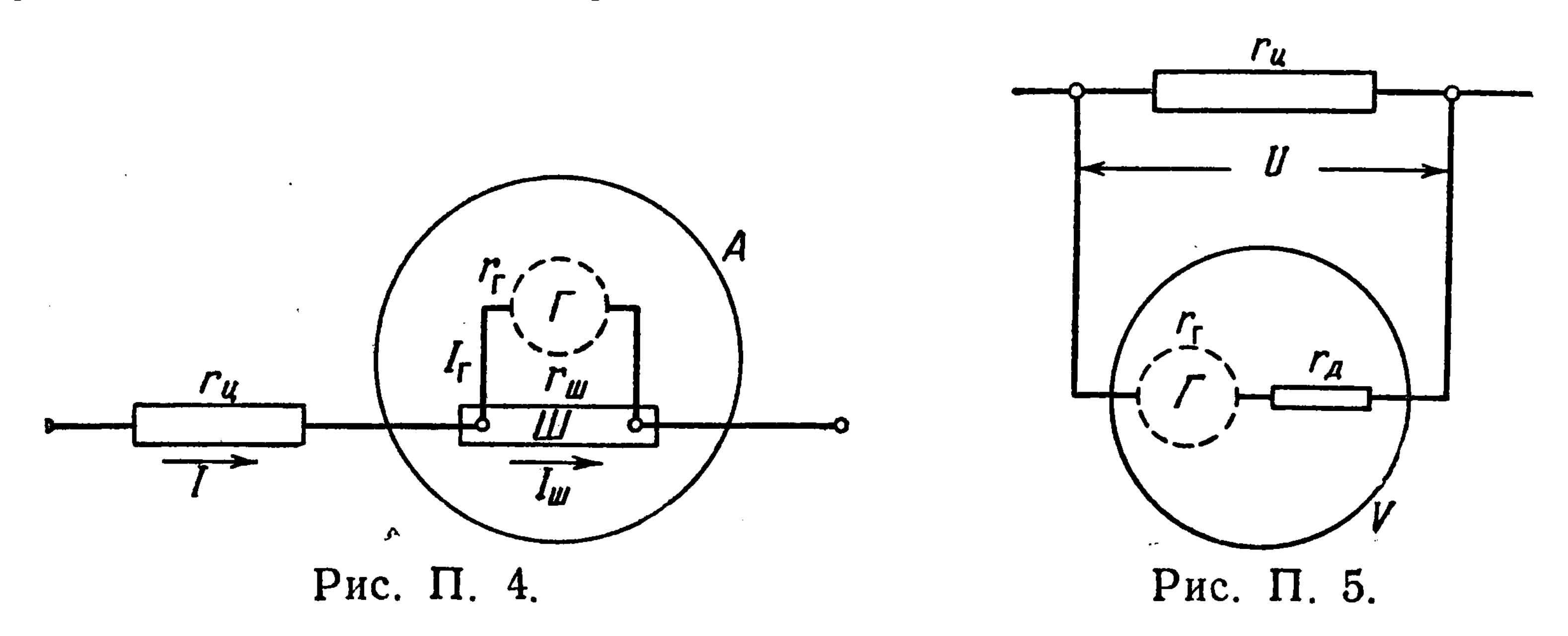


Рис. П. 4. Рис. П. 5.

Рамка гальванометра наматывается из тонкой проволоки, и через нее нельзя пропускать большие токи. Поэтому *гальванометр нельзя включить в обычную цепь* постоянного тока во избежание пережога рамки.

Для измерения тока I в цепи применяют амперметры, представляющие собой соединение гальванометра с включенным параллельно ему малым сопротивлением, так называемым шунтом, как показано на рис. П.4. При разветвлении бо́льшая часть тока $I_{ш}$ течет через шунт и лишь небольшая доля $I_{г}$ — через гальванометр. Так как $r_{ш} \ll r_{г}$, то из соотношений

$$I_{г}r_{г}=I_{ш}r_{ш}=(I-I_{г})\,r_{ш},$$

полученных на основании законов Кирхгофа, следует:

$$I_{г}=I\frac{r_{ш}}{r_{ш}+r_{г}} \ll I. \qquad (\text{П.3})$$

Ток в гальванометре $I_{г}$ много меньше тока в цепи I, но прямо пропорционален последнему. Пользуясь этой пропорциональностью, можно отградуировать шкалу гальванометра непосредственно на значения тока в цепи.

При измерениях амперметр включается в цепь последовательно. Во избежание пережога нельзя включать его накоротко с источниками тока. Для уменьшения потерь мощности в амперметре его сопротивление $r_{A}=r_{г}r_{ш}/(r_{г}+r_{ш})$ должно быть мало по сравнению с сопротивлением цепи $r_{ц}$.

В многошкальных амперметрах имеется набор шунтов, которые могут переключаться в зависимости от величины измеряемых токов.

Включая последовательно с гальванометром очень большое добавочное сопротивление $r_д \gg r_г$, можно уменьшить проходящий через прибор ток и использовать прибор как вольтметр. Вольтметр включается параллельно участку цепи, на котором измеряется падение напряжения U, как это показано на схеме рис. П.5. По закону Ома ток, идущий через вольтметр (а значит, и через гальванометр):

$$I_в = \frac{U}{r_в} = \frac{U}{r_д + r_г} \ll \frac{U}{r_г}, \qquad (П.4)$$

прямо пропорционален падению напряжения U на участке цепи. Пользуясь этой пропорциональностью, можно отградуировать шкалу гальванометра непосредственно на значения U.

Чтобы включение вольтметра не искажало существенно распределения потенциала в цепи, необходимо, чтобы сопротивление вольтметра во много раз превышало сопротивление участка цепи, $r_в \gg r_ц$. Тогда суммарное сопротивление при параллельном включении

$$r_{сумм} = \frac{r_в r_ц}{r_в + r_ц} \approx r_ц$$

практически не меняется при включении вольтметра.

В многошкальных вольтметрах имеется набор сопротивлений, которые могут переключаться в зависимости от измеряемых напряжений.

2. Другие системы электроизмерительных приборов

Приборы магнитоэлектрической системы обладают высокой чувствительностью, но пригодны лишь для измерения постоянных токов. В связи с этим в измерительной технике применяется ряд других систем приборов, пригодных для измерения как постоянных, так и переменных токов. Остановимся на некоторых из них.

На рис. П.6 изображена схема прибора электромагнитной системы. Когда через катушку K проходит ток I, то в ней возникает магнитное поле, которое втягивает в катушку железный сердечник C, подвешенный на пружине.

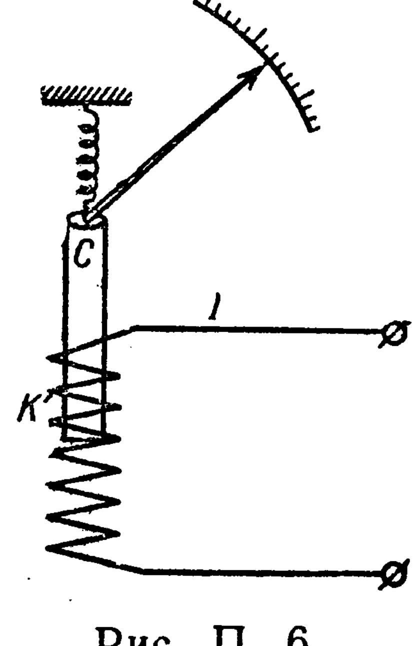


Рис. П. 6.

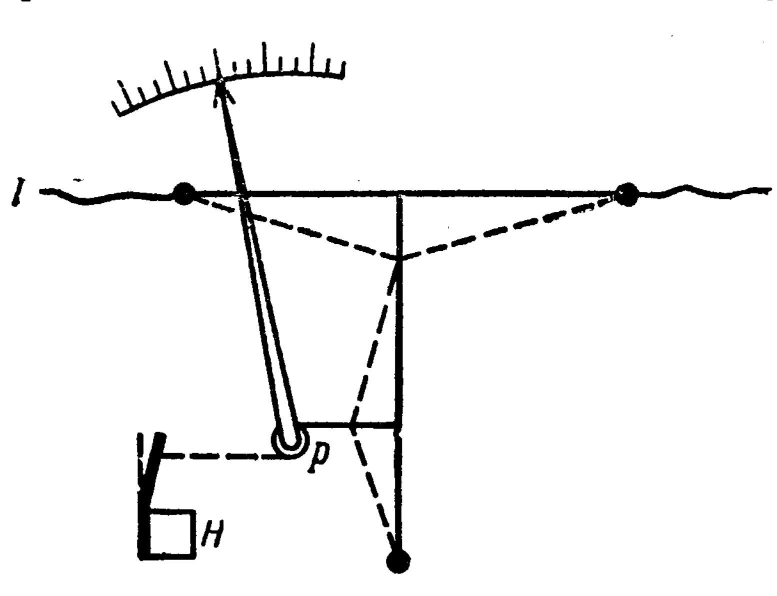


Рис. П. 7.

Чем больше ток, тем больше растяжение пружины и поворот связанной с нею стрелки. Конструктивно эти приборы обычно оформляются так: сердечник делается фигурным и поворачивается вместе со стрелкой вокруг неподвижной оси, а пружина является спиральной, как в магнитоэлектрическом гальванометре.

По катушке прибора могут непосредственно пропускаться большие токи. В зависимости от характера тока—постоянного или переменного—градуировка шкалы будет различной.

На рис. П.7 изображена схема теплового прибора. Ток I, идущий по проводнику, разогревает его, и проводник удлиняется. Через систему «рычагов» это перемещение передается одному концу нити H, намотанной на ролик P. При этом другой конец нити оттягивается пластинчатой пружиной, и катушка поворачивается, вращая вместе с собой стрелку. Так как выделяющееся тепло и разогрев нити по закону Джоуля—Ленца пропорциональны I^2, то шкала теплового амперметра не является равномерной. Приборы этой системы служат для грубых измерений, так как обладают большой тепловой инерцией (проводник с током разогревается и охлаждается постепенно).

В приборах электродинамической системы используется взаимодействие двух катушек, по которым идет ток. На рис. П.8 изображен электродинамический ваттметр W. Первая большая катушка с малым сопротивлением включена в цепь последовательно. По этой катушке идет

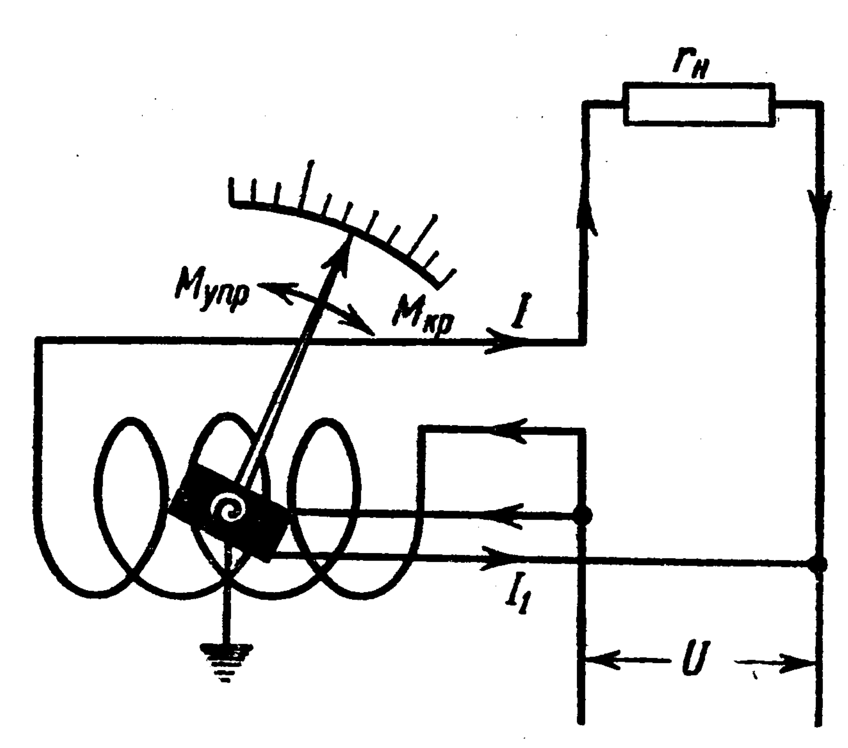


Рис. П. 8.

такой же ток I, как в измеряемой цепи; он создает в катушке магнитное поле с индукцией B, пропорциональной току I. Внутри этой катушки на перпендикулярной к ней оси помещается вторая катушка с большим сопротивлением, которая включается, как вольтметр.

Ток в этой катушке I_1 пропорционален падению напряжения U. Магнитное поле первой катушки будет действовать на вторую катушку с крутящим моментом, пропорциональным магнитной индукции B и току во второй катушке I_1, т. е. $M_{кр} \sim BI_1$; так как $B \sim I$, а $I_1 \sim U$, то $M_{кр} \sim IU$.

Поворачиваясь, вторая катушка растягивает спиральную пружину, и крутящий момент уравновешивается моментом упругих сил. Тогда угол поворота катушки и связанной с нею стрелки:

$$\varphi \sim M_{упр} = M_{кр} \sim IU, \tag{П.5}$$

оказывается пропорциональной произведению IU, т. е. мощности, выделяемой током в цепи.

Существует ряд других, менее употребительных систем электроизмерительных приборов, на которых мы не останавливаемся. Измерения некоторых величин требуют составления специальных измерительных схем, содержащих, в частности, различные электронные лампы.

3. Реостаты, потенциометры, мосты

Для изменения тока в цепи в нее включают последовательно переменное сопротивление — так называемый реостат. Реостат представляет собой голый металлический провод определенного сечения, намотанный на жесткий каркас. Параллельно этой катушке, как показано на рис. П.9, расположен металлический пруток, по которому передвигается

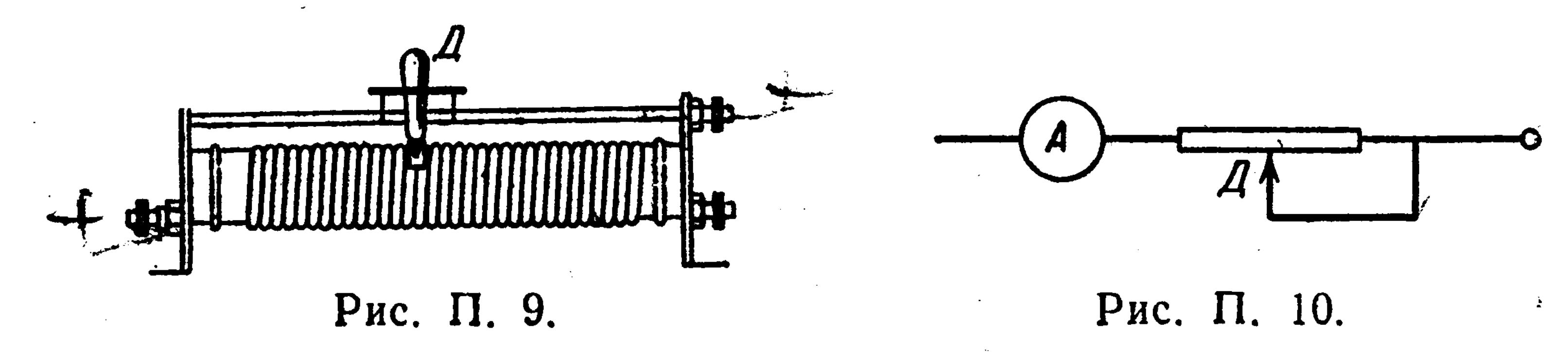


Рис. П. 9. Рис. П. 10.

скользящий контакт (так называемый движок *Д*). В зависимости от положения движка ток проходит через часть основного провода, сопротивление которого пропорционально его длине.

Схема включения реостата в цепь показана на рис. П.10. На корпусе реостата указываются его полное сопротивление и максимальный допустимый ток.

Для подбора различных сопротивлений в широком интервале применяются так называемые магазины сопротивлений. На рис. П.11

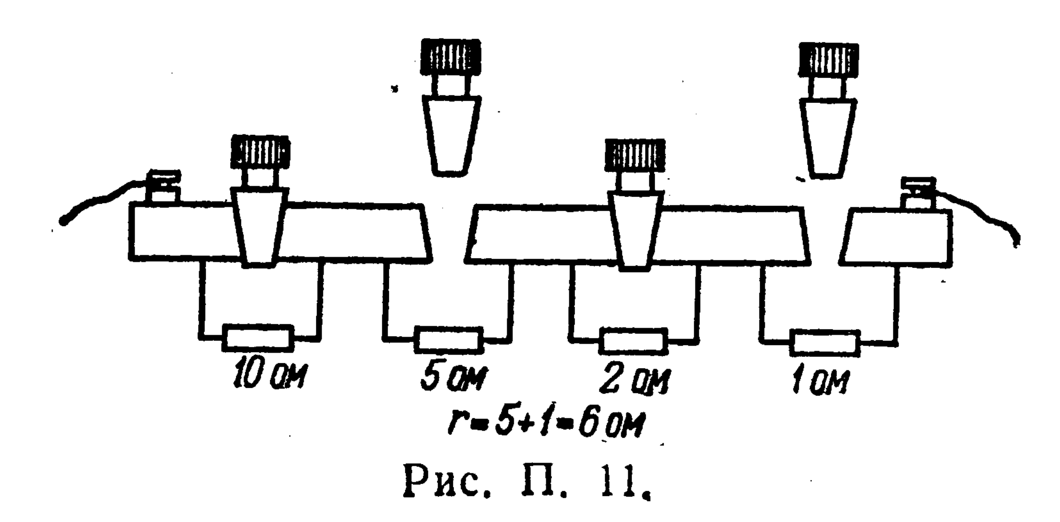


Рис. П. 11.

изображен штепсельный магазин сопротивлений, состоящий из толстых медных пластин ничтожно малого сопротивления со сквозными прорезями. Между прорезями включены катушки с точно подобранными сопротивлениями. Вставляя в прорези специальные штепсели, можно закорачивать эти катушки и выключать их из цепи. Сопротивление такого магазина равно сумме сопротивлений незакороченных катушек, т. е. определяется тем, какие штепсели вынуты из своих гнезд.

В рычажных магазинах сопротивлений катушки соединяются последовательно в группы одинаковых сопротивлений (1 *ом*, 10 *ом*, 100 *ом* и т. д.), и от каждой катушки делается отдельный отвод. Передвигая рычаг на каждой декаде, как показано на рис. П.12, можно включить в цепь необходимое суммарное сопротивление.

Для деления напряжения используются все три зажима реостата, и последний включается по схеме потенциометра, изображенной на рис. П.13. Полное сопротивление потенциометра $r_п$ включается последовательно с источником напряжения. Чтобы потенциометр не нагревался, по нему должен идти слабый ток и его сопротивление должно быть много больше внутреннего сопротивления источника r. Если в цепи у потребителя необходимо иметь не полное напряжение источника E, а некоторую его долю U, то цепь включают между одной из крайних точек и движком.

Чтобы включение потребителя не искажало распределения падения напряжения на потенциометре, сопротивление цепи должно быть большим:

$$r_ц \gg r_п \gg r. \qquad (П.6)$$

Только при соблюдении этого условия напряжение у потребителя U будет прямо пропорционально длине участка потенциометра до движка.

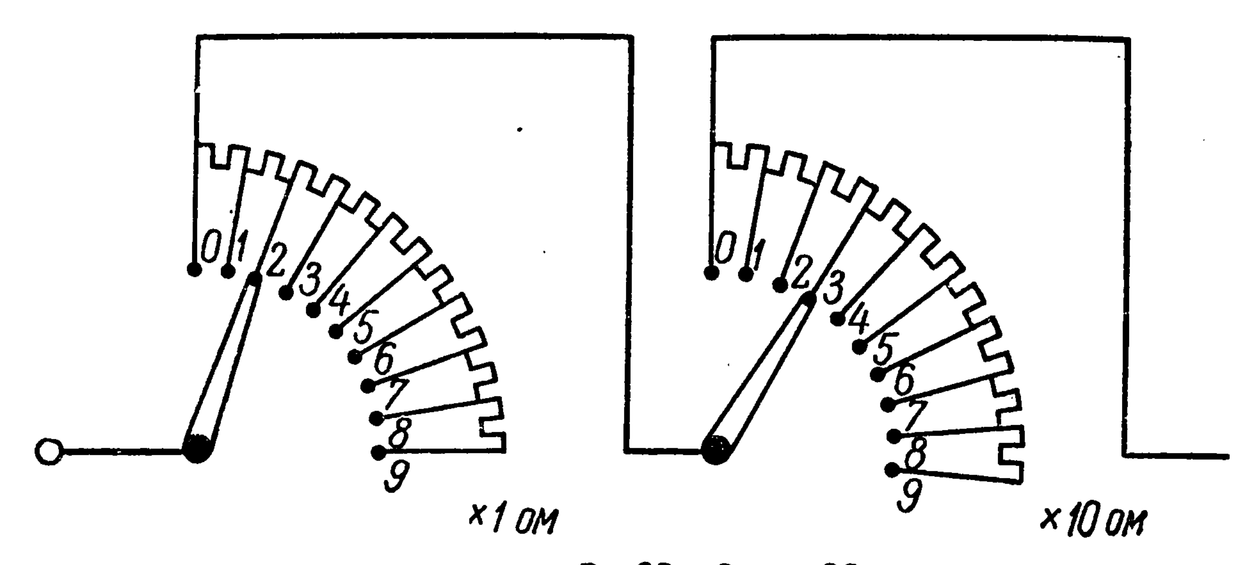


Рис. П. 12.

Для измерения сопротивлений проводников применяют различные мостовые схемы. На рис. П. 14 изображен простейший мостик

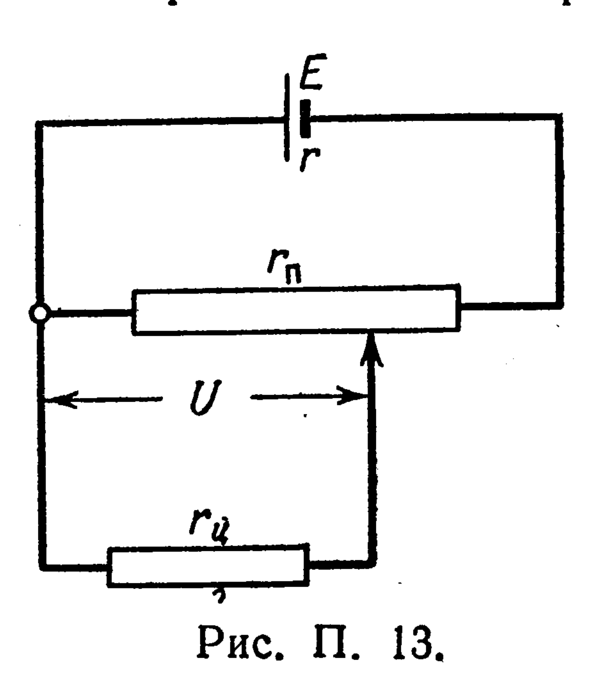


Рис. П. 13.

Уитстона с реохордом. Реохорд представляет собой калиброванную проволоку, сопротивление которой прямо пропорционально ее длине. Параллельно реохорду включается измеряемое сопротивление r_x и эталонное r_0. В одну из диагоналей моста включается источник тока E, а в другую — гальванометр и движок. Перемещая движок вдоль реохорда, добиваются отсутствия тока в гальванометре ($I_г=0$). В этом случае потенциалы точек A и B схемы одинаковы и падения напряжения на последовательных участках прямо пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_x}{r_0}.$$

Отсюда находится искомое сопротивление

$$r_x=r_0\frac{r_1}{r_2}=r_0\frac{l_1}{l_2}.$$

В магазинных мостиках сопротивления r_1 и r_2 остаются постоянными, а вместо сопротивления r_0 включается магазин сопротивлений.

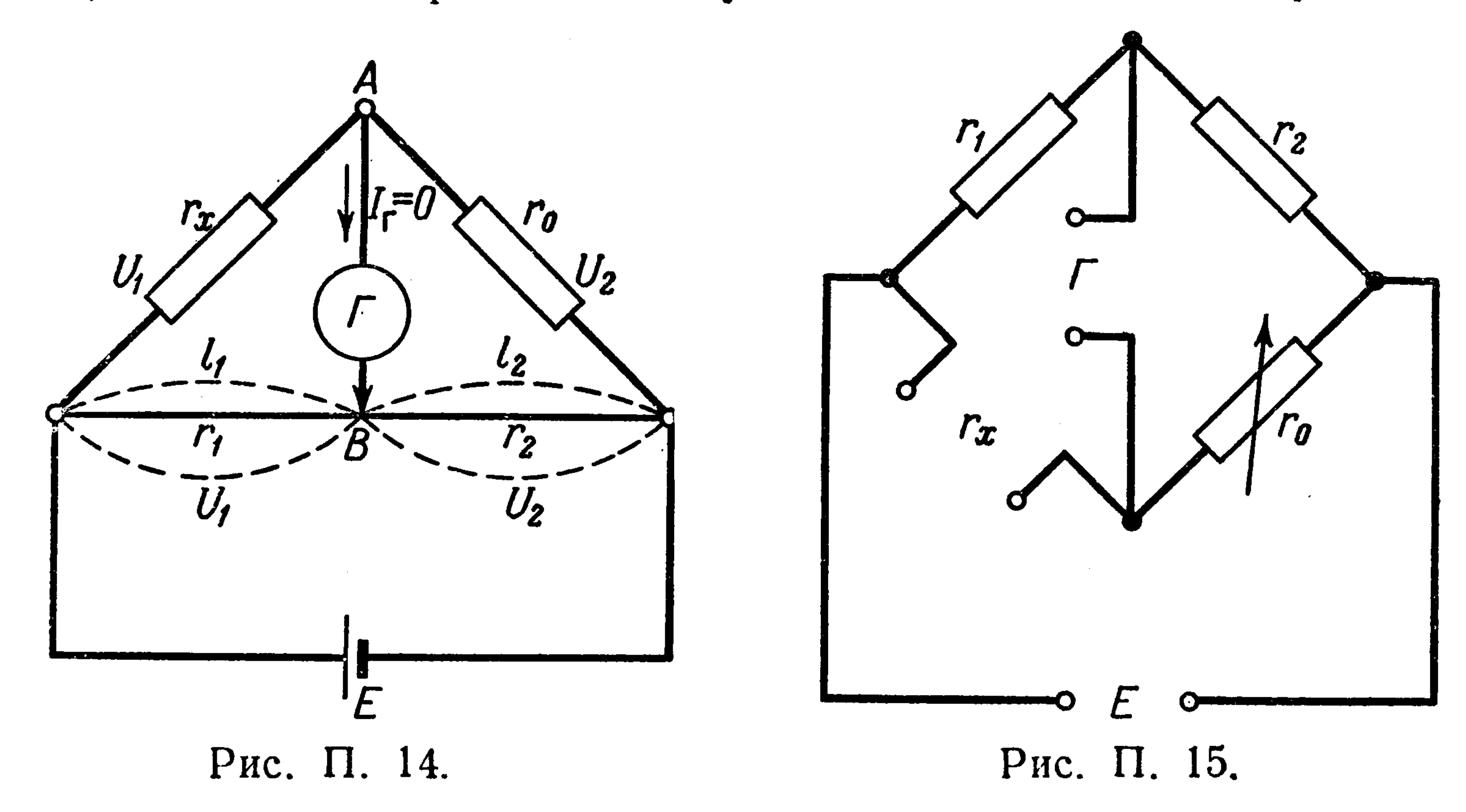


Рис. П. 14. Рис. П. 15.

Схема магазинного мостика с указанием точек включения батареи, гальванометра и искомого сопротивления приведена на рис. П. 15.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Гирш Абрамович Зисман
и Оскар Мовшевич Тодес

Курс общей физики, т. II.

М., 1969 г., 368 стр. с илл.

Редактор *Е. Б. Кузнецова*

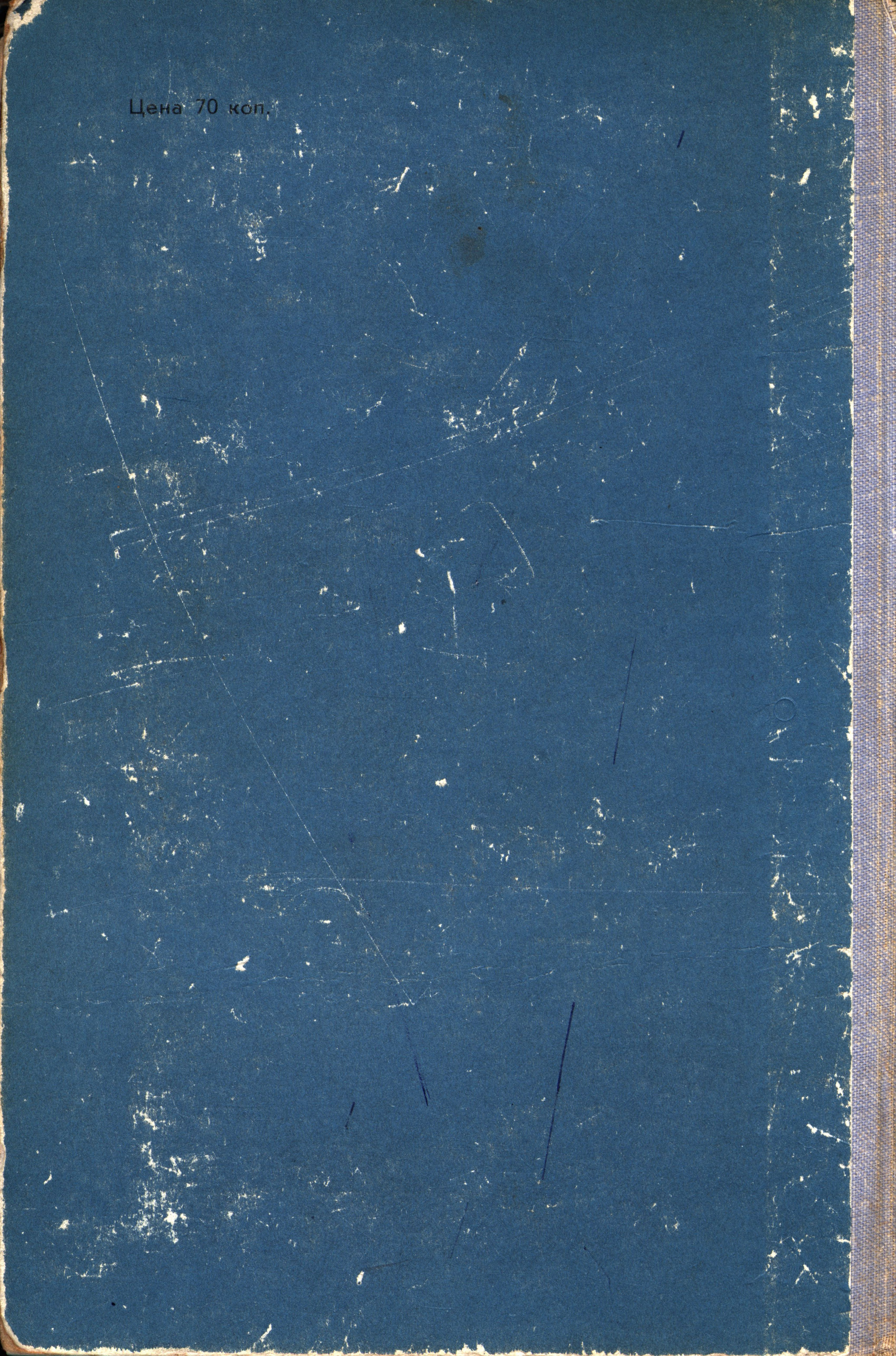
Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *А. С. Бакулова*

Печать с матриц. Подписано к печати 16/VI 1969 г. Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 23. Условн. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 21,54. Тираж 200 000 экз. Цена книги 70 коп. Заказ № 94.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28


Цена 70 коп.


II
Г.А.ЗИСМАН, О.М.ТОДЕС • КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ